Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема3. «Функция распределения вероятностей случайной величины»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

3.1 Определение функции распределения.

Пусть *x* действительное число.

Вероятность события состоящее в том, что случайная величина *X* примет значение меньше *x*, т.е. $X < x,$ **обозначим через** $F(x).$

Определение. Функцией распределения называют функцию *F(x)*, определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение меньше *x*:

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.1)$$

Геометрически это означает:

F(x) **– вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, которое изображается точкой на числовой прямой, расположенной слева от точки *x*.**

Функция распределения для дискретной случайной величины *X*, которая может принимать значения

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ **с соответствующими вероятностями, имеет вид**

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k), \qquad (3.2)$$

где символ $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше *x.*

Свойства функции распределения:

1. Значение функции распределения принадлежит отрезку [0,1].

Доказательство следует из определения функции распределения, как вероятности.

2. Функция *F(x),* неубывающая функция, т.е. если

$x_1 < x_2$, **то** $F(x_1) \le F(x_2)$.

Доказательство. **Пусть** $x_1 < x_2$.

Тогда событие состоящее в том, что *X* примет значение меньшее x_2,

можно разделить на две несовместных события:

***X* примет значение меньшее** x_1 **с вероятностью**

$$P(X < x_1)$$

и *X* примет значение удовлетворяющее неравенству

$$x_1 \le X \le x_2$$

с вероятностью $P(x_1 \le X < x_2)$

По теореме сложения вероятностей имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2).$$

$$\boxed{F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2).}$$

Выражение стоящее справа представляет собой вероятность, она не может быть отрицательной, следовательно

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0, \qquad \boxed{F(x_2) \ge F(x_1).}$$

***Следствие 1*. Вероятность того, что случайная величина примет значение заключенное в интервале**

$(a, b),$ **равно приращению функции распределения на этом интервале**

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \quad (3.3)$$

Следствие 2. **Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет одно определенное значение равно *0*.**

Поэтому

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) =$$
$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b). \quad (3.4)$$

Пример.

Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}, & -1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение принадлежащие интервалу (0,2).

Решение.

Т.к. на интервале (0,2) по условию задачи

$$F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4},$$

то учитывая формулу (3.3)

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a),$$

и следствие 2 можно записать

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=$$

$$=\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{0}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $(a, b),$ **то**

$F(x) = 0,$ **при** $x \le a,$ $F(x) = 1$

при $x \ge b.$

3.2 График функции распределения

На основании свойств функции распределения, график функции распределения непрерывной случайной величины располагается между прямыми $y = 0, y = 1.$

При $x \le a$ **координаты графика функции равны 0, при**

$x \ge b$ **ординаты графика функции равны 1.**

Пример 1.

Задана функция распределения непрерывной случайной величины *X*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ a(x-1)^3, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

Найти коэффициент a, **построить график функции *F(x)* и вычислить вероятность** $P(1 \le x \le 2)$.

Решение.

Из непрерывности функции распределения *F(x)*, следует

$$\lim_{x\to 3} a(x-1)^3 = 1,$$

$$a\cdot 2^3 = 1, \quad a = \frac{1}{8},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{8}(x-1)^3, & 1 \le x \le 3. \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

Вычислим вероятность

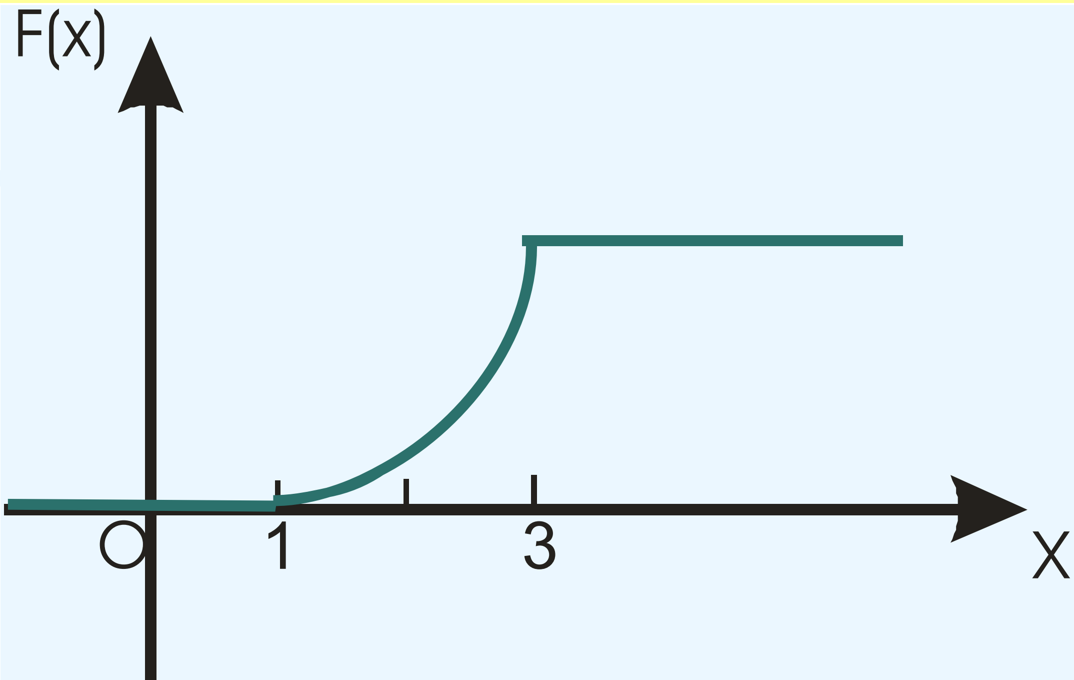
$$P(1 \le x \le 2)$$

учитывая

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) =$$
$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b),$$

$$P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8}(2-1)^3 - \frac{1}{8}\cdot 0^3 = \frac{1}{8}.$$



Пример 2.

Дискретная случайная величина *X* задана таблицей распределения

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и построить график.

Решение.

Для решения воспользуемся формулой(3.2)

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k).$$

Если $x \le 1,$ $F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = 0,$

Если $1 < x \leq 4,$ **то**

$$F(x) = \sum_{x_k < 4} P(X = x_k) = P(X = 1) = 0{,}3.$$

Если $4 < x \leq 8$

$$F(x) = \sum_{x_k < 8} P(X = x_k) = P(X = 1) + P(X = 4) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

Если ***x>8,*** **то**

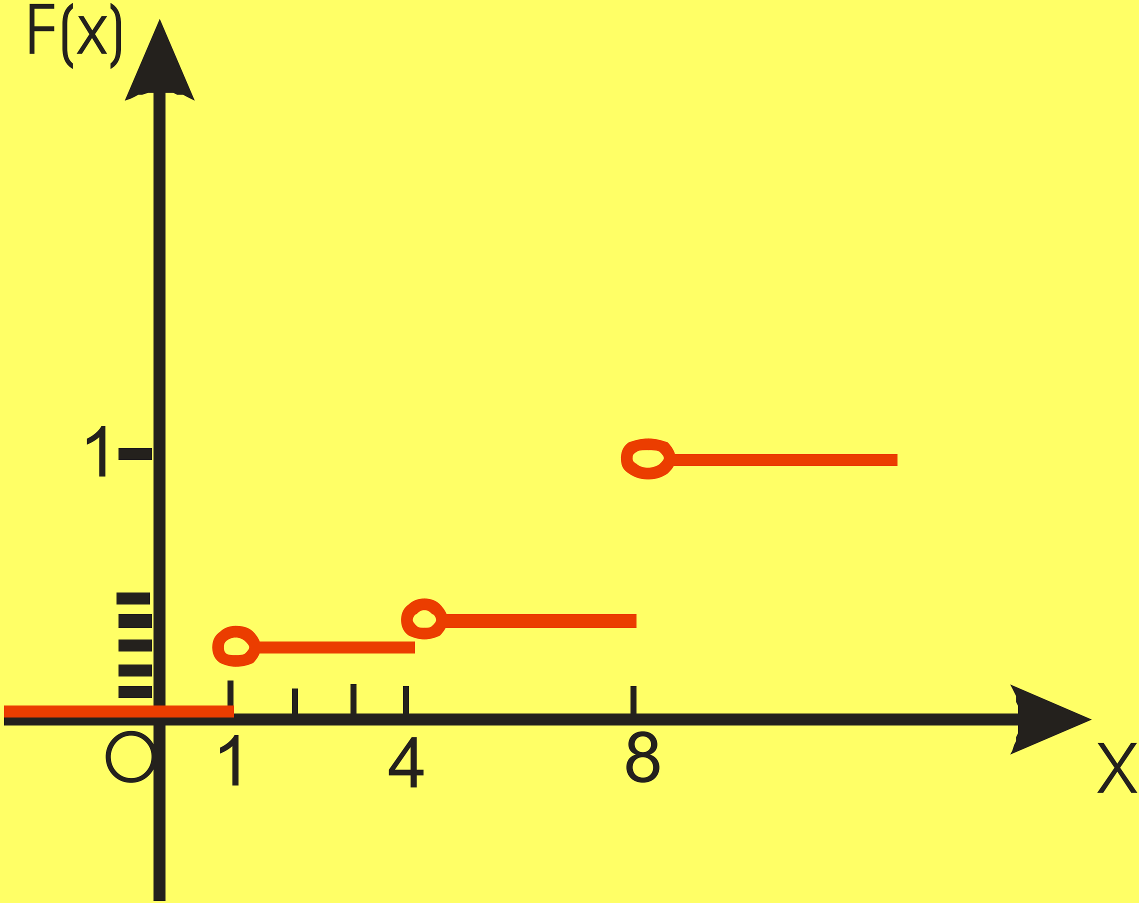
$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 8) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}6 = 1.$$

Получили

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0{,}3 & 1 < x \le 4 \\ 0{,}4 & 4 < x \le 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

График функции *F(x)* имеет вид



3.3 Определение плотности распределения. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Определение. **Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X*, называют функцию *f(x)*, которая является первой производной от функции распределения**

$$f(x) = F'(x). \qquad (3.5)$$

Таким образом из определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет значение принадлежащие интервалу (a,b)

равно определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах (a,b)

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \qquad (3.6)}$$

Доказательство.

Воспользуемся соотношением

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b),$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Учитывая формулу Ньютона-Лейбница:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.}$$

Геометрически полученный результат можно истолковывать так, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), **равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью *OX*, кривой распределения *f(x)* и прямыми** $x = a, x = b.$

Замечание. Если функция плотности распределения *f(x)* четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)dx. \quad (3.7)$$

Пример.

Задана плотность вероятности случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение принадлежащее интервалу

$$(0.5,1)$$

Решение.

Воспользуемся (3.6):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$P(0.5 < X < 1) = 2\int_{0.5}^{1} xdx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0.5}^{1} = 1 - 0.25 = 0.75.$$

3.4 Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.

Зная плотность распределения *f(x)*, можно найти функцию распределения *F(x)* по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \quad (3.8)$$

Действительно, мы обозначили через *F(x)* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Мы можем переписать это выражение в виде

$$F(x) = P(-\infty < X < x),$$

а тогда положив $a = -\infty, b = x,$

мы можем применить формулу (3.6)

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Пример. Найти функцию распределения по заданной плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b, \end{cases}$$

Построить график заданной функции.

Решение.

Запишем формулу (3.8)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

если

$$x \le a, \qquad f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0,$$

если $a < x \le b,$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} x\Big|_{a}^{x} = \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a},$$

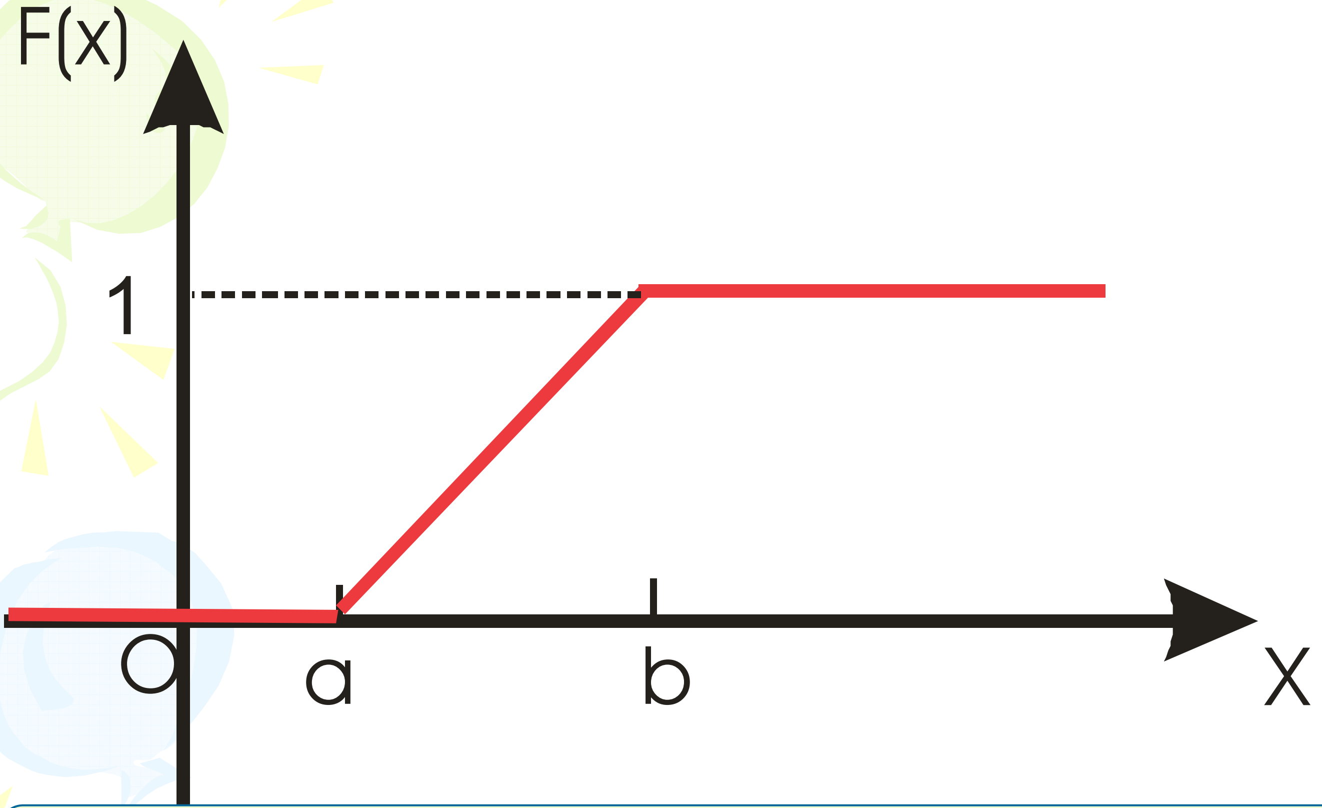
если $x > b,$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{x} 0dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} x \Big|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

В итоге мы получили

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



3.5 Свойства функции плотности распределения.

1. Плотность распределения - не отрицательная функция

$$f(x) \geq 0.$$

Доказательство.

Функция распределения *F(x)* не убывающая функция, а следовательно ее производная

$$\boxed{F'(x) = f(x) \geq 0.}$$

График плотности распределения, называется кривой распределения.

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах $(-\infty, \infty)$,

равен единице

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.}$$

Доказательство.

Несобственный интеграл выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$.

Очевидно, что такое событие достоверно, а следовательно вероятность равна единице.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью ***Ox*** **и кривой распределения, равна единице.**

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), **то**

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Наиболее часто встречаются законы равномерного, нормального и показательного распределения.

3.6 Вероятностный смысл плотности распределения.

По определению плотность распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Учитывая определение производной можно записать

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Разность стоящая в числителе, определяет вероятность того, что величина Х примет значение принадлежащее интервалу

$$(x, x+\Delta x).$$

Таким образом, предел отношения вероятности того, что непрерывная величина примет значение принадлежащее интервалу

$$(x, x+\Delta x)$$

к длине этого интервала, равно значению плотности распределения в точке (по аналогии с определением плотности массы в точке).

3.7 Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$,

называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (3.9)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (3.10)$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения *X* принадлежат отрезку $[a,b]$, **то**

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)dx. \quad (3.11)$$

Если возможные значения *X* принадлежат в всей оси, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx. \quad (3.12)$$

Для вычисления дисперсии также удобно пользоваться формулами

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2, \quad (3.13)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2. \quad (3.14)$$

Среднее квдратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (3.15)$$