Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Огюсте́н Луи́ Коши

Тема7. «Несобственный интеграл.»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

7.1 Несобственный интеграл первого рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования)

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx,$ **где промежуток** $[a,b]$ **конечный, а подынтегральная функция** $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a,b],$ **называют собственным интегралом.**

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$, тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$,

то его называют **несобственным интегралом первого рода** и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

В случае, когда предел равен конечному числу, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично, определяется несобственный интеграл первого рода на промежутке $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, можно представить в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла:

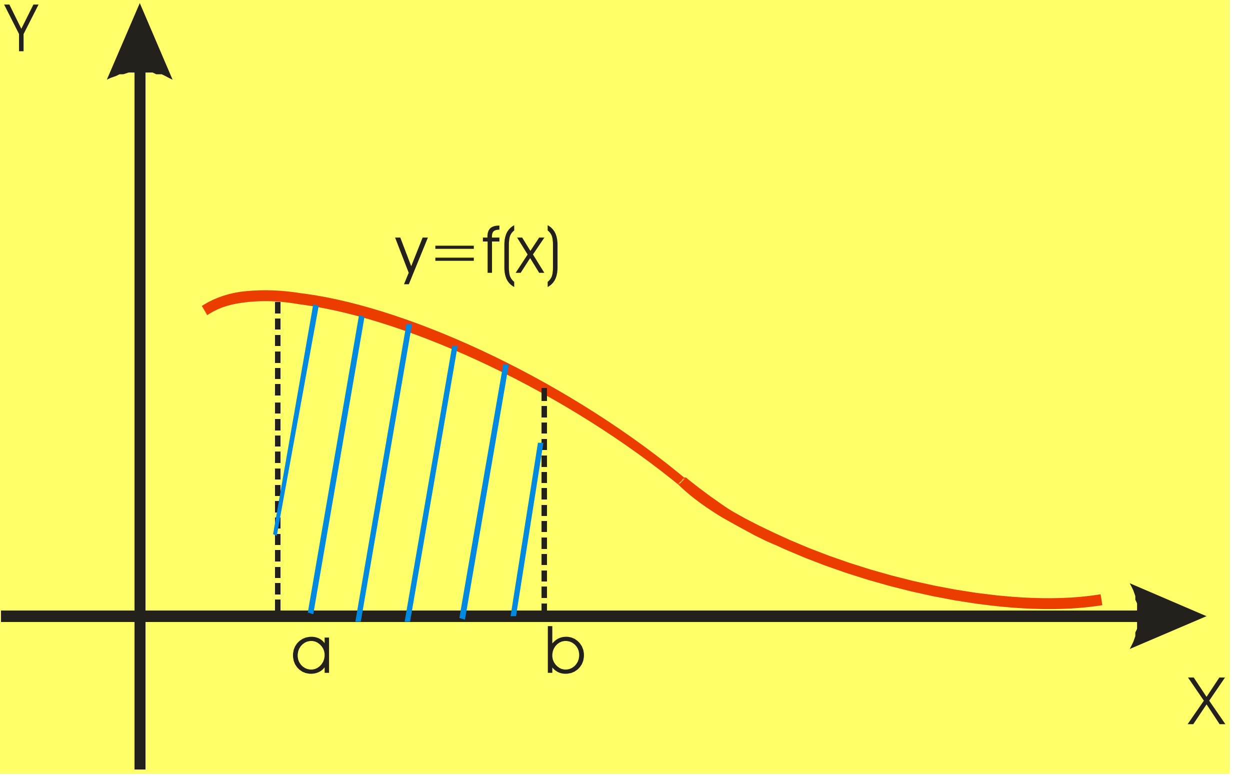
если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ **выражает площадь ограниченной области,**

ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс

и линиями ***x=a, x=b,*** то **несобственный интеграл**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной



между линиями

$$y = f(x),$$

x=a и осью абсцисс.

Пример: Вычислить несобственные интегралы и установить их расходимость:

1. $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right)=1,$$

данный интеграл сходится.

2. $$\int_{-\infty}^{0}\cos x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\cos x dx=\lim_{a\to-\infty}\sin x\Bigg|_{a}^{0}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(0-\sin a)=-\lim_{a\to-\infty}\sin a,$$

предел при $a\to-\infty$ не существует,

а значит интеграл расходится.

3. $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty,$$

интеграл расходится.

Теорема1: **Если на промежутке** $[a,+\infty)$ **функции** $f(x)$, $\varphi(x)$ **непрерывны и для них выполняется условие**

$$0\le f(x)\le\varphi(x),$$ **то из сходимости интеграла** $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ **следует сходимость** $\int_a^{+\infty}f(x)dx$,

а из расходимости $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, **следует расходимость** $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

Пример 4: Исследовать сходится ли интеграл: $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$

Решение:

При $1 \le x, \qquad \frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}$

В примере 1 мы получили $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

т.е. данный интеграл сходится, а тогда по теореме 1, будет сходиться и исходный интеграл.

Теорема 2 : **Если существует предел**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k, 0<k<\infty, \qquad (f(x)>0, \varphi(x)>0),$$

то $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx,$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **по отношению к сходимости**

ведут себя одинаково, т.е. они оба либо сходятся, либо расходятся.

Пример 5: Исследовать сходимость интеграла:

$$\int_1^{+\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$$

Решение;

Мы знаем, что $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ **(т.е. сходится),**

далее применяем теорему 2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} \cdot \frac{\frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} \frac{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{(x^2+2)(x^2+1)} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{2}{x^2})(1+\frac{1}{x^2})}=1$$

Мы получили *k=1*, а следовательно по теореме 2, два интеграла должны вести себя одинаково по отношению к сходимости, т.е. исходный интеграл сходится.

7.2 Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $y = f(x)$ **определена и непрерывна при**

$$a \le x < c, \quad \text{а в точке} \quad x = c$$

функция претерпевает разрыв либо неопределенна, тогда

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом второго рода.

Если предел стоящий справа существует, то интеграл называют сходящимся.

Если функция имеет разрыв в левом конце отрезка $(a, c]$

т.е. в точке $x = a,$ **то** $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)dx.$

Если функция имеет разрыв в некоторой точке $x = x_0$, **находящийся внутри отрезка** $[a, c]$, **тогда**

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^c f(x)dx.$$

Пример:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} \int_0^b (1-x)^{-\frac{1}{2}} d(1-x) =$$

$$= -2 \lim_{b\to 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^b = -2 \lim_{b\to 1-0} \left((1-b)^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}} \right) = 2$$

Теорема 1: Если на промежутке $[a,c)$ функции $f(x), \varphi(x)$ непрерывны, а в точке $x=c$, функции претерпевают разрыв и на этом промежутке выполняется условие $0 < f(x) \le \varphi(x)$,

то **из сходимости** $\int_a^c \varphi(x)dx$ следует **сходимость** $\int_a^c f(x)dx$,

а из **расходимости** $\int_a^c f(x)dx$ следует **расходимость** $\int_a^c \varphi(x)dx$.

Теорема 2: Пусть на промежутке $[a,c)$ функции $f(x), \varphi(x)$ непрерывны, а в точке $x=c$ функции претерпевают разрыв.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=k, 0<k<\infty$, то

$\int\limits_a^c \varphi(x)dx$ и $\int\limits_a^c f(x)dx$ будут вести себя одинаково

по отношению к сходимости, т.е. они будут либо сходиться, либо расходиться.

Пример: Сходится ли интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x},$$

Решение

Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, **имеет на *[0,1]* единственный разрыв в точке *x=0*.**

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$,

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{b\to 0+0}\int_b^1\frac{dx}{x}=\lim_{b\to 0+0}\ln x\Big|_b^1=\lim_{b\to 0+0}(\ln 1-\ln b)=\infty$$

т.е. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}$ **расходится.**

Воспользуемся теоремой 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

т.е. исходный интеграл будет расходиться.