Тема 8. «Методы численного интегрирования»

Не для всякой непрерывной функции ее первообразная вычисляется через элементарные функции. Задача численного интегрирования состоит в вычислении приближенного значения интеграла

$$J(f)=\int_a^b f(x)dx,$$

где *f* - заданная функция.

Простейшим методом численного интегрирования является *метод прямоугольников.* Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Разделим отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n=b$ на *n* равных частей длины Δx:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Для середины каждого такого отрезка вычислим значение функции $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (7.1)$$

Это и есть квадратурная *формула прямоугольников.* В данном случае площадь фигуры, ограниченной кривой *y*=*f*(*x*), осью *x* и прямыми $x=a, x=b$, приближенно равна сумме площадей прямоугольников.

Ошибка, совершаемая при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число n, т.е. чем меньше шаг деления $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (7.1) оценивается с помощью следующей формулы

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i). В этом случае площадь криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных прямолинейных трапеций. Площадь каждой такой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту

$$s_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{2} h_i, \ i=1, 2,..., n.$$

Складывая эти равенства, получаем *формулу трапеций* для численного интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (7.2)$$

Абсолютная погрешность приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2},$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$.

Отметим, что для линейной функции $y = kx + b$ формулы (7.1) и (7.2) дают точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})). \qquad (7.3)$$

В этом случае отрезок $[a,b]$ разделили на четное число равных частей $n = 2m$. Формула (7.3) называется формулой парабол или Симпсона.

Абсолютная погрешность вычисления по формуле (7.3) оценивается соотношением

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180(2n)^4},$$

где $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{IV}(x) \right|$.

Формула (7.3) дает точное значение интеграла во всех случаях, когда $f(x)$ – многочлен, степень которого меньше или равна трем (тогда $f^{IV} = 0$).

Типовой пример. Найти приближенное значение интеграла $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона. В каждом случае оценить погрешность полученного результата. Вычислить интеграл с помощью команды *int.*

Решение.

Разделим отрезок $[0,1]$ на десять равных частей. Обозначим точки деления $[0,1]$ через $x_0 = 0, x_1 = 0.1, \ldots, x_{10} = 1$.

```
> restart;
> y:=(x)->sqrt(1+x^4):
> b:=1;a:=0;n:=10;m:=n/2;
>x0:=0;x1:=0.1;x2:=0.2;x3:=0.3;x4:=0.4;x5:=0.5;x6:=0.6;x7:=0.7;
x8:=0.8;x9:=0.9;x10:=1;
```

Согласно квадратурной формуле прямоугольников (7.1)

```
>yp0:=y((x0+x1)/2);yp1:=y((x1+x2)/2);yp2:=y((x2+x3)/2);yp3:=y((x3+x4)/2
);yp4:=y((x4+x5)/2);yp5:=y((x5+x6)/2);yp6:=y((x6+x7)/2);
yp7:=y((x7+x8)/2);yp8:=y((x8+x9)/2);yp9:=y((x9+x10)/2);
> Jpr:=(b-a)*(yp0+yp1+yp2+yp3+yp4+yp5+yp6+yp7+yp8+yp9)/n;
```

$Jpr := 1.088840156$

Оценим абсолютную погрешность приближения, полученного по формуле прямоугольников

```
>RP2:=simplify(diff(y(x),x$2));
```

```
R0:=subs(x=(x0+x1)/2,RP2);R1:=subs(x=(x1+x2)/2,RP2);R2:=subs(x=(x2+x3)/2,RP2);R3:=subs(x=(x3+x4)/2,RP2);R4:=subs(x=(x4+x5)/2,RP2);R5:=subs(x=(x5+x6)/2,RP2);R6:=subs(x=(x6+x7)/2,RP2);R7:=subs(x=(x7+x8)/2,RP2);R8:=subs(x=(x8+x9)/2,RP2);R9:=subs(x=(x9+x10)/2,RP2);
```

```
> MP2:=abs(R9);
```

$MP2 := 2.816941542$

```
> RPR:=MP2*(b-a)^(3)/(24*n^2);
```

$RPR := 0.001173725642$

таким образом, J= 1.088840156 +- 0.001173725642

Согласно квадратурной формуле трапеций (7.2)

```
> y0:=y(x0);y1:=y(x1);y2:=y(x2);y3:=y(x3);y4:=y(x4);y5:=y(x5);
y6:=y(x6);y7:=y(x7);y8:=y(x8);y9:=y(x9);y10:=evalf(y(x10));
```

```
> Jtrap:=simplify((b-a)*((y0+y10)/2+y1+y2+y3+y4+y5+
y6+y7+y8+y9)/n);
```

$Jtrap = 1.0906$

Погрешность формулы трапеций определим исходя из факта существования второй непрерывной производной.

```
> Y2:=diff(y(x),x$2);
```

```
> simplify(Y2);
```

Вычисляем значения второй производной в точках $x_0,...,x_{10}$, и находим наибольшее M_2.

```
> R0:=subs(x=x0,RP2);R1:=subs(x=x1,RP2);R2:=subs(x=x2,RP2);
R3:=subs(x=x3,RP2);R4:=subs(x=x4,RP2);R5:=subs(x=x5,RP2);R6:=subs(x=x6,RP2);R7:=subs(x=x7,RP2);R8:=subs(x=x8,RP2);R9:=subs(x=x9,RP2);R10:=evalf(subs(x=x10,RP2));
```

```
> MT2:=abs(R10);
```

$MT2 := 2.828427124$

```
> Rtrap:=MT2*(b-a)^(3)/(12*n^2);
```

$Rtrap := 0.002357022603$

Rtrap=1.090607926+-0.002357022604

По формуле Симпсона

```
> JSimp:=simplify((b-a)*(y0+y10+2*(y2+y4+y6+y8)+4*
(y1+y3+y5+y7+y9))/(6*m));
```

$JSimp := 1.089429384$

Остаточный член можно определить, учитывая, что $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка

```
> RS4:=simplify(diff(y(x),x$4));
```

```
>R0:=subs(x=x0,RS4);R1:=subs(x=x1,RS4);R2:=subs(x=x2,RS4);R3:=subs(x=x3
,RS4);R4:=subs(x=x4,RS4);R5:=subs(x=x5,RS4);R6:=subs(x=x6,RS4);R7:=sub
s(x=x7,RS4);R8:=subs(x=x8,RS4);R9:=subs(x=x9,RS4);R10:=subs(x=x10,RS4)
;
```

```
> M4:=abs(R8);
```

$M4 := 14.05766554$

```
> RSIMP:=M4*(b-a)^(5)/(180*(2*n)^(4));
```

$RSIMP := 0.4881133868\ 10^{-6}$

таким образом J=1.089429384+- $0.4881133868\ 10^{-6}$

Для вычисления неопределенных и определенных интегралов Maple предоставляет следующие функции:

```
int(f,x);  int(f,x=a..b);
Int(f,x);  Int(f,x=a..b).
```

Здесь *f*-подынтегральная функция, *x*-переменная, по которой выполняются вычисления, *a* и *b* – нижний и верхний пределы интегрирования. Команда Int выдает на экран интеграл в виде математической формулы.

```
> restart;
```

```
> Int(sqrt(1+x^4),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx$$

```
> evalf(int(sqrt(1+x^4),x=0..1));
```

1.089429413

Задания для самостоятельного решения по теме 7.

1. Найти приближенное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона. В каждом случае оценить погрешность полученного результата. Вычислить интеграл с помощью команды *int.*

1.1 $\int\limits_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$; **1.2** $\int\limits_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x dx$; **1.3** $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{tg x^2}{x^2+1} dx$; **1.4** $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1} dx$;

1.5 $\int\limits_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx$; **1.6** $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$; **1.7** $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$; **1.8** $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx$;

1.9 $\int\limits_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x dx$; **1.10** $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{tg(x^2+0,5)}{1+2x^2} dx$.