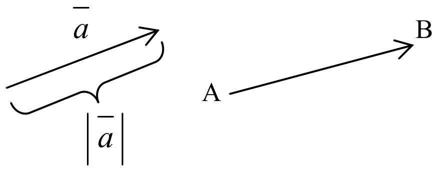
ВЕКТОРЫ

1 Определение вектора. Линейные операции над векторами.

Вектором на плоскости или в пространстве называется **направленный отрезок**, для которого указаны начало и конец. Обозначения: $\overline{AB}$, $\overline{a}$. Точка A − начало вектора, B − конец.



Длиной вектора $\overline{a}$ называется длина соответствующего ему отрезка и обозначается $|\overline{a}|$. Вектор называется **нулевым** и обозначается $\overline{O}$, если его начало и конец совпадают. Ещё пишут $\overline{AB}=\overline{O}$. **Единичным** вектором называется вектор $\overline{a}$, длина которого равна 1, $|\overline{a}|=1$..

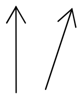
Два или более ненулевых вектора называеюся **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то это обозначается $\overline{a}\|\overline{b}$.
Коллинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ могут быть **сонаправленными** ↗↗ обозн $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$
и **противоположно направленными** ↗↙ обозн $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$.

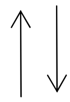
Три или более ненулевых вектора называются **компланарными**, если они лежат на на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

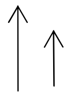
Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **равными**, если:

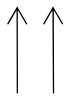
1) $\overline{a}\|\overline{b}$; 2) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены; 3) $|\overline{a}|=|\overline{b}|$.

Пример 1

 $\overline{a}\neq\overline{b}$, $\overline{a}\nparallel\overline{b}$;

 $\overline{a}\neq\overline{b}$, не сонаправл.

 $\overline{a}\neq\overline{b}$, $|\overline{a}|\neq|\overline{b}|$

 $\overline{a}=\overline{b}$

В механике **вектором** обозачают **силу**.
(стрелка указывает направление действия силы, а длина вектора равна величине силы)

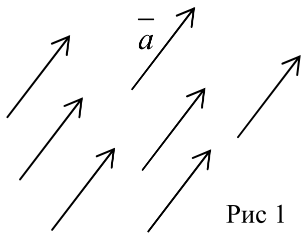
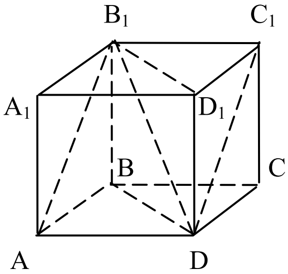


Рис 1

Силу можно прикладывать к разным точкам равной массы.
Точки переместятся в одном направлении на равные расстояния.
Все векторы, полученные таким образом будут **равными**, они получены один из другого параллельным переносом (на **рис 1**).

Пример 2 Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



$\overline{AB}\|\overline{DC}\|\overline{D_1C_1}$, $\overline{AB_1}\|\overline{C_1D}$, $\overline{B_1D_1}\|\overline{BD}$.

$\overline{AB}\nparallel\overline{AB_1}$, $\overline{AD}\nparallel\overline{B_1D_1}$, $\overline{AD}\nparallel\overline{B_1D}$,

$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{D_1B_1}$ − компланарны

$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB_1}$ − не компланарны

$\overline{AB}=\overline{DC}=\overline{D_1C_1}=\overline{A_1B_1}$, $\overline{AB_1}=\overline{DC_1}$, $\overline{AB}\neq\overline{D_1C}$, $\overline{AB}\neq\overline{CD}$

Линейные операции над векторами

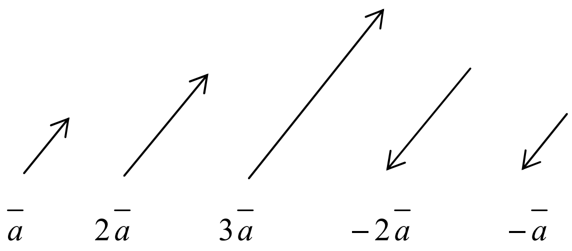
Заданы векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и число λ. Покажем как строятся векторы $\lambda\overline{a},\ \overline{a}+\overline{b},\ \overline{a}-\overline{b}$.

Умножение вектора на число

Если $\lambda = 0$, то $\lambda\,\overline{a} = \overline{0}$.

Если $\lambda > 0$, то $\lambda\,\overline{a}$ удовлетворяет условиям: 1) $\lambda\,\overline{a} \parallel \overline{a}$; 2) $\lambda\,\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$; 3) $\left|\lambda\,\overline{a}\right| = \lambda\cdot\left|\overline{a}\right|$.

Если $\lambda < 0$, то $\lambda\,\overline{a}$ удовлетворяет условиям: 1) $\lambda\,\overline{a} \parallel \overline{a}$; 2) $\lambda\,\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$; 3) $\left|\lambda\,\overline{a}\right| = \left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|$.



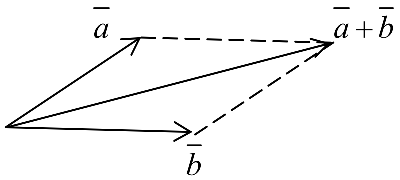
Первым здесь нарисован вектор $\overline{a}$.
Вектор $2\overline{a}$ сонаправлен с $\overline{a}$ и в два раза длиннее.
Вектор $3\overline{a}$ сонаправлен с $\overline{a}$ и в три раза длиннее
Вектор $(-2)\overline{a}$ <u>противоположно направлен</u> с $\overline{a}$ и в два раза длиннее, чем $\overline{a}$.
Вектор $(-\overline{a})$ <u>противоположно направлен</u> с $\overline{a}$.

Вектор $(-\overline{a})$ называют вектором, **противоположным** вектору $\overline{a}$.

Сложение векторов $\overline{a}+\overline{b}$

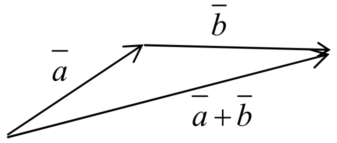
Сложить векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно двумя способами:

а) по правилу параллелограмма



Заданные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ откладываем из одной точки.
Достроим до параллелограмма.
Диагональ этого параллелограмма (с началом в той же точке) задаёт вектор $\overline{a}+\overline{b}$.

б) по правилу треугольника



Откладываем вектор $\overline{a}$.
Из конца вектора $\overline{a}$ откладываем вектор $\overline{b}$.
Соединяем начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$.
Получирм вектор $\overline{a}+\overline{b}$

С точки зрения механики:

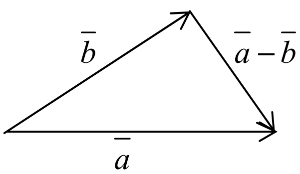
вектор $\lambda\,\overline{a}$ – это перемещение в λ раз большее, чем $\overline{a}$ и

- –) в том же направлении, если $\lambda > 0$
- –) в противоположном направлении, если $\lambda < 0$
- –) нулевое, если $\lambda = 0$.

вектор $\overline{a}+\overline{b}$ – это перемещение = результату последовательного применения перемещений $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Вычитание векторов $\overline{a}-\overline{b}$

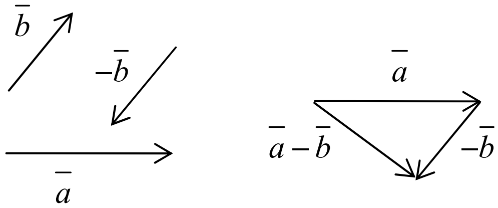
<u>Первый способ</u>



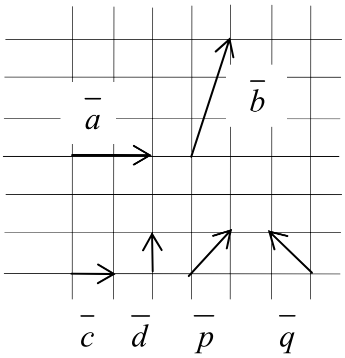
Заданные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ откладываем из одной точки.
Возьмём вектор $\overline{c}$ такой, что $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$. Этот вектор $\overline{c}$ и равен $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$.
Т.е. разность $\overline{a}-\overline{b}$ это вектор проведённый из конца вектора $\overline{b}$ в конец $\overline{a}$.

Второй способ

Сложим по правилу треугольника
$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$

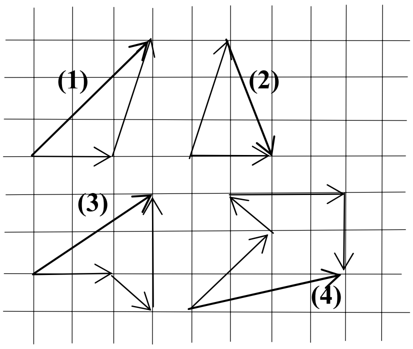


Пример 3



Слева нарисованы векторы
$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{d},\ \bar{p},\ \bar{q}$

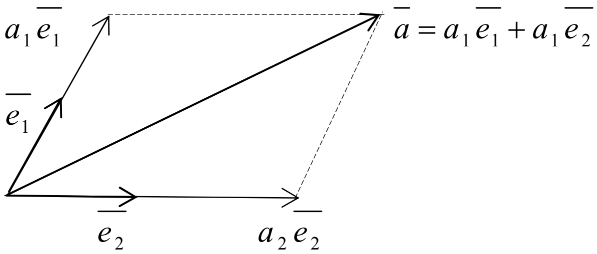
Справа найдены
(1) $\bar{a}+\bar{b}$, **(2)** $\bar{a}-\bar{b}$,
(3) $2\bar{c}-\bar{q}+3\bar{d}$,
(4) $2\bar{p}+\bar{q}+3\bar{c}-2\bar{d}$



2 Базис векторов. Координаты вектора.

Базисом векторов называют такую совокупность векторов, через которые единственным образом можно записать любой вектор.

На плоскости любые два **неколлинеарные** вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют **базис** векторов плоскости.



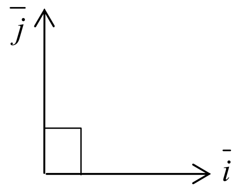
Зафиксируем на плоскости два ненулевых неколлинеарных вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Тогда любой вектор $\bar{a}$ на плоскости единственным образом можно записать в виде

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$$

Числа $a_1,\ a_2$ называются **координатами** вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2$. Пишут $\bar{a}=(a_1;a_2)$.

На практике для решения задач выбирают самый простой базис, так называемый **ортонормированный** базис.

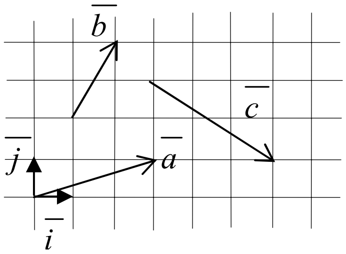


$\bar{i}\perp\bar{j},\quad |\bar{i}|=1,\quad |\bar{j}|=1$

“орто” − перпендикулярные,
“нормированный” − с фиксированной длиной векторов.

Пример 1

Найти координаты векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ в ортонормированный базисе $\bar{i},\ \bar{j}$.



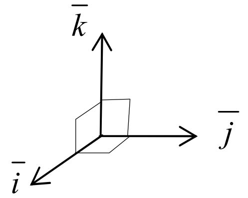
Слева заданы векторы $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$. Для вектора $\bar{a}$ сразу видно, что $\bar{a}=3\cdot\bar{i}+1\cdot\bar{j}$, то есть $\bar{a}=(3;1)$.

Векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ отложим в той же точке, что и векторы $\bar{i},\ \bar{j}$.

Получим $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}\ \Rightarrow\ \bar{b}=(1;2)$, $\bar{c}=3\bar{i}-2\bar{j}\ \Rightarrow\ \bar{c}=(3;-2)$

Аналогично **в пространстве** три ненулевых **некомпланарных** вектора $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3$ образуют базис и любой вектор $\overline{a}$ в пространстве можно единственным образом записать в виде $\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2 + a_3 \cdot \overline{e}_3$. Числа a_1, a_2, a_3 называются **координатами** вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3$. Это пишут так $\overline{a} = (a_1, a_2, a_2)$.

Ортонормированный базис в пространстве обозначают $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$.

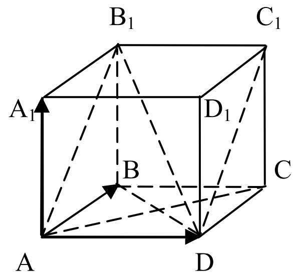


$$\overline{i} \perp \overline{j},\quad \overline{i} \perp \overline{k},\quad \overline{j} \perp \overline{k},$$

$$\left|\overline{i}\right| = 1,\quad \left|\overline{j}\right| = 1,\quad \left|\overline{k}\right| = 1$$

Пример 2

На векторах ортонормированного базиса построен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что



$$\overline{i} = \overline{AD},\quad \overline{j} = \overline{AB},\quad \overline{k} = \overline{AA_1}$$

Найти координаты векторов $\overline{AC}, \overline{AC_1}, \overline{AB_1}, \overline{C_1D}, \overline{B_1B}, \overline{DB}, \overline{DB_1}$.
в базисе $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$.

<u>Решение</u>.

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \overline{i} + \overline{j} = 1 \cdot \overline{i} + 1 \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k},\qquad \overline{AC} = (1; 1; 0)$$

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{C_1C} = \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{C_1C} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k},\qquad \overline{AC_1} = (1; 1; 1)$$

$$\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{AA_1} = \overline{j} + \overline{k} = 0 \cdot \overline{i} + \overline{j} + \overline{k},\qquad \overline{AB_1} = (0; 1; 1)$$

$$\overline{C_1D} = \overline{B_1A} = -\overline{AB_1} = \left[\text{см. ранее}\right] = -\left(0 \cdot \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}\right) = 0 \cdot \overline{i} + (-1)\overline{j} + (-1)\overline{k},\qquad \overline{C_1D} = (0; -1; -1)$$

$$\overline{B_1B} = \overline{A_1A} = -\overline{AA_1} = -\overline{k} = 0 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} - \overline{k},\qquad \overline{B_1B} = (0; 0; -1)$$

$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \left[\text{см. вычитание векторов}\right] = \overline{j} - \overline{i} = -\overline{i} + \overline{j} + 0 \cdot \overline{k},\qquad \overline{DB} = (-1; 1; 0)$$

$$\overline{DB_1} = \overline{DB} + \overline{BB_1} = \left(\overline{AB} - \overline{AD}\right) + \overline{AA_1} = \overline{j} - \overline{i} + \overline{k} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k},\qquad \overline{DB_1} = (-1; 1; 1)$$

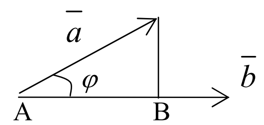
Далее будем рассматривать **только ортонормированные** базисы и координаты векторов в них.

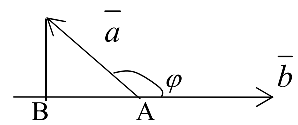
<u>Проекция вектора на вектор</u>

Заданы векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Отложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из одной точки А.

Пусть l − прямая, на которой лежит вектор $\overline{b}$,





В − проекция конца вектора $\overline{a}$ на прямую l, φ − угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $0 \le \varphi < \pi$.
обозначим буквой d расстояние между точками А и В обозначим $\left|AB\right|$.

Проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется **число**, обозначаемое $np_{\overline{b}}\ \overline{a}$, причём

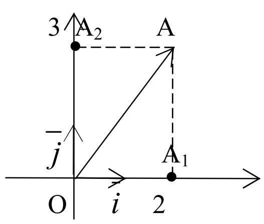
$np_{\overline{b}}\ \overline{a} = \left|AB\right|$, если угол φ острый.

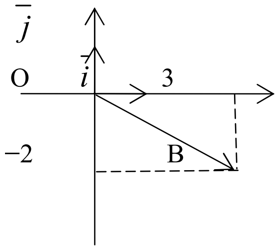
$np_{\overline{b}}\ \overline{a} = -\left|AB\right|$, если угол φ тупой.

В обоих случаях из прямоугольных треугольников получим $\boxed{np_{\overline{b}}\ \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi\ .}$

Геометрический смысл координат вектора

На плоскости, в ортонормированном базисе $\bar{i},\ \bar{j}$ запишем вектор $\vec{a}$. Пусть $\vec{a}=(a_1;a_2)$.
Координаты вектора $\vec{a}=(a_1;a_2)$ − это проекции этого вектора $\vec{a}$ на базисные векторы, то есть $a_1=\text{пр}_{\bar{\text{i}}}\vec{a},\ a_2=\text{пр}_{\bar{j}}\vec{a}$.





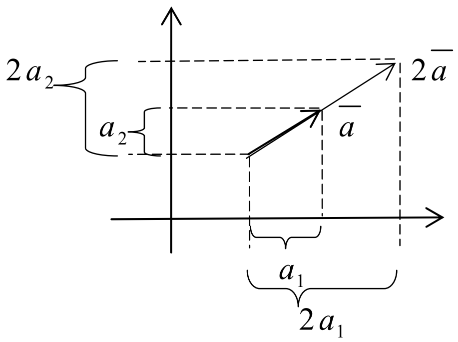
Объясним это примерах.
На рисунке $\overline{OA}=(2;3)$. С другой стороны
$np_{\bar{i}}\ \overline{OA}=\left|OA_1\right|=2,\quad np_{\bar{j}}\ \overline{OA}=\left|OA_2\right|=3$
$\Rightarrow\quad \overline{OA}=\left(np_{\bar{i}}\ \overline{OA},\ np_{\bar{j}}\ \overline{OA}\right)$
Аналогично $\overline{OB}=(3;-2)=\left(np_{\bar{i}}\ \overline{OB},\ np_{\bar{j}}\ \overline{OB}\right)$

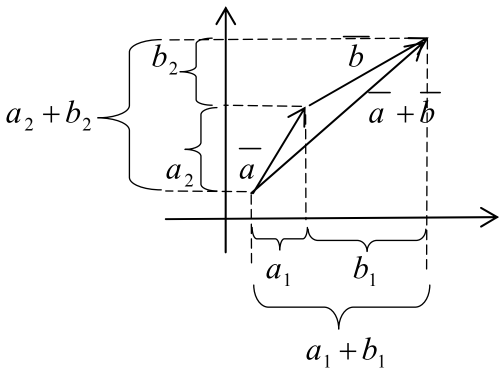
В пространстве в ортонормированном базисе $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ для вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ также
$a_1=\text{пр}_{\bar{\text{i}}}\vec{a},\ a_2=\text{пр}_{\bar{j}}\vec{a},\ a_3=\text{пр}_{\bar{k}}\vec{a}$.

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть заданы векторы **на плоскости**: $\bar{a}=(a_1;a_2),\quad \bar{b}=(b_1;b_2)$ и число λ..
Тогда координаты векторов $\lambda\bar{a},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b}$ вычисляются по формулам:

1) $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2)$; 2) $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$; 3) $\bar{a}-\bar{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$.



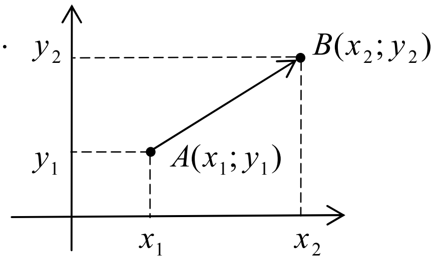


На первом рисунке изображены векторы $\bar{a}=(a_1;a_2),\quad 2\bar{a}=(2a_1;2a_2)$.
На втором рисунке изображены векторы $\bar{a}=(a_1;a_2), \bar{b}=(b_1;b_2),\ \bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$;.
Для векторов **в пространстве** $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3),\quad \bar{b}=(b_1;b_2;b_3)$

1) $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$; 2) $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$; 3) $\bar{a}-\bar{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3)$.

Пример 3
Даны векторы $\bar{a}=(3;8;1),\quad \bar{b}=(-1;6;0)$. Найти координаты векторов $2\bar{a},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b},\ 3\bar{a}-2\bar{b}$.

Три полезные формулы

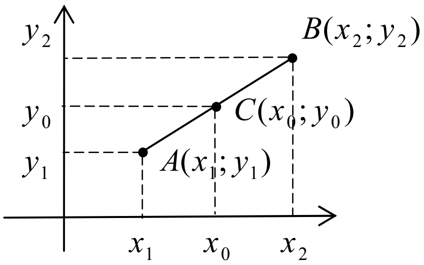


1) Координаты вектора по координатам концов вектора.
Если на плоскости заданы координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ равны

$$\boxed{\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)}$$

Если в пространстве заданы $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\boxed{\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)}$

2) Координаты середины отрезка.

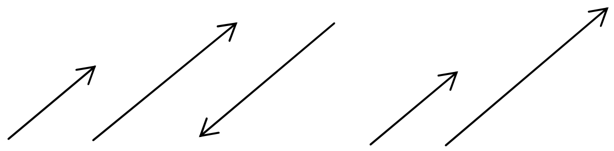


Если на плоскости $C(x_0, y_0)$ – середина отрезка AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Если в пространстве $C(x_0; y_0; z_0)$ – середина отрезка AB, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}}$

3) Координаты коллинеарных векторов.



$\overline{a}$, $2\overline{a}$, $(-2)\overline{a}$, $\qquad \overline{a} \ \| \ \overline{b}$

Пусть на плоскости $\overline{a} = (a_1; a_2)$, $\overline{b} = (b_1; b_2)$.

$\overline{b} \| \overline{a} \Leftrightarrow$ существует число λ такое, что $\overline{b} = \lambda \overline{a} \Leftrightarrow (b_1; b_2) = \lambda (a_1; a_2) \Leftrightarrow$
$(b_1; b_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2) \Leftrightarrow b_1 = \lambda a_1;\ \ b_2 = \lambda a_2$

Таким образом, $\boxed{\overline{b} \| \overline{a} \Leftrightarrow b_1 = \lambda a_1;\ \ b_2 = \lambda a_2}$ (координаты прапорциональны)

Если в пространстве $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то $\boxed{\overline{b} \| \overline{a} \Leftrightarrow b_1 = \lambda a_1;\ \ b_2 = \lambda a_2;\ \ b_3 = \lambda a_3}$

Примеры.

4. Даны $A(1; 2; 3)$, $B(5; 6; 7)$. Найти вектор $\overline{AB}$ и координаты середины отрезка AB.

5. Даны координаты вершин A(−2; 1), D(3; 2) и центра O(1; 3) параллелограмма ABCD.
Найти координаты вектора $\overline{AD}$ и вершин B, C.

6. На полоскости заданы точки $A(3; -2)$, $B(6; 4)$. Найти координаты точек C, D, которые делят отрезок AB на три равных части. **Ответ**. $C(4; 0)$, $D(5; 2)$

Во многих задачах механики и физики встречается операция умножения вектора на вектор. Но при этом результат может быть как числом, так и вектором. Рассматрим три вида умножения векторов: скалярное, векторное и смешанное.

Витебск, УО «ВГТУ», Статковский Н. С. , 2012

3 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a}\,\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$

Пример 1. Найти скалярные произведения базисных веторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в R^3.

Свойства скалярного произведения

Запишем для векторов в пространстве. На плоскости − аналогично

1\. $\bar{a}\,\bar{b}=\bar{b}\,\bar{a}$ 2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$ 3. $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\,\bar{b}+\bar{a}\,\bar{c}$

Пусть $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Тогда 4. $\bar{a}\,\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

5\. $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$ 6. $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$ 7. $\bar{a}\perp\bar{b}\ \Leftrightarrow\ \bar{a}\,\bar{b}=0$ 8. $np_{\bar{b}}\,\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{b}|}$

Доказательство. 1, 4 −8.

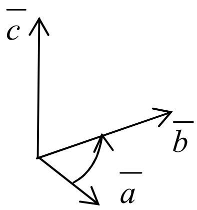
Аналогичные формулы верны для векторов на плоскости.

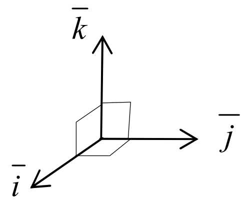
Пример 2. Даны векторы $\bar{a}=(3;2;-4)$, $\bar{b}=(1;-6;-2)$.
Найти скалярное произведение $\bar{a}\,\bar{b}$**,** длину $|\bar{a}|$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$**,** проекцию $np_{\bar{b}}\,\bar{a}$.

Пример 3. В $\triangle ABC$ заданы $A(1;2;3)$, $B(4;3;2)$, $C(5;6;4)$. Точка D − основание высоты BD.
Найти стороны BA, BC, угол B, длину AD.

4 Векторное произведение векторов

Будем рассматривать векторы в пространстве.
Тройка некомпланарных векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется **правой**, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден **против часовой стрелки** (см. **рис 13**).
Если указанный поворот **по часовой стрелке,** то тройка $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется **левой**.





Пример 1 Рассмотрим базисные векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.
$\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ − правая тройка, $\bar{j},\bar{i},\bar{k}$ − левая тройка, $\bar{j},\bar{k},\bar{i}$ − правая тройка, $\bar{k},\bar{j},\bar{i}$ − левая тройка,
Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющей. условиям:
1) $\bar{c}\perp\bar{b}$ и $\bar{c}\perp\bar{a}$
2) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку векторов.
3) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **обозначается** $\bar{a}\times\bar{b}$.

Свойства векторного произведения

1. $\bar a\times\bar b=-\bar b\times\bar a$ 2. $(\lambda\bar a)\times\bar b=\bar a\times(\lambda\bar b)=\lambda(\bar a\times\bar b)$ 3. $\bar a\times(\bar b+\bar c)=\bar a\times\bar b+\bar a\times\bar c$

4. Пусть $\begin{matrix}\bar a=(a_1,a_2,a_3)\\ \bar b=(b_1,b_2,b_3)\end{matrix}$ Тогда $\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$

5. $\left|\bar a\times\bar b\right|=S_{ПАР\ \bar a,\bar b}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$.

5*а*. $S_{ПАР\ ABCD}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ – площадь параллелограмма ABCD.

5*б*. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ – площадь треугольника ABC.

Дополнение к свойству 4)

Координаты вектора $\bar a\times\bar b$ находим так. Вычисляем определитель разложением по первой строке.

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\bar i\cdot\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-\bar j\cdot\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+\bar k\cdot\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)}$$

Примеры.

2. Даны векторы $\bar a=(3;2;-4)$, $\bar b=(1;-6;-2)$. Найти $\bar a\times\bar b$.

Найти вектор, перпендикулярный векторам $\bar a$ и $\bar b$.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$.

3. Найти площадь $\triangle ABC$, если $A(2;0;1), B(4;2;5), C(6;1;2)$.

5 Смешанное произведение векторов

Возьмём любые векторы $\bar a,\bar b,\bar c$.

Вычислим векторное произведение $\bar a\times\bar b$, а затем этот вектор умножим скалярно на вектор $\bar c$.

Получим некоторое число $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c$. Аналогично найдём число $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$. Оказывается, что эти два числа $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c$ и $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$ всегда одинаковы, то есть $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$.

Это число и назвали смешанным произведением векторов $\bar a,\bar b,\bar c$.

Смешанным произведением векторов $\bar a,\bar b,\bar c$ называется число, обозначаемое $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ и равное

$$\boxed{\bar a\bar b\bar c=(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c}$$

Свойства смешанного произведениея

1. Пусть $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Тогда $\boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$

2. *а)* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}>0 \Rightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}-$ правая тройка векторов;

б) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}<0 \Rightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}-$ левая тройка.

3. *а)* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\neq 0 \Rightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}-$ векторы **не**компланарны;

б) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0 \Rightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}-$ компланарны.

4. *а)* $V_{\text{ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА}}=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$; *б)* $V_{\text{ПИРАМИДЫ ABCD}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\;\overline{AC}\;\overline{AD}\right|$

Примеры

1. Даны векторы $\bar{a}=(1,0,1)$, $\bar{b}=(0,2,-1)$, $\bar{c}=(3,1,0)$. Требуется:

а) Найти смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. (=−5)

б) Найти объём параллелептпеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

в) Выяснить компланарны ли векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

г) Если некомпланарны, то выяснить образуют ли они правую тройку или левую.

д) Образуют ли $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ базис в пространстве?

2. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A(1,2,0), B(−1,2,1), C(−1, −1, −1), D(0,1,3). и её высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

3. Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки A(1,2,−5), B(2, −1, −10), C(−1,3,0) и D(−4, −2,1).