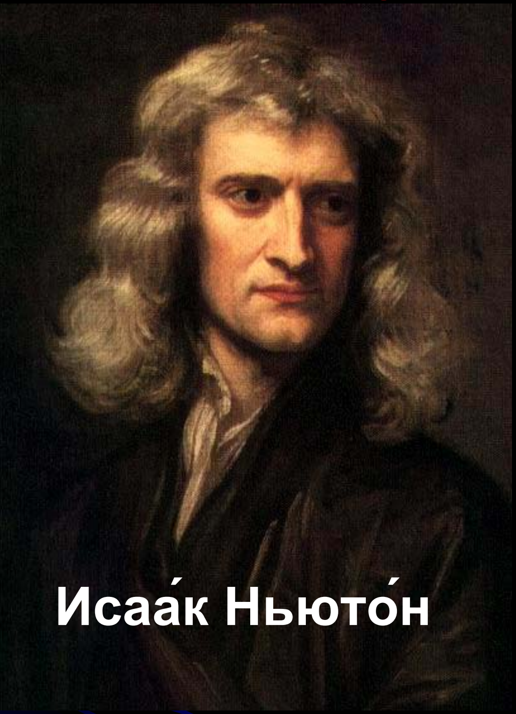
Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»



Раздел 2
Математический анализ

Тема1 «Функции и пределы.»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

1.1 Определение. Способы задания и свойства числовой последовательности

Под числовой последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

понимается функция $$x_n = f(n)$$

заданная на множестве натуральных чисел.

Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$

или $x_n, n \in N.$

Число x_1 **называется первым членом последовательности,**

x_2 **-вторым,** x_n **-общим или n-ым членом последовательности.**

Чаще всего последовательность задается **формулой его общего члена.**

Например:

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \ldots \qquad (1.1)$$

$$x_n = (-1)^n; \quad x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \ldots \qquad (1.2)$$

$$x_n = n \sin\frac{\pi n}{2}, \quad x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -3, \ldots. \qquad (1.3)$$

Закон образования числовых последовательностей может состоять в задании **нескольких первых членов последовательности и рекуррентной формулы**, с помощью которой каждый следующий член определяется через предыдущие.

Пример: $x_1 = \sqrt{2},$ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

Рекурентная формула позволяет по $x_1 = \sqrt{2}$ найти

$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},$ по x_2 найти $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ и т.д.

Последовательность $\{x_n\}$

называется ограниченной, если существует такое число $M > 0,$

что для любого $n \in N$ **выполняется неравенство**

$$|x_n| \leq M$$

В противном случае числовая последовательность называется неограниченной.

Числовая последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ **ограничена, т.к.** $\left|\frac{1}{n}\right| \le 1,$

последовательность $x_n = (-1)^n$ **ограничена, т.к.**

$$\left|(-1)^n\right| \le 1 \quad \textbf{при всех} \quad n = 1,2...$$

Числовая последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число *M*, что любой член последовательности не превышает его, т.е. для которого

$$x_n \le M$$ при всех *n=1,2,…*

Числовая последовательность называется ограниченной снизу, если существует такое число *M*, для которого

$$x_n \ge M$$ **при всех *n=1,2,…***

Пример: Числовая последовательность $x_n = n^2,$

ограничена снизу, но неограниченна сверху.

Важными примерами числовой последовательности являются

арифметическая прогрессия

$$x_n = a + (n-1)d,$$

$$x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d, x_4 = a + 3d, \ldots.$$

геометрическая прогрессия

$$x_n = aq^{n-1}$$

$$x_1 = a, x_2 = aq, x_3 = aq^2, \ldots$$

Числовая последовательность **монотонно возрастает,** если

$$x_n \le x_{n+1}$$

и **монотонно убывает,** если

$$x_n \ge x_{n+1}$$

при всех *n=1,2,…*

Если указанные неравенства для членов числовой последовательности выполняются в строгом смысле, то числовая последовательность называется строго монотонно возрастающей и строго монотонно убывающей.

Числовая последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$

строго монотонно убывает, т.к. $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$

Числовые последовательности (1.2), (1.3) **немонотонные.**

1.2 Предел числовой последовательности.

Определение 1. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер *N*, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1.4)$$

В этом случае пишут

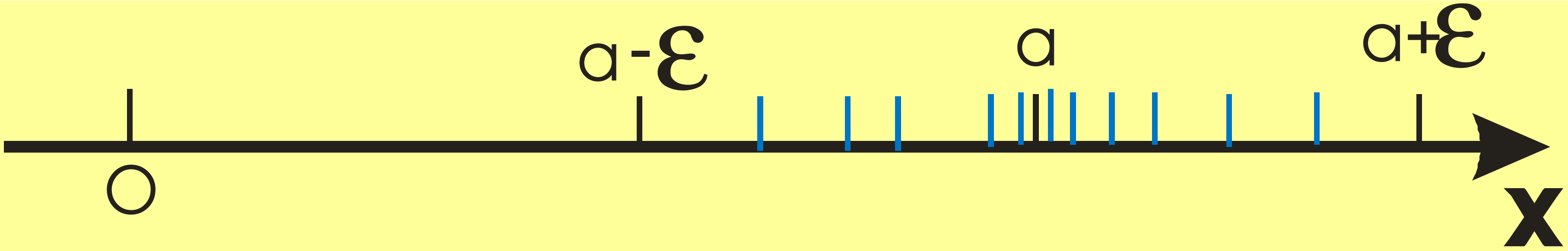
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и говорят, что последовательность имеет предел равный a .

Неравенство (1.4) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

которые показывают, что элемент x_n находится в ε окрестности точки *a*.



Определение 2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой **ε** окрестности точки a найдется натуральное число ***N***, что все значения x_n для которых

$$n > N$$

попадут в ε окрестность точки a.

Чем меньше ε, тем больше число *N*, но в любом случае внутри ε-окрестности точки *a* находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное число.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, последовательность у которой нет предела, - расходящейся.

Пример:

Последовательность $\left(3+\frac{1}{n}\right)$ **сходится и имеет предел** a**=*3*.**

Действительно, каково бы ни было число $\varepsilon > 0,$

найдется такое натуральное число *N*, что

$$|x_n - a| = \left|3+\frac{1}{n}-3\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \textbf{для} \quad n > N$$

Неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполнено для всех $n > N.$

Из неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon$ следует, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$

для всех $n > N.$ Это будет выполнятся, если $\boxed{N > \frac{1}{\varepsilon}.}$

Если $\varepsilon_1 = 0.1, \text{ то } N_1 = 10,$

если $\varepsilon_2 = 0.01, \text{ то } N_2 = 100$ и т.д.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c = const),}$$

поскольку в данном случае $x_n = c, a = c, |x_n - a| = 0 < \varepsilon$

для любого ε>0.

1.3 Предел монотонной ограниченной последовательности.

Теорема: **Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.**

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1,2,....$

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}b^n$$

В нашем случае $a=1, b=\dfrac{1}{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\frac{1}{n} \qquad (1.5)$$

Из равенства (1.5) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. При увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots$$ возрастают.

Поэтому последовательность $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастающая, при этом $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$

Покажем что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части на единицу

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа *3,4,5,…*стоящие в знаменателях дробей числом *2*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Сумму в скобках найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$a=1, q=\frac{1}{2}$$

Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии

$$S=\frac{a-aq^{n}}{1-q}=\frac{1-1\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{n}}\right)<2$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+2=3$$

Итак последовательность ограничена, при этом для любого

$n\in N$ выполняются неравенства

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$$

Итак, последовательность ограничена и монотонно возрастает, поэтому в силу теоремы она имеет предел. Этот предел называют числом e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Число $$e\approx 2.7182818...$$

Логарифмы с основанием e называют *натуральными логарифмами* и обозначаются $$\ln,\ \text{т.е.}\ \log_{\mathrm{e}} x=\ln x$$

Установим зависимость между десятичными и натуральными логарифмами.

Если $y = \lg x, \quad \text{то} \;\; x = 10^{y}.$

Логарифмируя левую и правую часть равенства $x = 10^{y}$

по основанию е, получаем $\ln x = y \ln 10,$ **откуда**

$$y = \frac{1}{\ln 10} \ln x.$$

Следовательно, $\lg x = M \ln x,$

где $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434294$

Число *M* называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным.

Натуральные логарифмы через десятичные выражаются формулой

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \qquad \frac{1}{M} = 2.302585.$$

1.4 Понятие предела функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ **определена в некоторой окрестности точки** x_0.

Определение 1. **(На «языке** $\varepsilon - \delta$ **» или по Коши)**

Функция $y = f(x)$ **стремится к пределу** ***b*** $(y \to b)$

при ***x*** **стремящемся к** x_0 $(x \to x_0)$, **если для каждого**

положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число ***δ*****, что для всех** ***x*** **отличных от**

x_0 **и удовлетворяющих неравенству** $|x - x_0| < \delta,$

имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon.$

Если *b* есть предел функции *f(x)* при $x \to x_0$, **то пишут**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

Геометрический смысл:

т.к. из неравенства $|x - x_0| < \delta$ **следует неравенство**

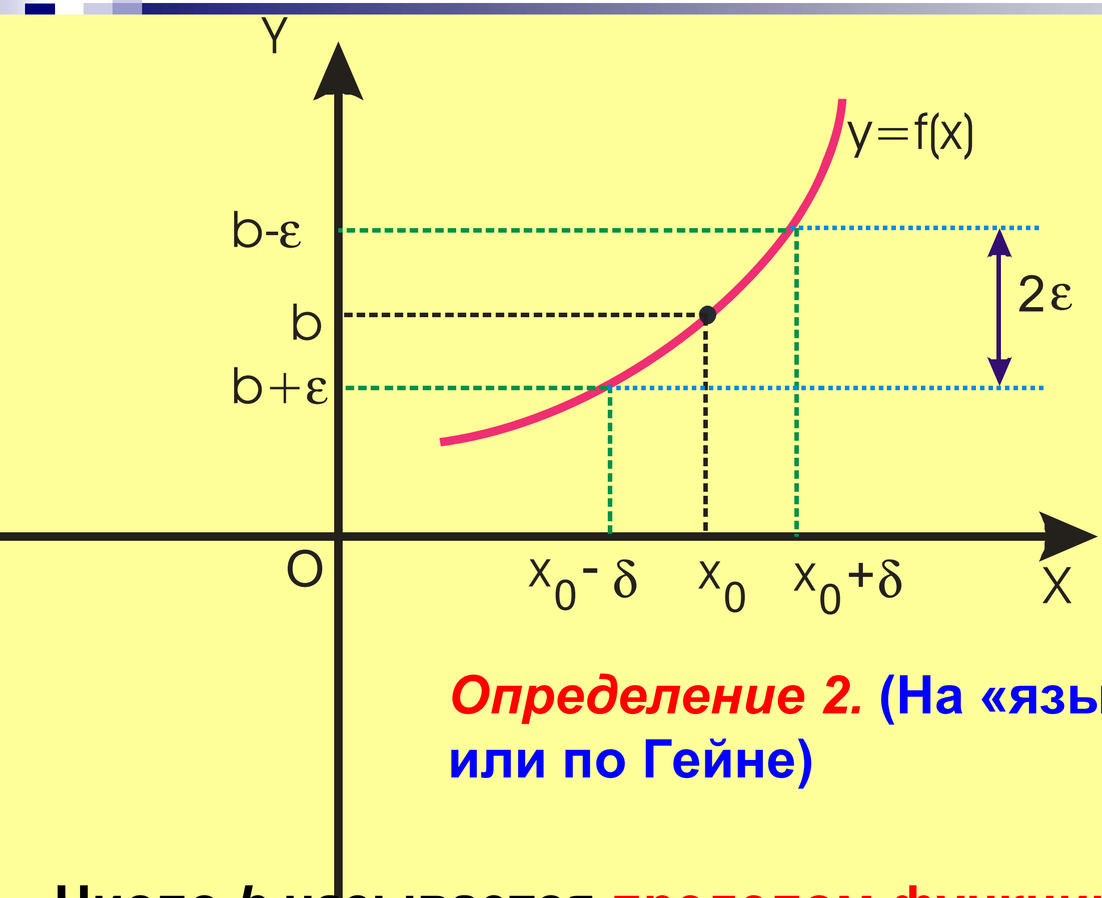
$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

то это значит, что для всех точек *x*, отстающих от точки x_0

не далее чем на δ, точки графика функции $y = f(x)$

лежат внутри полосы шириной *2ε*, ограниченной прямыми

$$y = b - \varepsilon \text{ и } y = b + \varepsilon$$



Определение 2. **(На «языке последовательностей» или по Гейне)**

Число *b* называется пределом функции $y = f(x)$ **в точке** x_0,

если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n, \quad n \in N(x_n \neq x_0)$ **сходящейся к точке** x_0,

последовательность соответствующих значений функции

сходится к числу *b*.

Замечание 1. Если функция стремится к пределу b_1,

при *x* стремящимся к некоторому числу x_0,

так, что *x* принимает только значения меньшие чем x_0,

то пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$$

и

b_1 **называют пределом функции** $f(x)$ в точке x_0 **слева.**

Если *x* принимает значения большие чем x_0, то пишут

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2$$

и b_2 называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 **справа.**

Если пределы **справа и слева существуют и равны**, т.е.

$b_1 = b_2 = b,$ то b и будет **пределом** в точке x_0.

Замечание 2. Для существования предела функции в точке $x = x_0$ **при** $x \to x_0$ **не требуется, чтобы функция была определена в точке** $x = x_0$.

При нахождении предела рассматриваются значения функции в окрестности точки x_0, **отличные от точки** x_0.

Определение 3. **Функция** $f(x)$ **стремится к пределу *b* при** $x \to \infty$,

если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число *M*, что для всех значений *x* удовлетворяющих неравенству $|x| > M$,

будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$

В этом случае записывают $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b.$

1.5 Бесконечно малые функции и их свойства.

Функция $\alpha = \alpha(x)$ **называется бесконечно малой при** $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$), **если** $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0)$

Например: функция $\alpha(x) = (x-3)^2$

есть бесконечно малая при $x \to 3,$ **так как** $\lim\limits_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$

функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ **является бесконечно малой при** $x \to \infty,$

поскольку $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Из определения предела следует, что если $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$

то это значит, что для любого наперед заданного произвольного малого положительного числа **ε** найдется такое ***δ>0***, что для всех *x*, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

будет удовлетворятся условие

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 2. Произведение функции бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ на функцию ограниченную $f = f(x)$ при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ есть функция бесконечно малая.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.

Следствие 3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Теорема 3. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая функция,

то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция

и наоборот, если функция *f(x)* – бесконечно большая, то

$\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

1.6 Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.

Теорема: **Если функция *f(x)* имеет предел равный *A*, то ее можно представить как сумму числа *A* и бесконечно малой функции *α(x)*, т.е. если**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{ то } f(x) = A + \alpha(x)$$

Доказательство:

Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ **то для любого *ε>0*, существует *δ>0*, что для любого *x* как только выполняется** $|x - x_0| < \delta$ **следует**

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

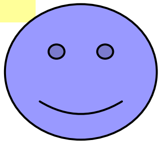
Можно записать $\left| f(x) - A - 0 \right| < \varepsilon.$

Это означает, что функция *f(x)-A* имеет предел равный нулю,т.е. является бесконечно малой функцией, которую обозначим *α(x)*

$$f(x) - A = \alpha(x)$$

Поэтому $$f(x) = A + \alpha(x)$$

что и требовалось доказать.



Теорема 2. (обратная) Если функцию *f(x)* можно представить в виде суммы числа *A* и бесконечно малой функции *α(x)*, то число *A* является пределом функции *f(x)*, т.е. $f(x) = A + \alpha(x),$

поэтому $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

1.7 Бесконечно большие функции.

Функция *y=f(x)* называется бесконечно большой при $x \to x_0$

если для любого положительного числа *N* можно найти такое число *δ>0*, что при всех значениях *x* , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ **выполняется неравенство**

$$|f(x)| > N$$

И записывается так $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ **или** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ **есть бесконечно большая функция при** $x \to 2.$

1.8 Основные теоремы о пределах.

Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда

$x \to x_0$ и $x \to \infty$ **аналогичны.**

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух и более функций равен сумме (разности) их пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B.$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции можно записать

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ и } \varphi(x) = B + \beta(x)$$

Следовательно

$$f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$$

Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ **бесконечно малая функция как сумма бесконечно малых функций.**

Тогда по обратной теореме

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$$

И можно записать

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ **и** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B.$

По теореме 1

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x)) = 0 = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = A - B.$$

Отсюда $A - B = 0,$ **т.е** $A = B.$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

Доказательство

Т.к. $\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ **то**

$$f(x)=A+\alpha(x)\ \text{и}\ \varphi(x)=B+\beta(x)$$

где $\alpha(x),\beta(x)$ **- бесконечно малые функции.**

Запишем $f(x)\varphi(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))=$

$$=AB+(A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть бесконечно малая функция.

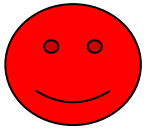
Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = A\cdot B.$$

т.е.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

что и требовалось доказать.



Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Действительно

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = \lim_{x\to x_0} c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Следствие 2. **Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела**

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n$$

Теорема 4. **Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}, \qquad \left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right)$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = B\neq 0,$ **то**

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ и } \varphi(x) = B + \beta(x)$$

где $\alpha(x), \beta(x)$ **- бесконечно малые функции.**

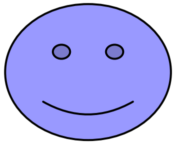
Тогда $$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right)=$$

$$\frac{A}{B}+\frac{BA+B\alpha(x)-AB-A\beta(x)}{B^2+B\beta(x)}$$

Второе слагаемое есть бесконечно малая функция как частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

что и требовалось доказать.



Теорема 5. (о пределе промежуточной функции)

Если между соответствующими значениями функций

$$u = u(x), z = z(x), \upsilon = \upsilon(x)$$

выполняются неравенства $u \le z \le \upsilon$, **при этом** $u(x), \upsilon(x)$

при $x \to x_0$ **стремятся к одному и тому же пределу *b*, то**

$z = z(x)$ **при** $x \to x_0$ **стремится к тому же пределу.**

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7).$

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) = \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 7 =$

$$= 3(\lim_{x\to 1} x)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 7 = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 + 7 = 8$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}.$

Решение:

Предел знаменателя, при $x\to 2$ **равен нулю.**

Предел числителя так же равен нулю. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2+14x-32=0$$

найдем корни

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(-32)}}{2}=\frac{-14\pm\sqrt{196+128}}{2}=$$

$$\frac{-14\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-14\pm18}{2}$$

$$x_1=2, x_2=-16$$

Поэтому $x^2+14x-32=(x-2)(x+16)$

Разложим знаменатель на множители $x^2-6x+8=0.$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot8}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}$$

$$x_1=4, x_2=2.$$

Поэтому $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}=\frac{18}{-2}=-9$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2

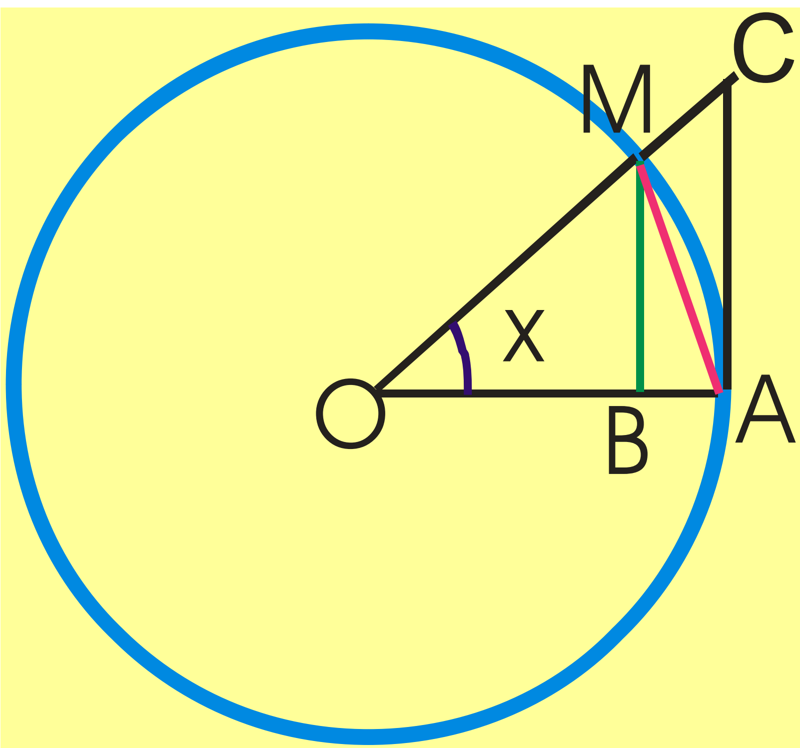
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+3\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

1.9 Первый замечательный предел.

Предел вида $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1.6)$$ **называется первым замечательным пределом.**

Доказательство:



Функция $\frac{\sin x}{x}$ **не определена при** $$x=0.$$

Рассмотрим окружность радиуса 1.

Обозначим центральный угол *MOB* через *x*, при этом

$$0<x<\frac{\pi}{2}$$

Из рисунка видно, что площадь $\Delta MOA <$ площади сектора *MOA*<

площади ΔCOA

Площадь ΔMOA $\quad S_{\Delta MOA} = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$

Площадь сектора круга $S = \frac{lr}{2},$ *l*-длина дуги.

Площадь сектора MOA $\quad \mathrm{S}_{\mathrm{MOA}} = \frac{1}{2} OA\, \overset{\smile}{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$

(центральный угол равен длине дуги делить на радиус).

Площадь треугольника $\quad S_{\Delta COA} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tgx$

Получим $$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx.$$

Умножим неравенство на 2, получим

$$\sin x < x < tgx$$

Разделим неравенство на *sinx>0*

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$ **или** $$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Мы вывели это неравенство в предположении, что *x>0*, однако

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$ **и** $$\cos(-x) = \cos x$$

Следовательно оно верно и при *x<0*.

Но $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Следовательно, переменная $\dfrac{\sin x}{x}$ заключена между двумя величинами, имеющими один и тот же предел равный 1. На основании теоремы 5 предыдущего параграфа

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Примеры:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}=$$

$$=\frac{3}{5}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}$$

1.10 Второй замечательный предел.

Теорема: Функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ **стремится при** $x \to \infty$**, к пределу е .**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad (1.7)$$

Если в (1.7) положить $\frac{1}{x} = \alpha$**, то при** $x \to \infty$**, имеем** $\alpha \to 0$ **и получим**

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e \qquad (1.8)$$

Равенства (1.7) и (1.8) называются вторым замечательным пределом.

Примеры:

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = e^{3}$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\left[\begin{array}{c}\frac{2}{x}=\frac{1}{y}\\ x=2y\end{array}\right]=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=e^{2}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\frac{4}{x-1}=\frac{1}{y}\\ x-1=4y\\ x=4y+1\end{array}\right]=$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y+4}=$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{4}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}=e^{4}$$

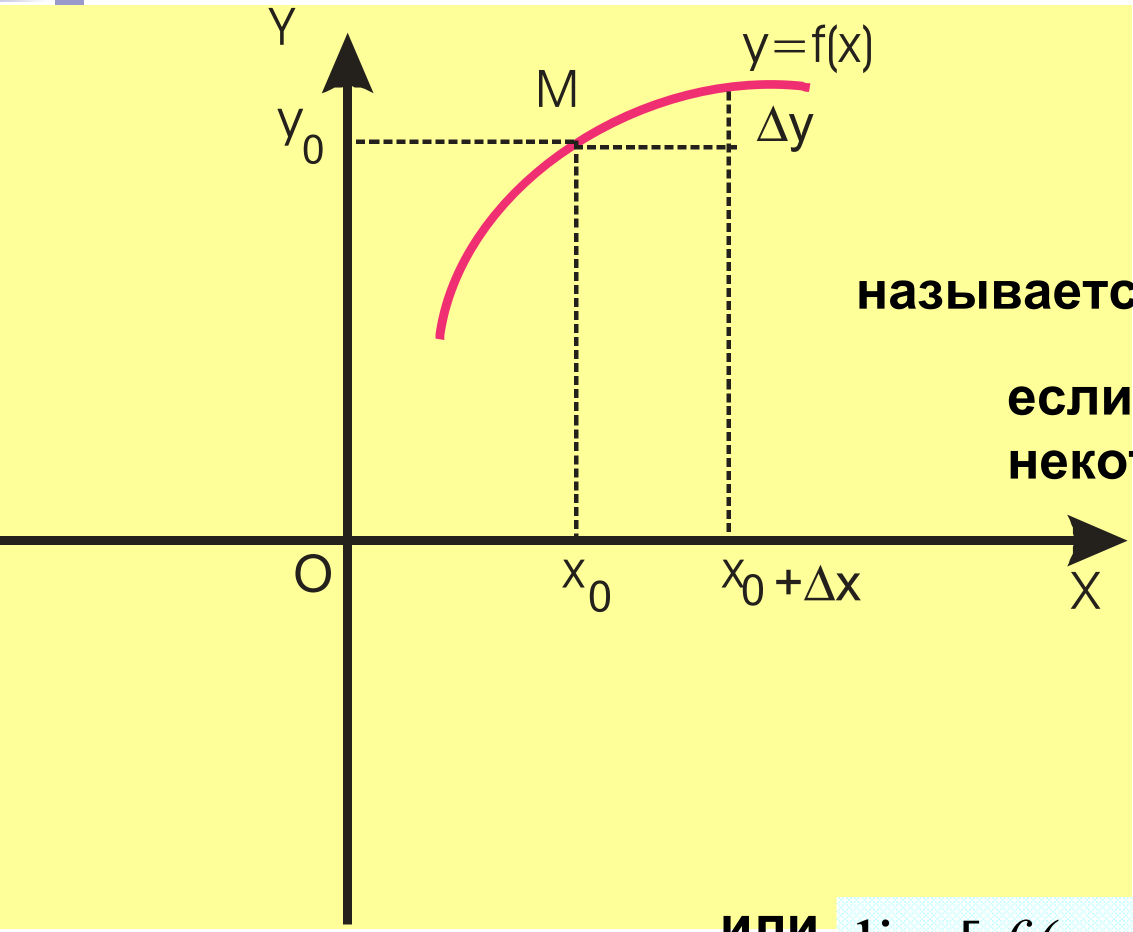
1.11 Непрерывность функций.

Пусть функция $y = f(x)$ **определена при некотором значении** x_0 **и в некоторой окрестности с центром в** x_0.

Пусть $y_0 = f(x_0)$. **Если *x* получит некоторое приращение** Δx **и примет значение** $x = x_0 + \Delta x$ **то и функция получит некоторое приращение** Δy.

Новое значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



Определение 1. **Функция**

$$y = f(x)$$

называется непрерывной в точке x_0,

если она определена в некоторой окрестности точки x_0,

(и в самой точке x_0 **)**

и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad (1.9)$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad (1.10)$$

Условие непрерывности (1.10) можно записать и так

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

или $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 2. **Функция** $y = f(x)$ **называется непрерывной в точке** x_0, **если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Пример: **Докажем, что функция** $y = x^2$

непрерывна в произвольной точке x_0.

Действительно $y_0 = x_0^2, \qquad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - y_0 = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0{}^2 =$$

$$2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) =$$

$$= 2x_0 \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + (\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x)^2 = 0$$

Теорема 1. Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ **непрерывна в точке** x_0, **то функция** $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ **также есть непрерывная функция в точке** x_0.

Теорема 2. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке в которой она определена.

Пример: Исследовать на непрерывность функцию *y=sinx.*

Функция ***y=sinx*** **определена на множестве действительных чисел. Возьмем произвольную точку x и найдем приращение** Δy

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2}$$

Заметим, что $\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0,$

а функция $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ **ограничена.**

Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Теорема 3. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 4. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

1.12 Точки разрыва функций и их классификация.

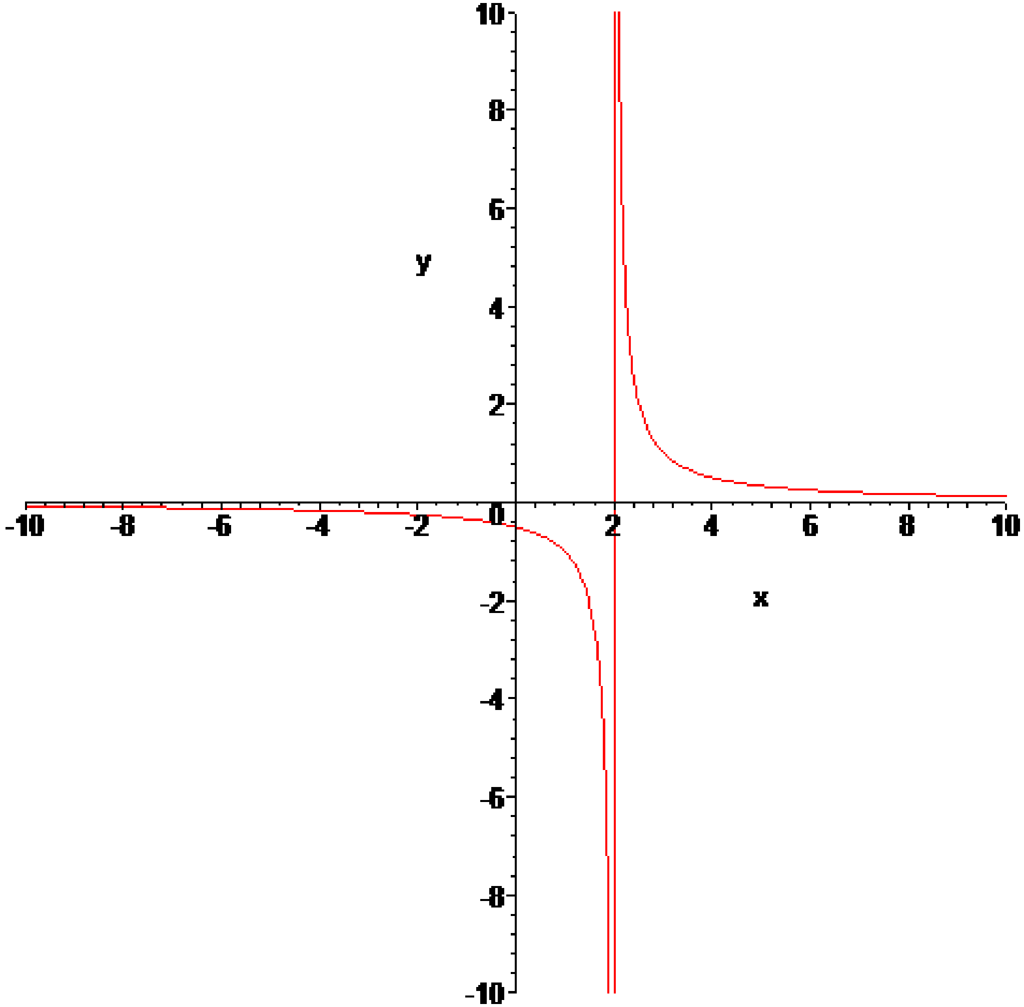
Если в какой-то точке $x = x_0$ **для функции** ***y=f(x)*** **не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т.е.**

- **если при** $x = x_0$ **функция не определена,**
- **или не существует предел** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- **или** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$

то при $x = x_0$ **функция** ***y=f(x)*** **разрывна. Точка** $x = x_0$ **в этом случае называется точкой разрыва функции.**

Например: **1. Функция определена в окрестности точки x_0**

но не определена в самой точке x_0

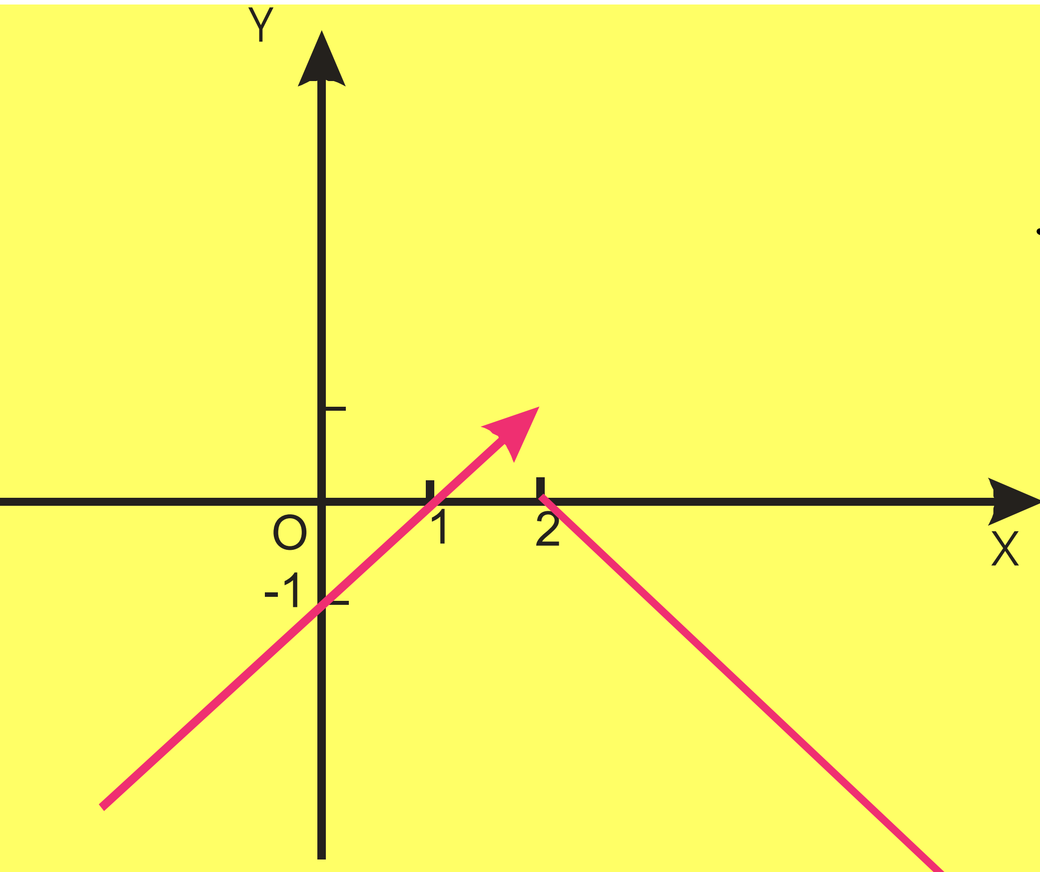


Функция $$y = \frac{1}{x-2}$$

не определена в точке

$$x = 2$$

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



Функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если x} < 2 \\ 2 - x, & \text{если x} \geq 2 \end{cases}$$

определена в точке

$$x_0 = 2, \; f(2) = 0$$

однако в этой точке функция не имеет предела, т.к.

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует

предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции

в этой точке $$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Функция $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 2, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$ **имеет точку разрыва** $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$ **а** $$f(0) = 2$$

Все точки разрыва разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 **называется точкой разрыва первого рода функции *y=f(x)*, если в этой точке существуют конечные пределы функции справа и слева, т.е.**

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

При этом

1. если $A_1 = A_2,$ **то точка** x_0 **называется точкой устранимого разрыва,**

2. если $A_1 \neq A_2,$ **то точка** x_0 **называется точкой конечного разрыва.**

Величину $\left|A_1 - A_2\right|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции *y=f(x),* если по крайней мере один из односторонних пределов (справа или слева) не существует или равен бесконечности.

Пример: Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}.$

Найти точки разрыва, определить их тип.

Решение.

Функция *f(x)* определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки *x=3*. Очевидно, что

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 3 \\ -1, \text{ при } x < 3 \end{cases}$$

Следовательно

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = -1, \lim_{x \to 3+0} f(x) = 1$$

Поэтому в точке *x=3* функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен *1-(-1)=2.*