Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема7. «Прямая в пространстве»

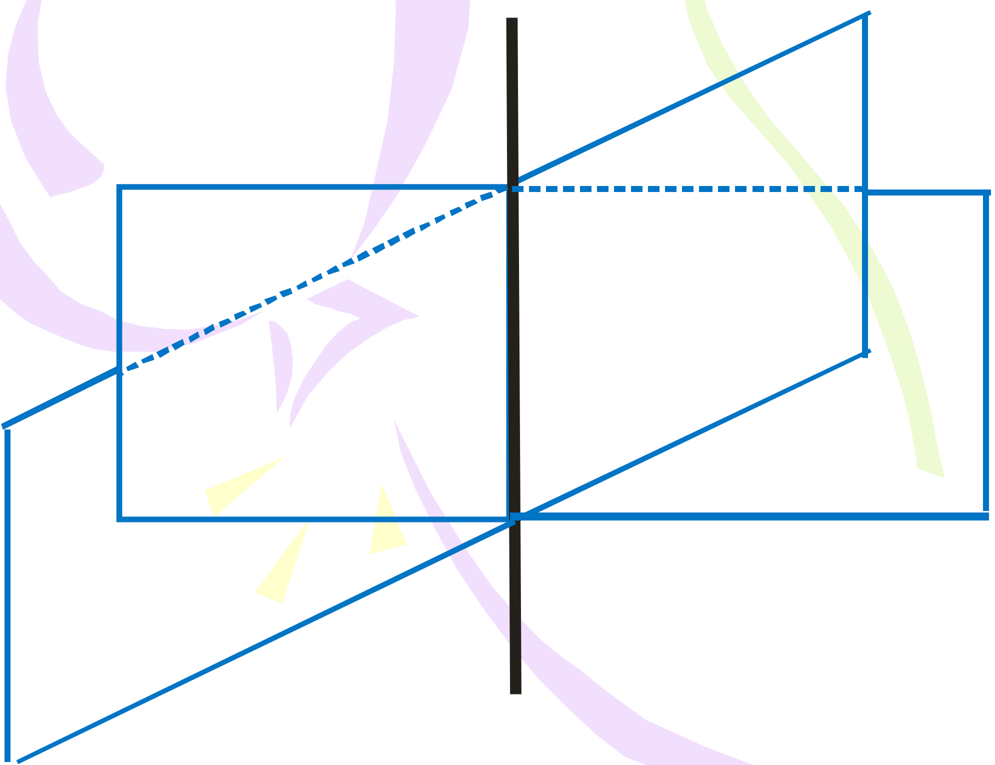
Кафедра теоретической и прикладной математики

разработана доц.Дуниной Е.Б.

7.1 Прямая как линия пересечения двух плоскостей.

Прямая линия в пространстве может быть получена в результате пересечения двух плоскостей, поэтому аналитически может быть задана системой двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (7.1)$$



Уравнения (7.1) называются **общими уравнениями прямой.**

Каждое из уравнений системы есть уравнение плоскости, а плоскости могут пересекаться лишь в том случае, когда их нормальные векторы

$$\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$$

не коллинеарны.

В случае коллинеарности векторов их соответствующие координаты пропорциональны.

Следовательно, система двух уравнений определит прямую в том и только том случае, когда коэффициенты

$$A_1, B_1, C_1$$

не пропорциональны соответственно коэффициентам

$$A_2, B_2, C_2,$$

т.е. когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ **равен двум.**

7.2 Уравнение прямой проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору.

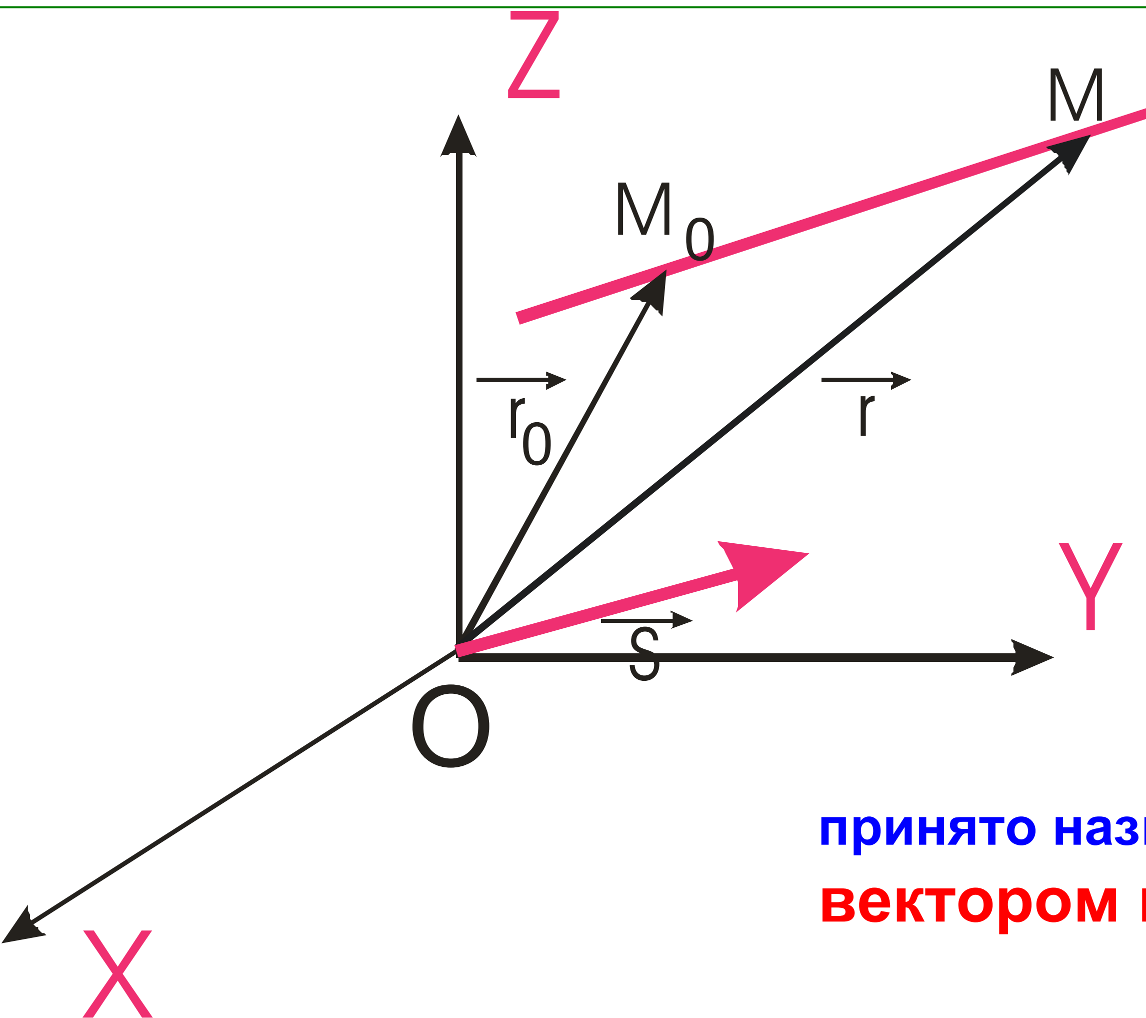
Положение прямой в пространстве вполне определено, если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **этой прямой и вектор**

$\vec{s}(m, n, p)$ **отличный от нулевого, параллельный прямой.**

Возьмем на прямой переменную точку *M(x,y,z).*

Векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}$

коллинеарны, поэтому при любом положении точки *M* на прямой будет иметь место равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$



где *t* –числовой множитель

Если $\overrightarrow{M_0M}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{S}$ то *t>0,* в противном случае *t<0.*

Вектор $\vec{S}$ принято называть направляющим вектором прямой.

Из рисунка видно,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (7.2)$$

Уравнение называют векторным уравнением прямой в пространстве.

Переходя от векторного уравнения прямой (7.2) к равносильным ему координатным уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (7.3)$$

Уравнения (7.3) называются параметрическими уравнениями прямой.

Исключим параметр *t* , а затем приравняем правые части

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.4) называется каноническим уравнением прямой.

Если $\vec{s}(m,n,p)$ **направляющий вектор прямой,**

а *α, β, γ* –углы образуемые этим вектором с *Ox, Oy,Oz* соответственно, то направляющие косинусы этого вектора

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{m}{s}$$

$$\cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{n}{s}$$

$$\cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{p}{s}$$

7.3 Уравнение прямой проходящей через две данные точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

через которые проходит прямая. Принимая за направляющий вектор прямой вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

и учитывая (7.4) можем записать

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

или

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1} \quad (7.5)$$

Это уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

7.4 Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду.

Для того чтобы привести общее уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (7.6)$$

к каноническому виду, нужно определить координаты *(a,b,c)* какой либо точки *M_0* лежащей на прямой и координаты направляющего вектора $\vec{s}(m,n,p)$ прямой.

1. Для определения координат какой либо точки *$M_0(x,y,z)$* лежащей на прямой, достаточно задать численное значение одной из искомых координат, а затем из системы уравнений (7.6) найти соответствующие значения двух других координат.

2. Т.к. данная прямая есть результат пересечения двух плоскостей, то она перпендикулярна к каждому из нормальных векторов этих плоскостей

$$\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1),$$
$$\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$$

Поэтому в качестве направляющего вектора $\vec{s}(m, n, p)$

можно взять любой вектор, перпендикулярный $\vec{n}_1, \vec{n}_2,$

например, их векторное произведение, т.е. положить

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

где

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ \mathrm{n} = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Пример: **Найти каноническое уравнение прямой**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение.

1. Положим, например, *z=0*, получим

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -2 и сложим два уравнения $-3x = 6$ **и** $x = -2.$

Подставив $x = -2.$ **в первое уравнение, найдем *y***

$$-2 + 2y = 4$$

$$2y = 6$$

и $y = 3.$

Таким образом, одна из точек, принадлежащих прямой имеет координаты *(-2,3,0)*

2. Запишем координаты направляющих векторов

$$\vec{n}_1 = (1,2,3), \vec{n}_2 = (2,1,-4)$$

Полагая

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-11\vec{i} + 10\vec{j} - 3\vec{k}$$

получим ***m=-11, n=10, p=-3.***

Каноническое уравнение примет вид

$$\frac{x+2}{-11} = \frac{y-3}{10} = \frac{z}{-3}$$

7.5 Угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми в пространстве назовем любой из двух углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным.

Пусть даны две прямые, заданные их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0^1}{m_1}=\frac{y-y_0^1}{n_1}=\frac{z-z_0^1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_0^2}{m_2}=\frac{y-y_0^2}{n_2}=\frac{z-z_0^2}{p_2}.$$

За угол *φ* между прямыми, можно взять угол между их направляющими векторами

$$\vec{s}_1 \text{ и } \vec{s}_2$$

Т.к.

$$\vec{s}_1\vec{s}_2 = |\vec{s}_1||\vec{s}_2|\cos\varphi$$

то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Для нахождения острого угла между прямыми, числитель правой части следует взять по модулю.

Условие параллельности прямых.

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы

$$\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1) \text{ и } \vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$$

коллинеарны, а проекции пропорциональны. Поэтому необходимое и достаточное условие параллельности прямых запишется в виде

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Условие перпендикулярности прямых.

Если прямые перпендикулярны, то угол между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$

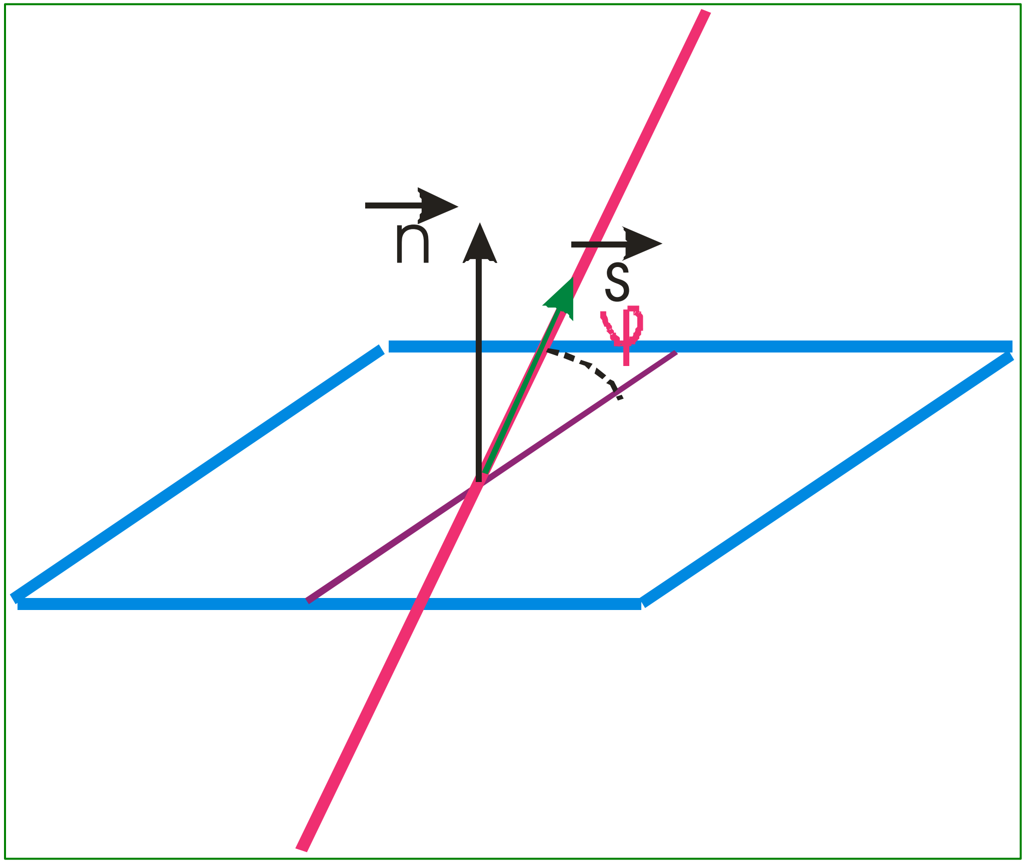
равен *90⁰*, а скалярное произведение их равно нулю

$\vec{s}_1\vec{s}_2 = 0$ и $$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

7.6 Угол между прямой и плоскостью.

Пусть даны плоскость $$Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая $$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1}$$



Улом φ между прямой и плоскостью называется угол, образованный данной прямой и плоскостью.

Рассмотрим угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой

$$\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{s}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\vec{n}\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$

или

$$\sin\varphi = \frac{|Am_1 + Bn_1 + Cp_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}} \qquad (7.7)$$

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$

перпендикулярны, а их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{n}\vec{s} = 0 \text{ и } Am_1 + Bn_1 + Cp_1 = 0 \qquad (7.8)$$

Выражение (7.8) называется ***условием параллельности прямой и плоскости.***

Если прямая **перпендикулярна** к плоскости, то векторы

$$\vec{n} \text{ и } \vec{s}$$

коллинеарны. Поэтому **условие перпендикулярности прямой к плоскости** запишется в виде

$$\frac{A}{m_1} = \frac{B}{n_1} = \frac{C}{p_1} \qquad (7.9)$$

7.7 Определение общих точек прямой и плоскости.

Для определения **общих точек прямой**

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (7.10)$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (7.11)$$

уравнения (7.10),(7.11) надо решить совместно, считая x,y,z неизвестными.

Полагая

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

запишем уравнение прямой **в параметрической форме**

$$x = x_0 + mt,$$

$$y = y_0 + nt,$$

$$z = z_0 + pt. \qquad (7.12)$$

Подставляя значения *x,y,z* из (7.12) в (7.11) получим

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Выражение перепишем в виде

$$Ax_0 + By_0 + cz_0 + D + t(Am + Bn + Cp) = 0 \qquad (7.13)$$

Возможны три случая:

1. $Am + Bn + Cp \neq 0,$ **тогда** $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$

имеет определенное конечное значение. Подставив это значение в уравнение (7.12), получим единственную точку пересечения прямой с плоскостью.

2. **Если** $$Am + Bn + Cp = 0,$$ **но**

$$Ax_0 + By_0 + cz_0 + D \neq 0,$$

то уравнение (7.13) не имеет решения.

Прямая не имеет ни одной общей точки с плоскостью.

3. **Если** $$Am + Bn + Cp = 0$$ **и**

$$Ax_0 + By_0 + cz_0 + D = 0$$

то любое значение *t* будет решением (7.13). В этом случае прямая лежит в плоскости.

7.8 Условие расположения двух прямых в одной плоскости.

При каком условии прямые

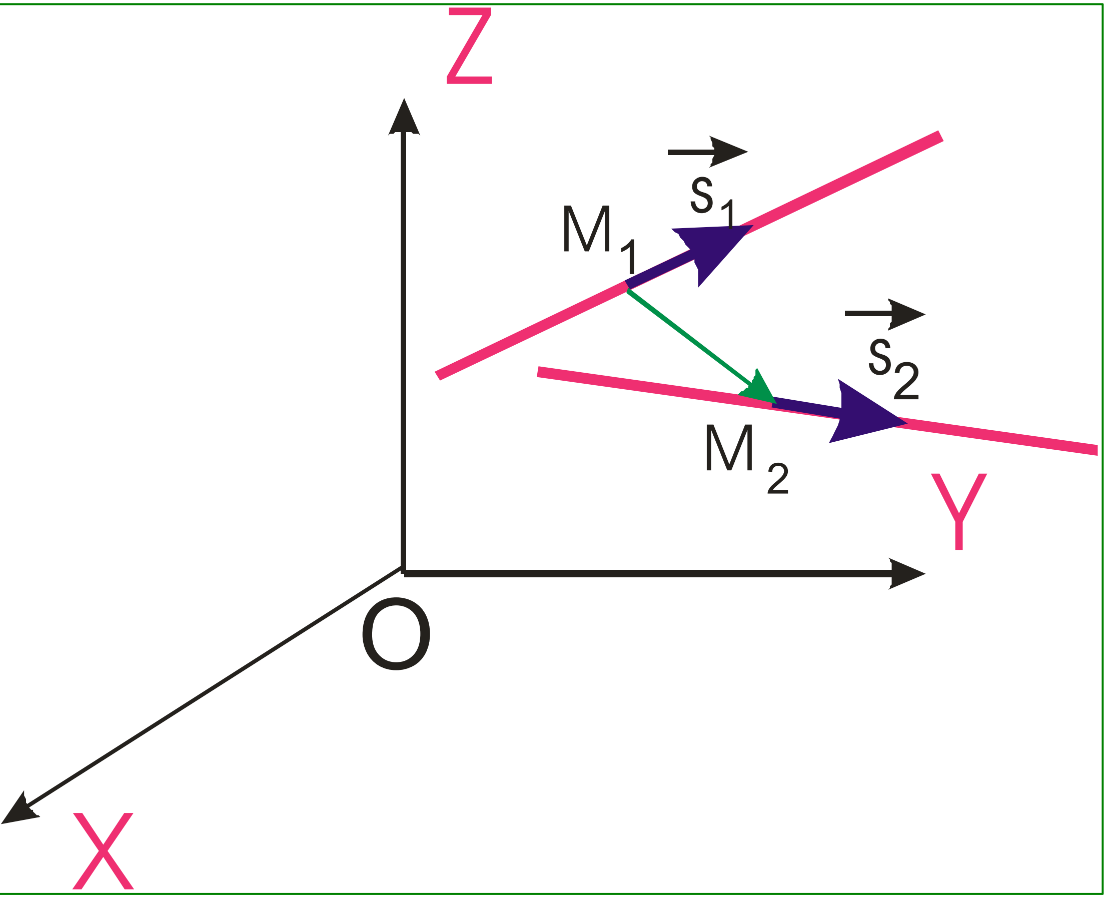
$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

будут лежать в одной плоскости?

Вектора $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$

направляющие векторы прямых. Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{M}_2(x_2, y_2, z_2)$

принадлежат первой и второй прямой соответственно.



Если прямые лежат в одной плоскости, то векторы

$$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$$

компланарны.

Следовательно для того чтобы прямые лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно чтобы смешанное произведение векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$$

было равно нулю.

В координатах это условие запишется так:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.14)$$

Причем, если выполнено условие (7.14) и $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

то прямые *параллельны.*

Если выполнено условие (7.14), но $\dfrac{m_1}{m_2} \neq \dfrac{n_1}{n_2} \neq \dfrac{p_1}{p_2}$,

то прямые пересекаются.

Пример:

Проверить лежат ли в одной плоскости следующие прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}, \qquad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{0}.$$

Решение.

Направляющие векторы прямых $\vec{s}_1(2,3,1), \vec{s}_2(1,2,0).$

Точки $M_1(1,1,2), M_2(-1,2,1)$

лежат на первой и второй прямой соответственно.

Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2}(-2,1,-1).$$

Согласно (7.14) вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 3 + 4 = 4 \neq 0$$

Следовательно прямые не лежат в одной плоскости.

7.9 Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

Даны две прямые $$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

и $$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Требуется определить кратчайшее расстояние между ними.

1. Если прямые пересекаются, выполняется условие(7.14) и

$$\frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2} \neq \frac{p_1}{p_2},$$

то кратчайшее расстояние между ними равно нулю.

2. Если прямые параллельны $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

и выполняется условие (7.14), то расстояние между ними можно найти как расстояние от точки до прямой.

3. Если прямые не лежат в одной плоскости, то это скрещивающиеся прямые. Для них

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Очевидно, что кратчайшее расстояние между ними будет равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через первую и вторую прямую.

Направляющие векторы прямых $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$.

Вектор

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

будет общей нормалью плоскостей.

Искомое расстояние *d* между прямыми будет равно абсолютной величине проекции вектора

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ **на нормаль** $\vec{n}$

$$d = \left| Пр_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_2} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} \qquad (7.15)$$

Пример:

Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-2}, \qquad \frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}.$$

Решение.

Точки $M_1(-4,4,-1), M_2(-5,5,5)$ **лежат на прямых, тогда**

$\overrightarrow{M_1M_2}(-1,1,6).$ **Вычислим определитель**

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

т.е. данные прямые не лежат в одной плоскости.

Направляющие векторы прямых

$$\vec{s}_1(2,-1,-2), \vec{s}_2(4,-3,-5).$$

Вектор $\vec{n}$ **перпендикулярный к обеим прямым, определим как**

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Итак $\vec{n}(-1,2,-2)$ **и** $\overrightarrow{M_1M_2}(-1,1,6).$

Тогда искомое расстояние

$$d = \left| Пр_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \vec{n} \right|} = \frac{\left| (-1)(-1) + 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{\left| -9 \right|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$