СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

1 Определение СЛУ. Матричная форма записи СЛУ

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется

система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}, b_1, b_2, ..., b_m$ − заданные числа, называемые коэффициентами системы.

Решением СЛУ называется совокупность чисел $c_1, ..., c_n$, при подстановке которых в систему (1) вместо соответствующих неизвестных $x_1, ..., x_n$ все уравнения системы обращаются в верные равенства.

СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.
СЛУ называется несовместной, если она не имеет решений.

Пример 1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}, \quad m = 2, \; n = 3$$

(1;2;0) − не является решением (проверить подстановкой).
(1;1;2) − является решением (проверить подстановкой).

Решить систему − значит найти все её решения или доказать, что она несовместна.

Система называется **квадратной**, если у неё число уравнений равно числу неизвестных.

Матричная форма записи СЛУ

Рассмотрим для примера квадратную систему из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными.
В остальных случаях рассуждения аналогияны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Матрицей этой **системы** называется матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ − столбец неизвестных, столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ − столбец свободных членов .

Покажем, что систему (2) можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$.

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$ − получили заданную систему.

Матричное уравнение $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ называется <u>матричной формой</u> СЛУ (2) .

В матричной форме можно записать любую СЛУ.
Если переменных три, то удобнее обозначить буквами x, y, z (без индексов).

Пример 2 Дана система. $\begin{cases} x + 4y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 12 \\ 5x - 8y + z = 16 \end{cases}$. Очевидно она $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 4y - 2z \\ 2x + 3y - 7z \\ 5x - 8y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$. Это и есть матричная форма записи заданной системы.

Пример 3. $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 3 \\ 7x + 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Система называется **невырожденной,** если она <u>квадратная</u> (число уравнений равно числу неизвестных) и определитель её матрицы A <u>**не** равен нулю</u>. (detA ≠ 0)

2 Матричный метод решения системы

Матричным методом можно решать **невырожденные** системы (квадратные с detA ≠ 0).

Заданную систему запишем в матричной форме $AX = B$. Здесь матрицы A и B известны, они записываются по системе, а матрица X неизвестна. Матрицу X нужно найти.

Т.к. det A ≠ 0, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим уравнение $AX = B$ на матрицу A^{-1} слева: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B$.

План матричного метода коротко можно записать так:

1) записать матрицу системы А и найти обратную матрицу A^{-1};

2) найти столбец неизвестных из равенства $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$ (1)

Пример 1.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ 2x-y+z\ \ =6 \\ x+5y\ \ \ \ \ \ \ =-3 \end{cases}. \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ \det A=-2\neq 0. \quad A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x=4{,}5;\ \ y=-1{,}5;\ \ z=-4{,}5$.

Матричным методом мы находим одно решение по формуле $X=A^{-1}B$.
Вопрос: имеет ли система другие решения или это решение единственное ?
Ответом на этот вопрос является следующее утверждение.

Теорема (о единственности решения невырожденной системы)
Невырожденная система имеет единственное решение.
Доказательство. Система невырожденна $\Rightarrow$ Det A $\neq 0$ $\Rightarrow$ существует A^{-1}.
Матричным методом найдём одно решение $X_1=A^{-1}B$.

Предположим, что система имеет ещё одно решение − столбец чисел X_2.

Решение X_2 удолетворяет заданной системе $\Rightarrow$ верно равенство $AX_2=B$.

После умножения этого равенства на A^{-1} получим $X_2=A^{-1}B$.

Таким образом, $X_1=A^{-1}B$ и $X_2=A^{-1}B$ $\quad\Rightarrow\quad X_2=X_1$. $\Rightarrow$

Любое решение невырожденной системы совпадает с решением, найденным матричным методом $\Rightarrow$ невырожденная система имеет единственное решение.

3 Решение системы по формулам Крамера

По формулам Крамера можно решать только **невырожденные** системы.
Предположим, что задана невырожденная система с матрицей А, квадратной и с detA $\neq 0$.
Введем вспомогательные обозначения
Δ − определитель матрицы системы, Δ = Det A, $\Delta\neq 0$.
Δ_1 − определитель матрицы, полученный из матрицы А заменой 1-го столбца, столбцом В.
Δ_2 − ………. заменой 2-го столбца, столбцом В.
……………………………………………
Δ_n − ………. заменой *n*-го столбца, столбцом В.
Тогда решение системы находим из формул Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots\ ;\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример 1.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=9 \\ 2x+\ y+z=6 \\ \ \ x+5y\ \ \ \ \ \ =-3 \end{cases}, \quad \Delta=-2; \qquad \begin{matrix} \Delta_1=-4; \\ \Delta_2=2; \\ \Delta_3=-2; \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1=2; \\ x_2=-1; \\ x_3=1. \end{matrix}$$

Пример 2. Особенно удобно решать по формулам Крамера невырожденные системы порядка 2.

$$\begin{cases} 3x+6y=7 \\ 4x+5y=2 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 23, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -22. \qquad x_1 = \frac{23}{9}; \ x_2 = \frac{-22}{9}.$$

4 Решение системы методом Гаусса

Рассмотренные ранее матричный метод и метод Крамера можно применять только к невырожденным системы. Методом Гаусса можно решать **любые** системы. Пусть задана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m\,1}x_1 + \ldots + a_{m\,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Эквивалентные преобразования системы:

1) перестановка уравнений системы местами;
2) умножение любого уравнения на любое число $\alpha \neq 0$;
3) «прибавление» к любому уравнению системы любого другого уравнения, умноженного на любое число.

Если одна система получена из другой эквивалентными преобразованиями, то эти системы имеют равные множества решиний. Такие системы называются эквивалентными.

Для удобства вместо системы записываю расширенную матрицу системы, составленную из всех коэффициентов системы.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1\,n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\,1} & \ldots & a_{m\,n} & b_m \end{array} \right).$$

Например для системы $\begin{cases} 3x-4y+5z=3 \\ 7x+2y-z=1 \end{cases}$ расширенной матрицей является $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$.

По матрице $\overline{A}$ легко восстановить исходную систему.
То есть $\overline{A}$ − это фактически короткая запись системы, где уравнения заменены строками.

Эквивалентные преобразования расширенной матрицы:

1) престановка строк матрицы;
2) умножение любой строки на любое число $\alpha \neq 0$;
3) прибавление к строке любой другой строки, умноженной на любое число.

Суть метода Гаусса состоит в том, что расширенную матрицу заданной системы эквивалентными преобразованими приводим к **трапециодальному** виду:
В этой матрице диагональные элементы не равны 0:
$a_{11} \neq 0, \ a_{22} \neq 0, \ldots, \ a_{nn} \neq 0$, а под диагональю равны 0.

Этой трапециодальной матрице соответствует система, эквивалентная исходной системе.
Далее останется решить полученную простую систему и записать ответ.

Если в процессе преобразования получим **нулевую строку** $(0\,...\,0|0)$, то ее **можно вычеркнуть**, т.к. ей соответствует уравнение $0\cdot x_1+...+0\cdot x_n=0$, которое дает верное равенство 0 = 0 для любых значений переменных.

Если в процессе преобразования получим строку вида $(0\,...\,0|b_n),\ b_n\neq 0$, то система **несовместна** (не имеет решений), т.к. ей соответствует уравнение $0\cdot x_1+...+0\cdot x_n=b_n$, которому не удовлетворяют никакие значенния переменных.

Если в полученной трапециодальной системе **неизвестных больше**, чем переменных, то треугольную часть системы оставляем слева (базисные переменные), а остальные переменные переобозначаем буквами $c_1,...,c_n$ и переносим вправо (свободные переменные). Получим треугольную систему, которая легко решается.

Пример 1.

$$\begin{cases} x-\ y+\ \ z=3 \\ 2x\qquad -\ 2z=11 \\ -2x-4y+11z\ \ =-22 \end{cases}\qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 11 \\ -2 & -4 & 11 & -22 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 13 & -16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ответ. $x=4{,}5;\ \ y=0{,}5;\ \ z=-1.$

Пример 2.

$$\begin{cases} 3x-2y+\ \ 3z=2 \\ x-\ y+\ \ 2z=1 \\ -3x+5y-12z=-5 \end{cases}\qquad \overline{A}=...\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & -12 & -5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right),\quad \begin{cases} x-y+2z=1 \\ \qquad y-3z=-1 \end{cases},\quad z=c,\quad \begin{cases} x-y=1-2c \\ \qquad y=-1+3c \end{cases},\quad \begin{cases} x=1-2c+(-1+3c) \\ y=-1+3c \end{cases}$$

Ответ. $x=c,\ \ y=-1+3c,\ \ z=c$, для любого числа $c\in R$.

Как понимать такой ответ с буквой c? Система имеет бесконечно много решений.
Мы можем брать любое $c\in R$, подставлять его в формулы $x=c,\ y=-1+3c,\ z=c$ и получим тройку чисел, удовлетворяющую исходной системе.
Например, для c = 2 получим $x=2,\ \ y=5,\ \ z=2$. Подставим в систему:

$$\begin{cases} 3\cdot 2-2\cdot 5+\ \ 3\cdot 2=2 \quad -\text{ верно} \\ 2-\ 5+\ \ 2\cdot 2=1 \qquad\quad -\text{ верно} \\ -3\cdot 2+5\cdot 5-12\cdot 2=-5\ \ -\text{ верно.} \end{cases}$$

Другими словами, формулы $x=c,\ y=-1+3c,\ z=c$ задают всё бесконечное множество решений.

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2 \\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+5x_2-x_3+8x_4=8 \end{cases}\qquad \overline{A}=...\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\ -\ \text{несовместна}$$

Ответ. Решений нет.

Упражнение Решить систему $\{x-2y=5$ (1 уравнение и 2 неизвестных)