ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЗАДАЧИ.

Оглавление (по темам)

1. Формула классического определения вероятн

1) Выбираем наудачу одно число из 11,12, …, 20. Найти вероятность того, что оно кратно 3. **{Отв:** 0,3 **}**

2) Из чисел 1, 2, …, 8 наудачу выбираем одно. Найти вероятность того, что оно кратно 3. **{Отв:** 0,25 **}**

3) Наудачу называем число x из 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что оно чётно. **{Отв:** 0,4 **}**

4) Из чисел 1, 2, … , 99, 100 наудачу называем одно число. Найти вероятность того, что это число чётное. **{Отв:** 0,5 **}**

5) Забыты две последние цифры номера телефона, которые набираем наудачу. Найти вероятность того, что номер телефона набран правильно. **{Отв:** 0,01 **}**

6) Наудачу называем одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что это число удовлетворяет уравнению $x^2 - 6x + 8 = 0$. **{Отв:** 0,4 **}**

7) Лица А,Б,В наудачу поставлены в очередь. Найти вероятность того, что А и Б стоят рядом.**{Отв:** 2/3**}**

8) Три цифры 1, 2, 3 наудачу располагаем в ряд. Найти вер. того, что цифра 1 стоит первой. **{Отв:** 2/3 **}**

9) Кубик, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешены. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: *а*) одну; б) две; *в*) три. {Отв: 0,384; 0,096; 0,008 }

10) Выбрасываем 2 игральных кости. Найти вероятности событий:

А − сумма выпавших очков равна 8 В − сумма выпавших очков равна 9

С − сумма очков равна 4 D − сумма очков кратна числу 3

Е − произведение очков равно 6 {Отв: 5/36; 1/9; 1/12; 11/36; 1/9}

2. Элементы комбинаторики

<u>задачи на перестановки</u>

1) Сколько всех различных чисел можно получить, если переставлять местами:

а) 4 карточки, обозначенных 1,2,3,4; (Отв: 4! = 24)

б) 6 карточек, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 ? (Отв 6! = 720)

2) Сколько всех различных перестановок букв можно сделать в словах: КНИГА, САМОЛЁТ?

(Отв $4! = 120$, $7! = 5040$)

3) Скольками различными способами могут сесть 6 человек за круглым столом? (Отв: $7! = 5720$)

задачи на размещения

4) Вычислить A_6^2, A_5^3, A_{10}^4 (Отв 30; 60; 5040)

5) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:

а) 3-значных с различными цифрами; (Отв $A_7^3 = 210$)

б) 4-значных с различными цифрами; (Отв $A_7^3 = 840$)

6) Скольками различными способами можно выбрать 3 человека из 5 кандидатов на 3 <u>различные</u> должности? (Отв: $A_5^3 = 60$)

7) На железнодорожной станции имеется 6 путей.

Скольками способами можно расставить на них 4 состава? (Отв $A_6^4 = 360$)

задачи на сочетания

8) Вычислить C_6^2, C_5^3, C_{10}^4 (Отв 15; 10; 210)

9) Скольками способами можно выбрать три детали из коробки, содержащей 10 деталей?

(Отв: $C_{10}^3 = 120$)

10) Скольками различными способами можно выбрать 3 человека из 5 кандидатов на 3 <u>одинаковые</u> должности? (Отв: $C_5^3 = 10$)

задачи на правило произведения (основное правило комбинаторики)

11) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6:

а) любых 2-значных; (Ответ: $6 \cdot 6 = 36$)

б) 3-значных, составленных из нечётных цифр; (Ответ: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$)

в) 3-значных чётных; (Ответ: $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$)

г) любых 4-значных; (Ответ: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$)

д) 4-значных нечётных; (Ответ: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$)

12) Составляем все различные перестановки из 4 карточек с буквами А, А, М, М.

Сколько раз получим слово МАМА ? (Ответ: $2! \cdot 2! = 4$)

13) Составляем все различные перестановки из 6 карточек с буквами К, Л, М , О, О, О.

Сколько раз получим слово МОЛОКО ? (Ответ: $1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! = 6$)

14) Составляем все различные перестановки из 6 карточек с буквами А, А, Б, Н, Н.

Сколько раз получим слово БАНАН ? (Ответ: $2!\cdot 1!\cdot 2! \ = 4$)

15) В ящике 10 шаров, из которых 6 белых и 4 зеленых. Сколькими способами можно извлечь два шара, так чтобы они оказались разного цвета? (Ответ: $6 \cdot 4 = 24$)

задачи разные

16) Вычислить: а) $\left(C_6^2 \cdot A_4^1 + P_5\right)/P_3$. { $=30$ }

б) C_8^5 . { $=56$ } в) $C_5^3 + A_6^2$. { $=40$ } г) $\left(C_6^2 \cdot A_4^1 + P_5\right)/P_3$. { $=30$ }

17) 25 выпускников школы обменялись фотографиями. Сколько всех фото было сделано?

{ Отв $A_{25}^2 = 24 \cdot 25 = 600$ }

18) На железной дороге 25 станций. Сколько нужно различных билетов для обслуживания такой дороги? { Отв $A_{25}^2 = 24 \cdot 25 = 600$ }

19) Сколько всех различных словарей нужно издать для перевода с любого на любой из пяти различных языков (напр, русс, англ, франц, нем, итал ?) { Отв $A_5^2 = 20$ }

20) 8 шахматистов сыграли друг с другом по одной партии. Сколько всех партий сыграно?{ $C_8^2 = 28$ }

21) Для разгрузки товаров требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке? (Отв $C_{20}^5 = 15504$)

22) Сколько всех 3-значных чисел с возрастающими цифрами ? { Отв $C_9^3 = 84$ }

23) При встрече 16 игроков футбольной команды обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (Отв $C_{16}^2 = 120$)

24) Сколькими способами можно разбить на две равные группы:

а) группу из 6 человек для (Отв $C_6^3 = 20$) *б*) группу из 8 человек для (Отв $C_8^4 = 70$)

25) В ящике 10 шаров, из которых 5 зеленых, 3 голубых и 2 красных. Сколькими способами можно извлечь три шара, так чтобы они оказались разного цвета? (Отв: $5 \cdot 3 \cdot 2 = 36$)

26) Составляем все различные перестановки из 7 карточек с буквами К, К, Л, Л , О, О, О.

Сколько раз получим слово КОЛОКОЛ ? { Отв $2!\cdot 2!\cdot 3! \ = 24$ }

27) Составляем все различные перестановки из 10 карточек с буквами А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т.

Сколько раз получим слово М А Т Е М А Т И К А? { $3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2! = 24$ }

28) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:

а) любых 4-значных; { Отв $7^4 = 2401$ } б) 3-значных чётных; { Отв $7^2 \cdot 3 = 147$ }

задачи на классическую вероятность

29) Четыре карточки обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. Наудачу извлекаем две карточки и располагаем в ряд. Найти вероятность того, что получим число 31. { Отв 1/12 }

30) Четыре книги под номерами 1, 2, 3, 4 наудачу поставлены в ряд на полку.

Найти вероятности событий: А − книга с номером 1 стоит последней; { Отв 0,25 }

В − книги с номерами 3 и 4 стоят рядом; { Отв 0,5 }

31) Пять карточек, обозначенных буквами Л, О, С, Т, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получится слово СТОЛ. { Отв 1/24 }

32) Четыре карточки, обозначенных буквами А, А, М, М, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово МАМА. { Отв 1/6 }

33) Семь карточек, обозначенных буквами К, К, Л, Л , О, О, О, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово КОЛОКОЛ. { Отв 2!· 2!· 3!· / 7! = 1/ 210 }

34) Имеется p шаров, из которых p_1 − белых, p_2 − синих.

Извлекаем q шаров. Найти вероятность того, что среди этих q имеется q_1 белых и q_2 синих.

$$\boxed{\begin{array}{l} p = p_1 + p_2 \\ \underline{q = q_1 + q_2} \\ m = C_{p_1}^{q_1} \cdot C_{p_2}^{q_2} \\ n = C_p^q \end{array} \quad \frac{C_{p_1}^{q_1} \cdot C_{p_2}^{q_2}}{C_p^q} = P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{C_{p_1}^{q_1} \cdot C_{p_2}^{q_2}}{C_p^q}} \qquad \textbf{(5)}$$

35) В ящике 7 шаров, из которых 4 белых и 3 синих. Наудачу извлекаем 4 шара. Найти вероятность того, что ровно 2 из этих шаров окажутся белыми. { Отв 18/35 }

36) В ящике 5 шаров, из которых 3 белых и 2 синих. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что оба эти шара окажутся белыми. { Отв 0,3 }

3. Геометрическая вероятность

1. Наудачу называем число x, принадлежащее отрезку [2; 12]. Найти вероятность того, что оно удовлетворяет неравенству $x \geq 8$. (Отв: 0,4)

2. На отрезке [−3;10] на удачу ставим точку x. Найти вероятность того, что она удовлетворяет условию $|x| \leq 4$. { Отв 7/13 }

3. Наудачу ставим точку на [1; 9]. Вероятность того, что она попадёт на отрезок [2;b] равна 0,25. Найти b. (Отв: 4)

4. В круге радиуса $R_1 = 4$ расположен круг радиуса $R_2 = 2$. На большой круг наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый круг. (Отв: 0,25)

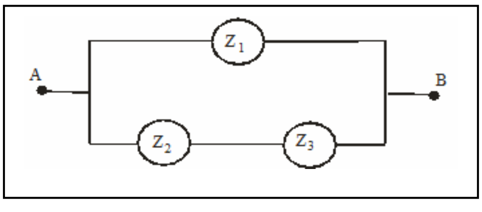
5. Даны координаты вершин треугольника АВС: A(2;1), B(−2;−1), C(2;−1). Ставим точку наудачу в треугольник АВС. Найти вероятность того, что точка окажется в первой четверти. (Ответ: 0,25)

6. В квадрат вписан круг. На квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг. { Отв $\pi/4 \approx 0{,}79$ }

7. На куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в пирамиду $BCDC_1$. { Отв 1/6 }

4. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения событий

1. События A и B несовместны, P(A) = 0,4, P(B) = 0,3. Вычислить P(A+B). (Отв: 0,7)
2. События A и B независимы, P(A) = 0,6, P(B) = 0,7. Вычислить P(AB). (Отв: 0,42)
3. События A и B независимы, P(A) = 0,7. Вероятность совместного появления событий P(AB) = 0,35. Найти вероятность события B. (Отв: 0,5)
4. Пусть заданы вероятности событий A и B: P(A) = 0,4, P(B) = 0,6 и вероятность совместного появления событий P(AB) = 0,3. Найти вероятность появления хотя бы одного события, т.е. P(A+B). (Отв: 0,7)
5. Пусть задана вероятность события A: P(A) = 0,8. Вероятность совместного появления событий P(AB) = 0,4. Найти условную вероятность $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$. (Отв: 0,5)
6. Из 1, 2, 3, 4, 5, 6 наудачу выбираем цифру a, из 7, 8, 9 − цифру b. Найти вероятность того, что $ab = 42$. (Отв: 1/18)
7. В ящике 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что один из них окажется белым, а другой – чёрным. (Отв: 0,6)
8. В первом ящике находятся 2 белых шара и 5 синих, во втором – 4 белых и 2 синих. Из каждого ящика извлекаем по одному шару. Найти вероятность того, что оба выбранных шара будут синие. (Отв: 5/21)
9. В первом ящике находится 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных, а во втором 4 шара: 1 белый и 3 чёрных. Из каждого ящика наудачу извлекаем по одному шару. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них чёрный; в) оба шара одного цвета. (Отв: а) 0,15; б) 0,85; в) 0,45)
10. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,91, а для второго – 0,89. Стрелки сделали по одному выстрелу независимо друг от друга. Какова вероятность, что в цель попадет хотя бы один стрелок? (Отв: 0,99)
11. Участок электрической цепи AB состоит из элементов, указанных на схеме.



Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Элементы z_1, z_2, z_3, в течение месяца независимо друг от друга выходят из строя с вероятностями $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}05$. Определить вероятность безотказной работы схемы (событие A) в течение месяца. (Отв: 0,99)

5 Формула Бернулли

1. Выбрасываем 5 монет. Найти вероятность того, что ровно 2 раза выпадет герб. { Отв. 5/16 }
2. Бросаем 5 раз игральную кость. Найти вероятность того, что ровно 2 раза выпадет номер, который делится на 3. {Отв.4/27 }
3. Выбрасываем 3 игральных кости. Найти вероятность того, что выпадут все нечётные номера. {Отв.1/8 }
4. Имеется 6 лотерейных билетов, вероятность выйгрыша по каждому из которых равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что ровно три билета выйграют. { Отв. 0,08192 }
5. Наудачу выбираем 4 человека. Найти вероятность того, что ровно 2 из них родились во вторник. { Отв. $216/2401 \approx 0,09$ }
6. На отезке [0; 9] наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что ровно 2 из них попадут на отезок [0; 3]. { Отв. 8/27 }
7. На отрезке [−6; 8] наудачу отмечаем 7 чисел. Найти вероятность того, что ровно 4 из них удовлетворяют неравенству $x^2 - 9 \le 0$. { Отв. $(35 \cdot 3^4 \cdot 4^3) / 7^7 \approx 0,22$ }
8. На квадрат ABCD наудачу ставим 6 точек. Найти вероятность того, что что ровно 3 из них попадут на Δ ABC. { Отв. 0,3125 }
9. На квадрат со сторой 4 наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что все они окажутся удаленными от сторон квадрата не менее, чем на 1. { Отв. $(4/16)^4 = 1/256$ }
10. Имеется 3 лотерейных билета, вероятность выйгрыша по каждому из которых равна $p = 0,3$. Найти вероятность того, что хотя бы 2 билета выйграют. { Отв. 0,216 }
11. Изделия производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди четырёх взятых наугад деталей будет хотя бы две бракованных. { Отв. ≈ 0,014 }
12. В водоёме 80 % всех рыб составляют карпы. Найти вероятность того, что из 5-ти выловленных рыб окажется хотя бы один карп. { Отв. 0,99968 }
13. В равносторонний треугольник вписан круг, а в этот круг вписан равносторонний треугольник. На большой треугольник наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что хотя бы 2 из них попадут в малый треугольник. { Отв. ≈ 0,262 }

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. Пусть H_1, H_2 – полная группа событий.

   $P(H_1) = 0{,}4$; $P(H_2) = 0{,}6$; $P_{H_1}(A) = 0{,}8$; $P_{H_2}(A) = 0{,}7$. Вычислить P(A). { Отв. 0,74 }
2. Три станка штампуют детали. Первый станок производит 25 %, второй 30 %, третий 45 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2 %, 2,5 %, 4 %. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной. (Отв: 0,0305)

3. В одной группе 10 студентов, из которых 2 отличника, во второй – 12 студентов, из которых 3 отличника. Из наудачу выбранной группы наудачу выбран студент. Найти вероятность того, что он отличник. (Отв: 0,225)

3. В цехе работают 4 мастера и 8 учеников. При изготовлении изделия мастер допускает брак с вероятностью 0,04; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что его изготовил: а) мастер; б) ученик? (Отв: а) 0,12; б) 0,88)

3. Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Наугад выбранный стрелок выстрелил в мишень. Мишень поражена. Найти вероятность того, что стрелял третий стрелок. (Отв: 0,38)

7. Дискретные случайные величины

1. Найти числовые характеристики M(X), D(X), σ(X) дискретной случайной величины X заданной законом распределения:

а)

X	-2	1	3
p	0,2	0,7	0,1

б)

X	-4	2	5
p	0,3	0,5	p_3

(Отв: а) M(X) = 0,6, D(X) = 2,04, σ(X) ≈ 1,43; б) M(X) = 0,8, D(X) = 11,16, σ(X) ≈ 3,34)

2. Имеется две лотереи, вероятность выйгрыша по каждой из которых равна p = 0,2. Пусть X – число выйрышных лотерей из этих двух. Построить закон распределения случайной величины X, найти M(X), D(X, σ(X). (Отв: M(X) = 0,4, D(X) = 0,32, σ(X) ≈ 0.57)

3. Стрелок делает 2 выстрела по мишени. Пусть X − число попаданий. Известно, что M(X) = 0,9. Найти D(X). (Отв: D(X) = 0,495)