Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема10. «Функции нескольких переменных»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

10.1 Определение функций нескольких переменных

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y выражается формулой

$$S = x \cdot y$$

Каждой паре значения x,y соответствует определенное значение площади. В данном случае площадь можно считать **функцией двух переменных.**

Пример 2. Пусть дан прямоугольный параллелепипед, длины ребер соответственно равны $x, y, z.$

Его объем выражается формулой $V = x \cdot y \cdot z.$

В данном случае *V* является функцией трех переменных.

Пример 3. Пусть дана функция
$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

В данном случае *u*, является функцией четырех переменных $x, y, z, t.$

Определение. Если каждой точке

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) \in D$$

принадлежащей данному множеству, поставлено в соответствие по определенному закону одно единое действительное число *u*, то говорят, что на множестве *D* задана функция от *n* переменных

$$u = f(p), \quad u = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Если $n = 1,$ то говорят о функции одного переменного

если $n = 2,$ то говорят о функции двух переменных.

Для простоты рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y).$

Определение. Совокупность пар $(x, y),$ **при которых функция** $z = f(x, y)$ **определена, называют областью определения этой функции.**

Если каждую пару значений *x,y* обозначить на плоскости *Oxy* точкой, то область определения функции будет изображаться в виде совокупности точек на плоскости.

Для функции трех переменных областью определения будет являться совокупность трех чисел. Таким образом, область определения будет представлять совокупность точек в пространстве.

Пример: Функция задана аналитически. Найти область определения функции

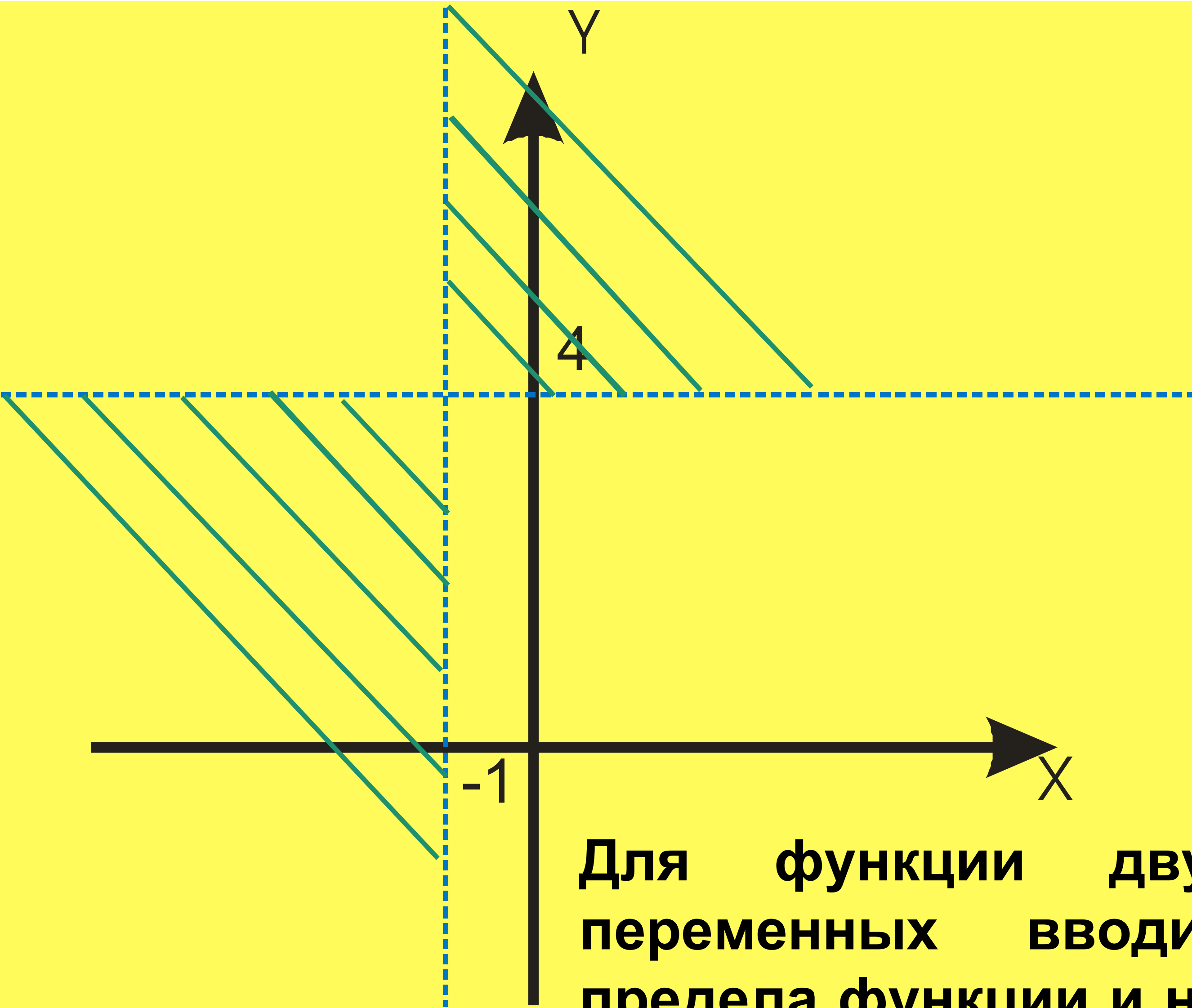
$$z = \ln(1 + x)\cdot(y - 4).$$

Решение

$$(1 + x)(y - 4) > 0;$$

$$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ y - 4 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + x < 0, \\ y - 4 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ y > 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1, \\ y < 4. \end{cases}$$



Для функции двух и более переменных вводится понятие предела функции и непрерывности функции аналогично функции одной переменной.

Определение. Число *A*, называется пределом функции

$$u = f(P),$$

если для любой последовательности точек

$P_1, P_2, \ldots P_n$ из области D, сходящихся к точке P_0

соответствующая последовательность значений функции

$f(P_1), f(P_2), \ldots f(P_n)$ будет сходиться к числу *A*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

Пример: Вычислить предел $z = x^2 + xy + 2y^2;$ $P_0(1,1).$

Решение

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} z = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (x^2 + xy + 2y^2) = 4.$$

10.2 Непрерывность функции нескольких переменных

Для простоты будем рассматривать функцию двух переменных.

$$z = f(x, y),$$

Определение. **Функция** называется **непрерывной в точке** $P_0(x_0, y_0)$ если выполняются следующие условия:

1. **Функция должна быть определена в этой точке и в некоторой ее окрестности.**

2. **Функция должна иметь предел в точке** (x_0, y_0).

3. **Этот предел должен быть равен значению функции в этой точке, т.е.**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Если нарушается хотя бы одно условие, то говорят, что функция претерпевает разрыв.

Пример 1: **Пусть задана функция** $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

Функция терпит разрыв в точке *(0,0)*, т.к. она в ней неопределенна.

Пример 2: $f(x,y)=\begin{cases}3-x-y, & \text{если } x\neq 1, y\neq 1;\\ 4, & \text{если } x=1, y=1.\end{cases}$

Исследуем непрерывность функции в точке (1,1).

1. **Функция в точке (1,1) определена.**
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}(3-x-y)=1$

3. **Значение функции в точке** $f(1,1) = 4,$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x, y) = 1 \neq 4,$$

поэтому функция в точке претерпевает разрыв.

Пусть $$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Положим $$x = x_0 + \Delta x,$$ $$y = y_0 + \Delta y.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0$$

Определение. **Функция** $z = f(x, y)$ **непрерывна в точке** $P_0(x_0, y_0)$, **если бесконечно малым приращением аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции**

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

10.3 Частные производные

Пусть задана функция $z = f(x, y).$

Дадим независимой переменной *x* приращение $x + \Delta x,$ а переменную *y* будем оставлять неизменной.

В этом случае функция получит приращение по переменной x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично мы можем переменную x оставлять неизменной, а давать приращение по переменной y, в этом случае функция получит приращение по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Полное приращение функции можно записать в виде:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он

называется **частной производной функции по переменной x.**

Обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, z'_x.$

Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$,

то он называется **частной производной по переменной y:** $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, z'_y.$

Таким образом, вычисление частных производных сводится к вычислению производных функции одной переменной.

Пример: Найти частные производные функции

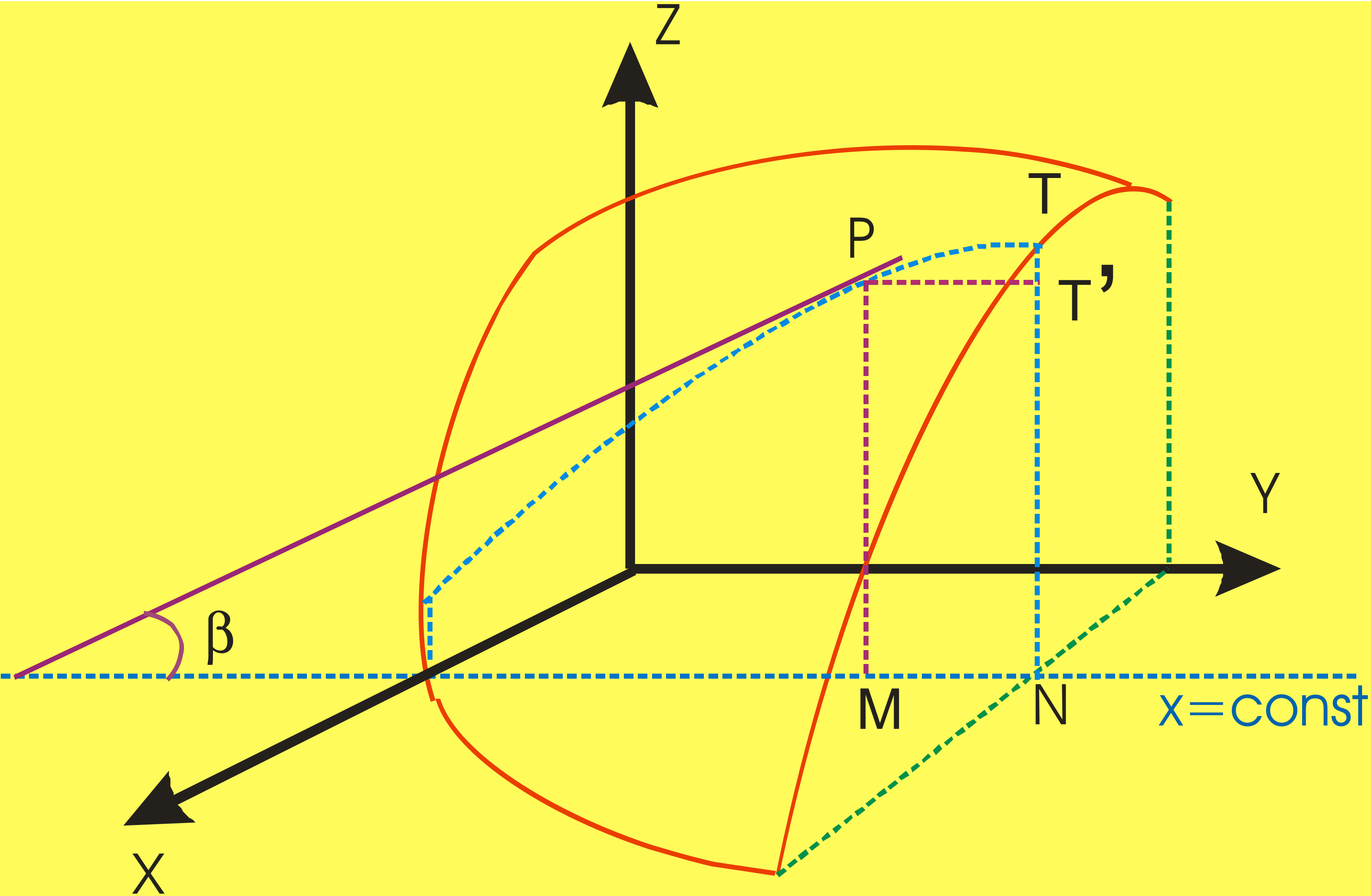
$$z = 2y + e^{x^2 - y} + 1.$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 - y} \cdot 2x, \qquad \frac{\partial z}{dy} = 2 + e^{x^2 - y} \cdot (-1).$

Рассмотрим геометрический смысл частных производных.

Функция $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность.

Проведем плоскость $x = const.$



В сечении этой плоскости с поверхностью получится линия *PT*.

. При данном *x* рассмотрим на плоскости *xoy* некоторую точку *M(x,y)*. Тогда на поверхности ей будет соответствовать точка *P(x,y,z)*.

Дадим координате *y* в точке *M* приращение $\Delta y,$

при этом *x* остается постоянным и точка *M* перейдет в точку *N.*

Поскольку переменная у, получила приращение $\Delta y,$

то функция при этом получит приращение по переменной у: $\Delta_y z = TT'$

Рассмотрим прямоугольный треугольник PTT'

$$\frac{TT'}{PT'} = tg T\widehat{P}T'.$$

Если мы $\Delta y \to 0,$

то секущая *PT* будет стремиться к касательной в точке *P*.

Перейдем теперь к пределу:

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = tg\beta}$$

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ **численно равна**

тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности

$z = f(x, y)$ **плоскостью** $\boxed{x = const}$

10.4 Полное приращение и полный дифференциал функции нескольких переменных

Для простоты возьмем функцию двух переменных

$$z = f(x, y).$$

Полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Чтобы получить выражение для полного дифференциала, к правой части выражения добавим и отнимем одно и тоже слагаемое:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) +$$

$$+ f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$$

Перегруппируем

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] +$$
$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]. \qquad (10.1)$$

Выражения можно рассматривать как разность двух значений функций одного переменного.
Следовательно, к каждой скобке можно применить теорему Лагранжа.

Согласно которой, если функция $y = f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a,b]$ **и дифференцируема на интервале** (a,b), **то найдется хотя бы одна точка** $c \in (a,b)$ **такая, что будет выполняться условие:**

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).}$$

К каждой скобке выражения (10.1) будем применять теорему Лагранжа:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = [\bar{x} \in (x, x+\Delta x)] =$$

$$= \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad (10.2)$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = [\bar{y} \in (y, y+\Delta y)] =$$

$$= \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad (10.3)$$

Подставим (10.2) и (10.3) в (10.1):

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad (10.4)$$

Поскольку частные производные непрерывны, то мы можем записать:

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \in (x, x+\Delta x) \\ \Delta x \to 0, \bar{x} \to x \end{bmatrix} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad (10.5)$$

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \begin{bmatrix} \bar{y} \in (y, y+\Delta y) \\ \Delta y \to 0, \bar{y} \to y \end{bmatrix} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad (10.6)$$

К выражению (10.5) и (10.6) можно применить **теорему о связи функции ее предела и бесконечно малой функции,** согласно которой если

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = A, \text{ то } f(x) = A + \alpha$$

где α - бесконечно малая функция $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$

Поэтому (10.5) и (10.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha_1, \qquad (10.7)$$

$$\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \alpha_2, \qquad (10.8)$$

α_1, α_2 - бесконечно малые функции.

Подставим (10.7), (10.8) в (10.4)

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y. \quad (10.9)$$

Два последних слагаемых представляют собой произведение двух бесконечно малых функций, а следовательно, два последних слагаемых будут бесконечно малыми более высокого порядка, чем первые два слагаемых.

Главная часть приращения функции, называется дифференциалом, поэтому дифференциал функции

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y \qquad (10.10)$$

Поскольку x и y это независимые переменные, то $\Delta x, \Delta y$ можно заменить на dx, dy и (10.10) примет вид:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot dy. \quad (10.11)$$

!

Если имеем функцию любого числа переменных

$$W = f(x, y, u, v, \ldots t),$$

$$dW = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial u} du + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (10.12)$$

Пример 1. **Найти полный дифференциал и полное приращение функции** $z = x \cdot y$ **в точке *(2,3)*, при** $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2.$

Решение.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

$$\Delta z = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.72,$$

Вычислим полный дифференциал функции

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy)'_x = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (xy)'_y = x,$$

$$dz = y \cdot dx + x \cdot dy = y\Delta x + x\Delta y =$$
$$= 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 0.7.$$

Пример 2. **Найти полный дифференциал функции**

$$u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z.$$

Решение.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_x \sin^2 z = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2\sin z(\sin z)'_z = e^{x^2+y^2} 2\sin z\cos z =$$

$$= e^{x^2+y^2} \sin 2z,$$

$$du = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 zdx + 2y\sin^2 zdy + \sin 2zdz).$$

10.5 Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Пусть функция $z = f(x, y)$

дифференцируема в точке *(x,y)*.

Найдем полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z,$$

Т.к. $\quad \Delta z \approx dz,$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Поскольку x и y это независимые переменные, то dx, dy **можно заменить на** $\Delta x, \Delta y$ **и формула примет вид**

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \quad (10.13)$$

Пример: **Вычислить приближенно:** $1.02^{3.01}$

Решение **Рассмотрим функцию**

$$z = x^y, \quad 1.02^{3.01} = (x+\Delta x)^{(y+\Delta y)}, \quad x = 1, \Delta x = 0.02,$$
$$y = 3, \Delta y = 0.01,$$

$$f(x,y)=x^{y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{y}\ln x,$$

Подставим в (10.13)

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \quad (10.13)$$

$$1.02^{3.01}=1^{3}+3\cdot 1^{3-1}\cdot 0.02+1^{3}\ln 1\cdot 0.01=1.06.$$

Полный дифференциал сложной функции

Пусть задана функция двух переменных в виде

$$z = f(u, \upsilon).$$

Причем u и υ **являются функциями независимых переменных *x* и *y*, т.е.** $u = \varphi(x, y), \quad \upsilon = \psi(x, y),$

Дадим *x* приращение $\Delta x,$ **а *y* будем оставлять неизменным, тогда функции** u и υ **получат приращение** $\Delta_x u, \ \Delta_x \upsilon,$

а функция *z* получит приращение $\Delta_x z$ **по переменной *x***

Учитывая (10.9) запишем:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot \Delta_x \upsilon + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x \upsilon,$$

Разделим левую и правую часть на Δx

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot \frac{\Delta_x \upsilon}{\Delta x} + \alpha_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2 \frac{\Delta_x \upsilon}{\Delta x}, \qquad (10.14)$$

Далее перейдем к пределу $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x \upsilon}{\Delta x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0} \alpha_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x\to 0} \alpha_2 = 0.$$

С учетом этого (10.14) примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \qquad (10.15)$$

Аналогично можно получить выражение для частной производной по переменной y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial y}. \qquad (10.16)$$

Если задана функция

$$z = f(u, \upsilon, l, s),$$

$$u = \varphi(x, y), \quad \upsilon = \psi(x, y),$$

$$l = \chi(x, y), \quad s = \eta(x, y),$$

то формулы принимают вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}, \qquad (10.17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}. \qquad (10.18)$$

Пусть функция $z=f(x,y,u,v),$

$$y=y(x),\ u=u(x),\ v=v(x).$$

Поскольку, *z* будет в конечном итоге зависеть от *x*, то мы можем записать

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

т.к. y, u, υ **- функции только одного *x*, то частные производные обращаются в обыкновенные, кроме того**

$\frac{\partial x}{\partial x}=1,$ **поэтому**

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dx}. \quad (10.19)$$

Пример: **Найти частные производные функции:**

$$z=x^2+\sqrt{y}, y=\sin x.$$

Решение.

Согласно выражению (10.19) можно записать:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{y}} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

10.6 Производная от функции, заданной неявно.

Теорема: **Пусть непрерывная функция** $y = y(x)$ **задается неявно уравнением** $F(x, y) = 0,$ **где** $F(x, y),\ F'_x(x, y),\ F'_y(x, y)$ **- непрерывные функции, причем** $F'_y(x, y) \neq 0.$

Тогда функция $y(x)$ **имеет производную**

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (10.20)$$

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0.$$

Тогда

$$z'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad z'_y = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \quad (10.21)$$

Пример. $$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Решение.

$$F(x,y,z)=e^{z}+x^{2}y+z+5$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x^{2},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=e^{z}+1$$

$$z'_{x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xy}{e^{z}+1},$$

$$z'_{y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x^{2}}{e^{z}+1}.$$

10.7 Частные производные различных порядков

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

Частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

в свою очередь являются функциями *x* и *y*, поэтому от них можно находить производную. Вторые частные производные обозначаются так

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Такая запись обозначает, что вначале берут частные производные по x, а потом по y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Производные второго порядка можно снова продифференцировать, как по переменной *x*, так и по переменной *y*. Тогда мы получим частные производные третьего порядка. Частная производная n-порядка, есть первая производная от производной (n-1)-порядка.

Теорема: **Если функция** $z = f(x, y)$

и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$

определены и непрерывны в точке $M(x, y)$

и в ее окрестности, то в этой точке

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Пример: **Вычислить частные производные второго порядка от функции**

$$f(x, y) = x^2 y + y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Получили, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

10.8 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ **имеет непрерывные частные производные второго порядка.**

Дифференциал первого порядка вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Дифференциал второго порядка определяется как

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \quad (10.22)$$

Выражение (10.22) символически можно записать в виде

$$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z.$$

Аналогично можно записать, что для дифференциала третьего порядка справедливо выражение

$$d^3z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^3 z$$

Пример:

Найти дифференциал второго порядка от функции

$$z = x^3 y^2.$$

Решение.

Для решения воспользуемся выражением (10.22).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y,$$

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (10.22)}$$

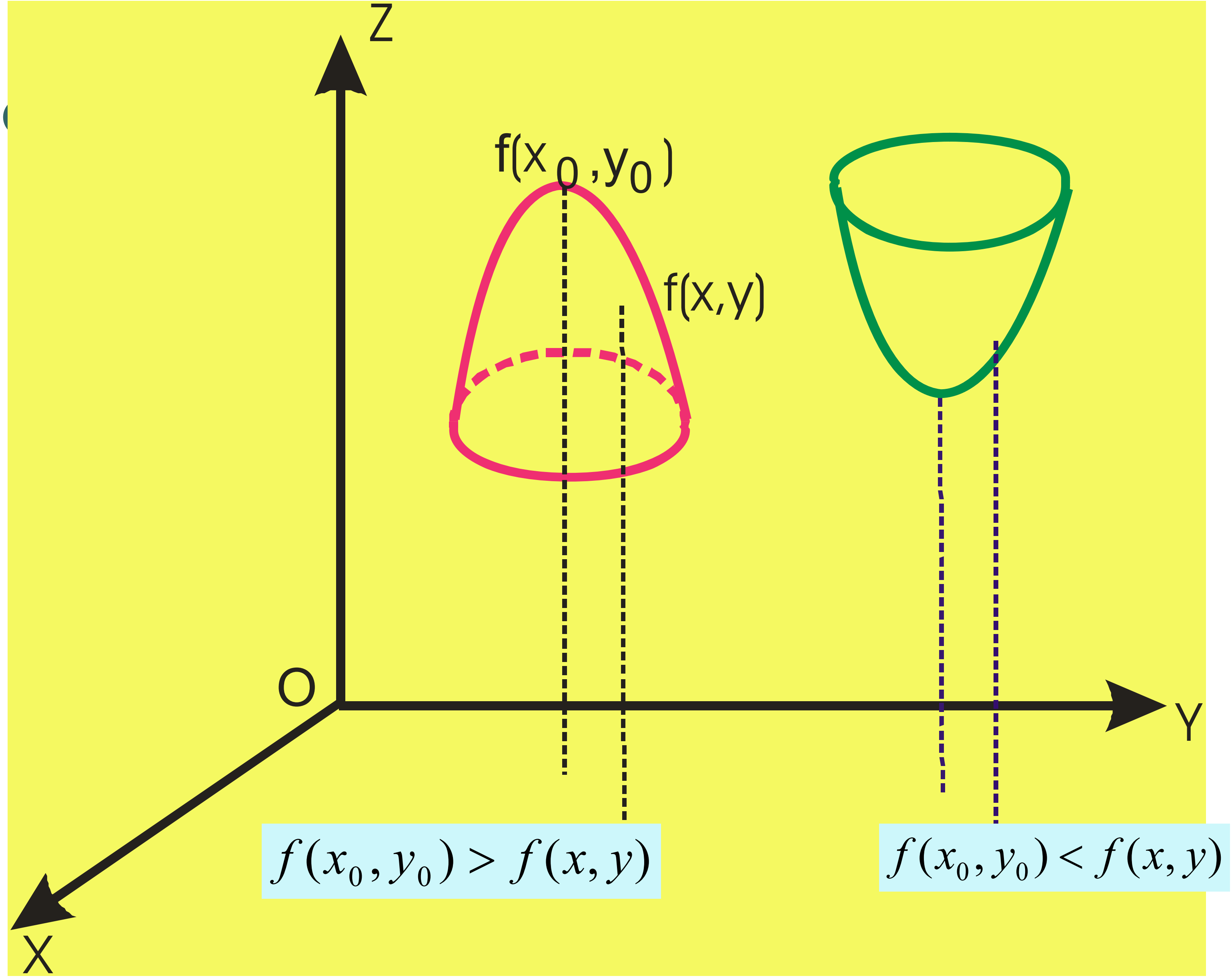
$$d^2 z = 6xy^2 dx^2 + 12x^2 y dx dy + 2x^3 dy^2$$

10.9 Максимум и минимум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области ***D*** и точка $M_0(x_0, y_0) \in D.$

Определение 1. **Точка** $(x_0, y_0),$ **называется** **точкой максимума** **функции** $z = f(x, y),$ **если существует такая δ-окрестность точки, что для каждой точки** (x, y) **из этой окрестности отличной от** $(x_0, y_0),$ **выполняется неравенство**

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$


Z
$f(x_0, y_0)$
$f(x,y)$
O
Y
X
$f(x_0, y_0) > f(x, y)$
$f(x_0, y_0) < f(x, y)$

Определение 2. Точка (x_0, y_0), называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$,

если существует такая δ-окрестность точки, что для каждой точки (x, y) из этой окрестности отличной от (x_0, y_0), выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y).$$

Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами.**

Теорема 1 (необходимое условие экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке (x_0, y_0), то каждая частная производная первого порядка от *z* в этой точке или обращается в ноль, или не существует.

Доказательство.

Дадим переменной y определенное значение $y = y_0$. Тогда функция $z = f(x, y_0)$ будет являться функцией одной переменной и тогда первая производная в точке x_0 должна быть либо равна нулю, либо не существует, т.е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0$$

или не существует.

Точки в которых $\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$ обращаются в нуль или не существуют, называются **критическими точками** функции $z = f(x, y).$

Теорема 2 (достаточное условие экстремума).

Пусть в критической точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Вычислим в точке (x_0, y_0) значения:

$$A = f''_{xx}(x_0 y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0 y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0 y_0).$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Тогда:

1. Если $\Delta > 0,$ то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет **максимум,** если $A < 0,$ **минимум,** если $A > 0.$

2. Если $\Delta < 0,$ то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

3. Если $\Delta = 0,$ то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, а может и не быть. Нужны дополнительные исследования.

Пример.

Найти экстремум функции:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Решение.

Находим критические точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2x - y + 3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -x + 2y - 2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

и сложим уравнения

$$3y - 1 = 0, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Подставим значение *y* во второе уравнение системы

$$-x+\frac{2}{3}-2=0,\quad x=-\frac{4}{3}.$$

Получим критическую точку $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right).$

Вычислим $$z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(z'_x)=\frac{\partial}{\partial x}(2x-y+3)=2,$$

$$A=z''_{xx}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)=2,\quad z''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(z'_x)=\frac{\partial}{\partial y}(2x-y+3)=-1$$

$$B=z''_{xy}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)=-1,\quad z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(z'_y)=\frac{\partial}{\partial y}(-x+2y-2)=2$$

$$C = z''_{yy}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right) = 2.$$

Так как

$$\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$ **и** $$A > 0,$$

следовательно в точке $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ **будет минимум.**

Т.к. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1,$ **то**

$$z_{\min} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\frac{1}{3} + 1 = -\frac{4}{3}.$$

10.10 Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ **определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области** ***D*****.**

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции надо:

1. Найти все критические точки принадлежащие области D и вычислить значение функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшие значение функции на границах области;

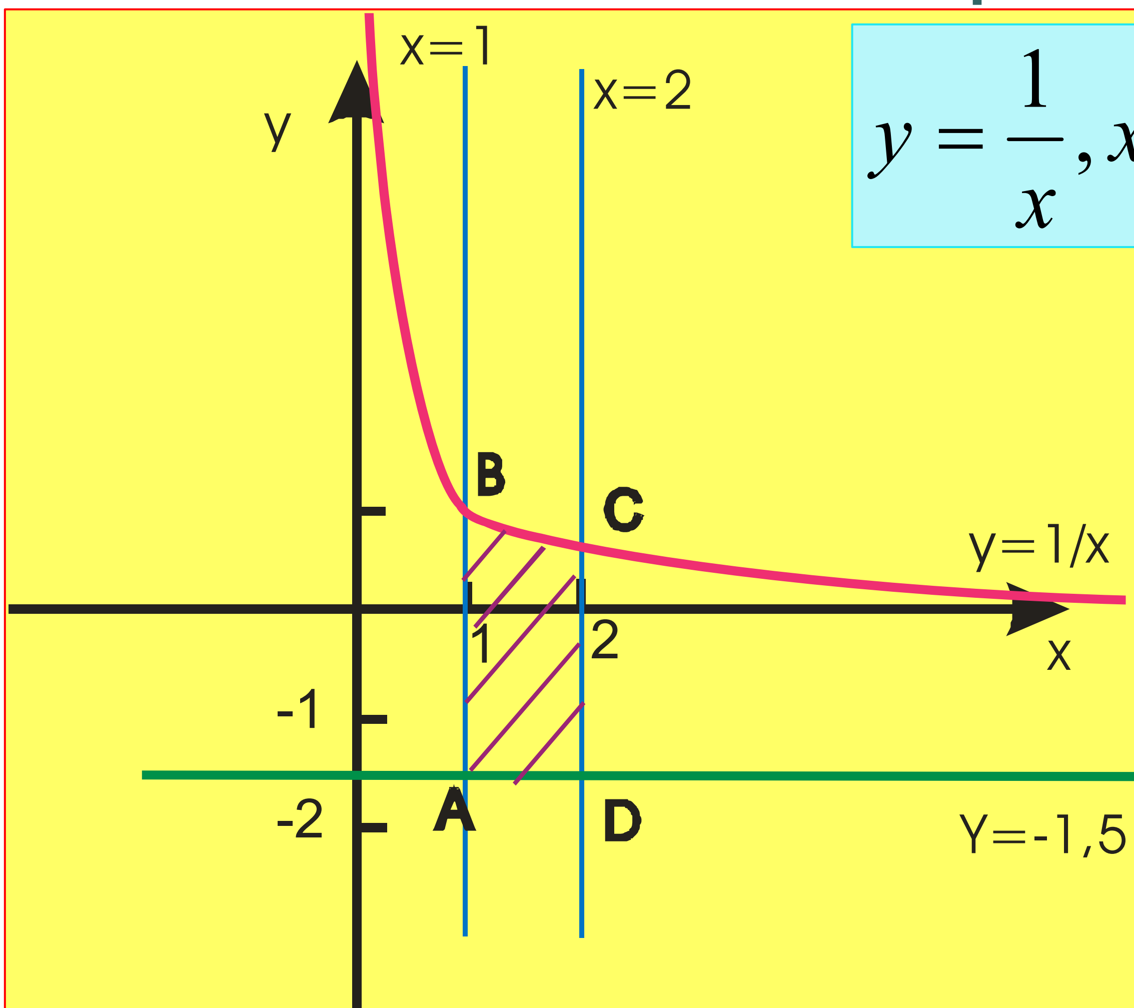
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$z = x^2 y + xy^2 + xy,$$

в замкнутой области ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = -\frac{3}{2}.$$



Решение.

Строим область D

1. Находим критические точки:

$$z = x^2 y + xy^2 + xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2xy + y^2 + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_y = x^2 + 2xy + x.$$

Приравняем частные производные к нулю и получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 + y = 0 \\ x^2 + 2xy + x = 0. \end{cases}$$

Решаем ее

$$\begin{cases} y(2x+y+1)=0 \\ x(x+2y+1)=0, \end{cases}$$

$x=0, y=0,$ точка $(0,0)\notin D,$

$y=0,$ $\mathrm{x}+2\mathrm{y}+1=0,$ $x=-1,$

точка $(-1,0)\notin D,$

$x=0,$ $2x+y+1=0,$ $y=-1,$

точка $(0,-1)\notin D.$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y+1=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+1=0, \\ -2x-4y-2=0, \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -2

$$-3y-1=0, \quad y=-\frac{1}{3},$$

$$x+2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0, \quad x=-{}^{1}\!/_{3},$$

$$\text{точка } \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\notin D.$$

2. Исследуем функцию *z* на границе области, состоящей из участков: *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

На участке *AB*:

$$x=1, y\in[-{}^{3}\!/_{2},1],$$

$$z=x^2y+xy^2+xy,$$

$$z=y+y^2+y=y^2+2y,$$

Находим критические точки: $z'_y=2y+2,$

$$2y+2=0,$$

$$y=-1\in[-{}^{3}\!/_{2},1].$$

Вычислим значение функции в точке $(1,-1)$

и на концах отрезка *AB*

$$z = y^2 + 2y,$$

$$z(1,-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1,$$

$$z(A) = z(1,-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

$$z(B) = z(1,1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

На участке *BC*:

$$y = \frac{1}{x},$$

по условию

$$z = x^2 y + xy^2 + xy,$$

поэтому

$$z = x + \frac{1}{x} + 1, \quad x \in [1,2],$$

$$z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 - 1 = 0, \qquad x = 1 \in [1,2],$$

$$x = -1 \notin [1,2].$$

Вычислим значение функции на концах отрезка *BC*.

Т.к. $z = x + \dfrac{1}{x} + 1,$ **то**

$$B(1,1), \qquad z(1,1) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Точка $C\left(2, \dfrac{1}{2}\right),$ **поэтому**

$$z\left(2, \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{2}$$

На участке *CD:* $x = 2, \quad y \in [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}].$

По условию $z = x^2 y + xy^2 + xy,$ **поэтому**

$$z = 4y + 2y^2 + 2y = 6y + 2y^2$$

Находим критические точки $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6 + 4y, \quad 6 + 4y = 0,$

$$y = -\frac{3}{2} \in [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

Вычислим значение функции в точке $\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$

и на концах отрезка *CD.*

$$z\left(2,-\frac{3}{2}\right)=6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-9+\frac{9}{2}=-\frac{9}{2},$$

$D\left(2,-\frac{3}{2}\right),$ **поэтому ничего нового не получим.**

На участке *DA*: $y=-{}^{3}\!/_{2},\quad x\in[1,2].$

По условию $z=x^2y+xy^2+xy,$ **поэтому**

$$z=-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{2}x,\qquad z'_x=-3x+\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=-3x+\frac{3}{4},$$

$$-3x+\frac{3}{4}=0,\qquad x=\frac{1}{4}\notin[1,2],$$

3. Сравнивая полученные значения имеем

$$z_{наиб} = z\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} = 3.5,$$

$$z_{наим} = z\left(2, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} = -4.5.$$