# 1 МАТРИЦЫ

**Матрицей** размера $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из $m$ строк и $n$ столбцов.

Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки и обозначают большими буквами А,В,С и т.д или большими буквами с индексами $A_{m\,n}$, $B_{m\,n}$ и т.д.

**Пример** 1.

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{24} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B_{33} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad C_{mn} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы
Первый индекс элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца.
Например, элемент $a_{23}$ стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.
Например, элемент $\boldsymbol{a_{i\,j}}$ стоит во ***i*-ой строке, *j*- м столбце**.

Ещё об обозначениях.

Матрицу $A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ записывают ещё так : $A_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ или так : $A_{23} = \{a_{i\,j}\}_{2\times 3}$.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, причём число ее строк или столбцов называется порядком квадратной матрицы.

На примере квадратной матрицы $A_{3\,3}$ порядка 3 объясним некоторые специальные названия

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ E_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{33} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, C_{33} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}, O_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{3\,3}$ – **квадратная** матрица порядка 3. Её элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ образуют главную диагональ.
$E_{3\,3}$ – **единичная**, $B_{3\,3}$ – **треугольная**, $C_{3\,3}$ – **диагональная**, $O_{3\,3}$ – **нулевая.**

**Равенство матриц** Две матрицы $A_{m\,n}$ и $B_{p\,q}$ называются равными, если они имеют одинаковые размеры ($m = p$, $n = q$) и равные элементы на одинаковых местах : $a_{ij} = b_{ij}$.
Напимер,

Пусть $A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B_{23} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$

Тогда $A$=$B$, если $a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ a_{13} = b_{13},\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22},\ a_{23} = b_{23}$.

**Транспонирование**. Дана матр А размера $m \times n$. Если строки этой матр записать в столбцы, то получим матрицу, которая обозначается $A^{\perp}$ и называется транспонированной к матрице А.


Витебск, УО «ВГТУ», Статковский Н. С. , 2012

**Пример** 2. $A_{22}=\begin{pmatrix}3&5\\7&8\end{pmatrix}$, $A_{22}^{\perp}=\begin{pmatrix}3&7\\5&8\end{pmatrix}$, $B_{23}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B_{32}^{\perp}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$ – матрица размера $3\times 2$

## Операции над матрицами

**Суммой** (**разностью**) матриц A и B одного размера называется матрица, обозначаемая A+B (соответственно A−B), элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

**Произведением** матрицы A **на число** λ называется матрица, обозначаемая λA, элементы которой равны произведению элементов матрицы A на число λ.

**Пример** 3. $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&-5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&5&3\\1&-3&2\end{pmatrix}$. Найти $A+B,\ A-B,\ 3A,\ 2A-3B$

Решение.

$$A+B=\begin{pmatrix}1+4&4+5&2+3\\3+1&-5+(-3)&6+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&9&5\\4&-8&8\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1-4&4-5&2-3\\3-1&-5-(-3)&6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot1&3\cdot4&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot(-5)&3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&12&6\\9&-15&18\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2&8&4\\6&-10&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&15&9\\3&-9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-7&-5\\3&-1&6\end{pmatrix}$$

В символической записи: если A = $\{a_{ij}\}_{m\times n}$, B = $\{b_{ij}\}_{m\times n}$,
то A + B = $\{a_{ij}+b_{ij}\}_{m\times n}$, A − B = $\{a_{ij}-b_{ij}\}_{m\times n}$, λA = $\{\lambda a_{ij}\}_{m\times n}$.

**Умножение матриц**. Перемножать можно только так называемые согласованные матрицы используя специальное правило.

Матрицы $A_{mn}$, $B_{pq}$ называются **согласованными**, если длина строки первой равна высоте столбца второй, то есть $n=p$.

**Пример** 4.

$A_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$, $B_{2\times4}=\begin{pmatrix}7&8&9&10\\11&12&13&14\end{pmatrix}$ – согласованы.

Однако $B_{2\times4}=\begin{pmatrix}7&8&9&10\\11&12&13&14\end{pmatrix}$ и $A_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$ – не согласованы.

Очевидно две квадратные матрицы одного порядка всегда согласованны.

$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&1\\6&7&9\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7&3&4\\0&1&3\\2&6&5\end{pmatrix}$ – согласованы.

Специальное **правило умножения матриц** покажем вначале на примере.

**Пример** 5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$.

1-ю строку A “умножаем” на столбцы B и записываем в 1-ю строку AB.
2-ю строку A “умножаем” на столбцы B и записываем в 2-ю строку AB.

**Пример** 6.

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\quad B_{3\times4}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\end{pmatrix}$$

$$A_{2\times3}\cdot B_{3\times4}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{pmatrix}=C_{2\times4}$$

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31},\quad c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32},\ \ldots,\ c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33},\ \ldots\ .$$

Общая формула : $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$.

**Пример** 7.

*а*) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$. В примере 5 получено $AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$.

$$BA=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+18 & 10+24\\ 7+24 & 14+32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{AB\neq BA}$$

[**не так** как у чисел например $5\cdot8=8\cdot5$]

*б*) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $AE=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot1\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.\quad\Rightarrow \boxed{AE=A,\quad EA=A.}$$

[роль матрицы $E$ такая как роль числа 1. Например $1\cdot8=8$]

*в*) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -2\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 8\end{pmatrix}$, $CD=\begin{pmatrix}7-2-24\\ 28+0-16\\ 35-3+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\ 12\\ 80\end{pmatrix}$

## Свойства операций над матрицами

1. A+B=B+A – коммутативность сложения.
2. A+(B+C)=(A+B)+C – ассоциативность сложения.
3. A+O = A
4. A(BC)=(AB)C – ассоциативность умножения.
5. A(B+C)=AB+AC, (A+B)C=AC+BC дистрибутивность
6. (αA)B=A(αB)=α(AB)
7. AE = EA = A

Во всех свойствах предполагается, что при сложении матрицы имеют один размер, а при умножении согласованы.

## Упражнения по теме МАТРИЦЫ

1. Для заданной матрицы $A$ написать транспонированную матрицу $A^{\perp}$:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix};\quad б)\ A=\begin{pmatrix}3&5&0\\2&1&8\end{pmatrix};\quad в)\ A=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix};\quad г)\ A=\begin{pmatrix}7\\8\\2\end{pmatrix}$$

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&-7\\8&9&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&-3\\4&5&-2\end{pmatrix}$. Написать матрицы $A+B,\ A-B,\ 4A,\ 2A-3B$.

3. Найти $a, b, c, d$ если: $a)\ \begin{pmatrix}a&4&b\\d&c&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&4&7\\5&8&a\end{pmatrix}$; $б)\ 2\begin{pmatrix}a&1\\5&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&b\\a&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&7\\c&5\end{pmatrix}$.

4. Вычислить произведения матриц: $a)\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$; $б)\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$;

$$в)\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\qquad г)\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\0&3&1&2\end{pmatrix};\quad д)\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3;$$

5. Найти $x, y$ из равенства $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$.

6. Найти $x, y, z$ из равенства $\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$.

**Ответы.**

1) $a)\ A^{\perp}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$; $б)\ A^{\perp}=\begin{pmatrix}3&2\\5&1\\0&8\end{pmatrix}$; $в)\ A^{\perp}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $г)\ A^{\perp}=\begin{pmatrix}7&8&2\end{pmatrix}$.

2) $A+B=\begin{pmatrix}3&0&-10\\12&14&-1\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}-1&0&-4\\4&4&3\end{pmatrix}$, $4A=\begin{pmatrix}4&0&-28\\32&36&4\end{pmatrix}$, $2A-3B=\begin{pmatrix}-4&0&-5\\4&3&8\end{pmatrix}$.

3) *a)* $a = 6, b = 7, c = 8, d = 5$;. *б)* $a = 3, b = 5, c = 13, d = 4$;

5) $x = 4, y = 3$.; 6) $x = -3, y = 1, z = 2$.


Витебск, УО «ВГТУ», Статковский Н. С. , 2012

## 2 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

Каждой квадратной матрице А по специальному правилу ставится в соответствие число, которое называется определителем матрицы А и обозначается det A или $|A|$.

Изложим это правило.

n = 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$

n = 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. $\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. ( 1 )

Числа $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ из (1) называются алгебраическими дополнениями и опрределяются следующим образом.

Минором элемента $a_{ij}$ матрицы А, называются число, обозначаемое $M_{ij}$ и равное определителю матрицы, полученной из матрицы А вычёркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ матрицы А называются число обозначаемое $A_{ij}$ и равное $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

**Пример 1**. *а*) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot7-5\cdot(-4)=34$

*б*) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $M_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=4\cdot0-6\cdot1=-6;$ $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=1\cdot(-6)=-6$

$M_{12}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=0-7=-7;$ $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)\cdot(-7)=7$

$M_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}=-12-28=-40;$ $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=1\cdot(-40)=-40$

$\det A=[\text{по формуле (1)}]=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-6)+2\cdot7+(-3)(-40)=128$

Формулу (1) называют разложением определителя по первой строке. Таким образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1a)$$

**Пример 2**

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(10-3)+2\cdot(0-18)+4\cdot(0-30)=21-36-120=-135$$

Опеделитель 3 порядка можно найти и по специальной формуле − формуле Саррюса.

Составляется 6 слагаемых. Три слагаемые со знаком “+” и три со знаком “–” .
Каждое слагаемое − это произведение трёх элементов матрицы.

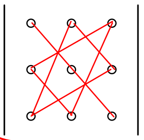

Схема составления слагаемых со знаком $(+)$

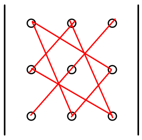

Схема составления слагаемых со знаком $(-)$

**Пример 3**. Найти определитель из примера 2 по формуле Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \big(3\cdot5\cdot2+(-2)\cdot3\cdot6+0\cdot1\cdot4\big)-\big(6\cdot5\cdot4+0\cdot(-2)\cdot2+3\cdot1\cdot3\big)=$$

$$=(30-36+0)-(120+0+9)=-6-129=-135$$

## <u>Свойство определителей</u>

1. Определитель квадратной матрицы можно вычислить разложением по любой строке и по любому столбцу аналогично формулам (1), (1*a*).
   Например: для матрицы порядка3

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det A = a_{31}\,A_{31} + a_{32}\,A_{32} + a_{33}\,A_{33}$ по 3-й строке

$\det A = a_{12}\,A_{12} + a_{22}\,A_{22} + a_{32}\,A_{32}$ по 2-му столбцу

2. Определитель не изменится, если к любой строке матрицы прибавить любую другую строку, умноженную на любое число $\alpha \in R$. Аналогично для столбцов.

3. $|A^{\perp}|=|A|$, где $A^{\perp}$ − транспонированная для *A*.

4. Если в матрице имеется нулевая строка или нулевой столбец, то ее определитель = 0.

5. Если в матрице А есть две одинаковые строки (или столбца), то ее определитель = 0.

6. Если строку (столбец) матрицы А умножить на число $\alpha$, то определитель умножится на $\alpha$ .

7. Если в матрице поменять местами две строки, то определитель изменит знак.
   Так же для двух столбцов.

Все эти свойства верны для определителей любого порядка $n \geq 2$.

Проиллюстрируем эти свойства на **примерах**.

**4.** ( *К свойству* 1 )

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *а*) по 2-й строке *б*) по 1-му столбцу *в*) по 3-му столбцу (Всех таких формул имеется шесть по 1-й, 2-й, 3-й строкам по 1-му, 2-му, 3-му столбцам)

Решение.

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -3\cdot(0-3)+6\cdot(0-12)+0 = 9-72 = -63$$

$$б)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(0-0)-3\cdot(0-3)+4\cdot(0-18) = 0+9-72 = -63$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 3\cdot(3-24) = -63$$

Ответ. −63.

Очевидно, <u>легче всего</u> вычислить было по 3-му столбцу, так как в 3-м столбце имеется <u>два нуля</u>.

**5.** (*К свойству* 1)

Определитель **4-го** порядка вычислим по 3-й строке (так как там много нулей)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+(-1)^{3+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = \left[\begin{array}{c}\text{этот определитель} \\ \text{вычислен в} \\ \text{примере 2}\end{array}\right] = 2\cdot(-135) = -270$$

**6.** (*К свойству* 2) Вычислить определитель используя свойство 2.

Применяя свойство 2 занулим элементы $a_{21}, a_{31}$ в первом столбце, а затем вычислим определитель разложением по 1-му столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 3 & 14 & -2 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c}\text{первую строку} \\ \text{умножим на 2 и} \\ \text{сложим со второй}\end{array}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c}\text{первую строку} \\ \text{умножим на } -3 \text{ и} \\ \text{сложим со третьей}\end{array}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{вычисли разложением} \\ \text{по первому столбцу}\end{array}\right] = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1\cdot(8-5) = 3$$

**7.** (*К свойству* 3)

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $A^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2, \quad |A^{\perp}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad |A^{\perp}| = |A|$$

**8.** (*К свойству* 4)

$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ по свойству 4.

Этот же результат получим если вычислим его разложением например по 2-й строке.

**9.** (*К свойству* 5)

$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ по свойству 5.

Этот же результат получим если применим совйство 2: 1-ю строку умножим на (-1) и прибавим её ко второй строке. Получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = [\text{см предыдущий пример}] = 0$$

**10.** (*К свойству* 6)

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ m & n & k \end{pmatrix}$ и матрицу $B = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b & \lambda \cdot c \\ d & e & g \\ m & n & k \end{pmatrix}$, полученную из А умножением 1-й строки на число λ

Тогда по свойству 6 определитель $|B| = \lambda \cdot |A|$.

Подтверждение этому можно увидеть, разложив определители $|A|$ и $|B|$ по первой строке

$|A| = aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}$. $|B| = \lambda a \cdot B_{11} + \lambda b \cdot B_{12} + \lambda c \cdot B_{13}$.

Так как алгебраические дополнения $A_{11}, A_{12}, A_{13}$ к элементам 1-*й* строки у матриц *A и B*

одинаковы $\left( A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & g \\ n & k \end{vmatrix} = B_{11}, \text{ и аналогично для остальных} \right)$,

$$|B| = \lambda a \cdot B_{11} + \lambda b \cdot B_{12} + \lambda c \cdot B_{13} = \lambda a \cdot A_{11} + \lambda b \cdot A_{12} + \lambda c \cdot A_{13} = \lambda(aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}) = \lambda \cdot |A|$$

**11.** (*К свойству* 7)

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ поменяем местами 1-ю и 2-ю строки и получим матрицу $B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

По свойству 7 определитель $|B| = (-1) \cdot |A|$.

Подтверждение этому можно увидеть, если вычислить определители $|A|$ и $|B|$

$|A| = ad - dc$, $|B| = cb - ad = -ad + cb = -(ad - dc) = (-1) \cdot |A|$.

## <u>Упражнения по теме ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ</u>

1. Вычислить: *а)* $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 500 & 50 \\ 20 & 2 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$..

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & \text{x+1} \\ -4 & \text{x+1} \end{vmatrix} = 0$

3. Вычислить определитель



Витебск, УО «ВГТУ», Статковский Н. С. , 2012

*а*) разложением по 1-й строке;
б) разложением по 3-му столбцу;
*в*) по формуле Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить разложением по строке или столбцу (выбрать самый простой вариант)

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad б)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \quad в)\begin{vmatrix} 8 & -7 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить занулением элементов: *а*) 1-го столбца; *б*) 3-й строки.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 13 & 25 \\ 2 & 27 & 48 \\ 2 & 29 & 54 \end{vmatrix}; \quad б)\begin{vmatrix} 17 & 20 & 23 \\ 32 & 34 & -22 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

6. Вычислить любым способом

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad б)\begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad в)\begin{vmatrix} a & m & n \\ 0 & b & k \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix};$$

**Ответы.**
Зан. **1)** *а*) 18; *б*) 0; *в*) 4 *ab*; *г*) 1; **2)** (−4;−1); **3)** −36; **4)** *а*) 51; *б*) 42; *в*) 60; **5)** *а*) 10; *б*) −50; **6)** *а*) −66; *б*) −11 *в*) *abc*.

## 3 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Напомним понятие обратного числа.

Для числа $a = 5$ обратное число равно $a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$. Если $b = \frac{3}{7}$, то $b^{-1} = \frac{7}{3}$.

Но не для всех чисел существует обратное. Для числа $c = 0$ нет обратного.

Обратным числом для числа $a$ является число, которое обозначается $a^{-1}$ и удовлетворяет равенству $aa^{-1} = 1$. Аналогично определяется обратная матрица.

Дана квадратная матрица А.

**Обратной матрицей** к матрице А называется матрица, обозначаемая $A^{-1}$ и удовлетворяющая равенствам

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E,$$

где Е – единичная матрица.

Рассмотрим для удобства матрицы порядка 3 .
( Для квадратной матрицы любого порядка всё аналогично )
Теорема. Пусть задана квадратная матрица порядка $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix},$$ для которой определитель $|A| \neq 0$.

Тогда для матрицы А существует единственная обратная матрица, которую вычисляют по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{32}\end{pmatrix}^{\perp}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где $A_{11},\ A_{12},\ A_{13},\ A_{21},...,A_{33}$ − алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Матрицу $A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{32}\end{pmatrix}$ называется **присоединённой** матрицей для матрицы.

С этим обозначением для обратной матрицы записывается короткая формула $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^{*}\right)^{\perp}$.

**Пример 1**. Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}+0=1\cdot 3-2\cdot 6+0=-9$$

$$\det A=-9\neq 0.\quad \text{Находим}\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{32}\end{pmatrix}^{\perp}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}^{\perp}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}$$

Можно проверить, что $A^{-1}\cdot A=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $A\cdot A^{-1}=E$

**Пример 2**. $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & -7\end{pmatrix}$, $\det A=4$,

$A_{11}=(-1)^{1+1}(-7)=-7; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}(-3)=3; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 6=-6; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -6 & 2\end{pmatrix}^{\perp}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/4 & -3/2\\ 3/4 & 1/2\end{pmatrix}$$

Для $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ обратная матрица равна $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}c & -b\\ -d & a\end{pmatrix}$, где $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Предполагается, что $\Delta\neq 0$.

## Упражнения по теме ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

1. Вычислить обратную матрицу и выполнить проверку: $A^{-1}\cdot A=E$ $\quad$ *а*) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$; *б*) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
2. Рерить матричные уравнения и выполнить проверку $\quad$ *а*) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$; $\quad$ *б*) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$.

Указание: дано матричное уравнение АХ = В.
Найдём обратную $A^{-1}$ и умножим обе части уравнения на $A^{-1}$:
$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow EX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

**Ответы.**

1) *а*) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7 & 6 & -1\\ 5 & -3 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}$;

2) *а*) $X=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$; *б*) $X=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.