

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЗАДАЧИ.

Оглавление (по темам)

1. Формула классического определения вероятности
2. Элементы комбинаторики
3. Геометрическая вероятность
4. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения событий
5. Формула Бернулли
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса
7. Дискретные случайные величины
8. Непрерывные случайные величины

### 1. Формула классического определения вероятности

- 1) Выбираем наудачу одно число из 11, 12, ..., 20. Найти вероятность того, что оно кратно 3. {Отв: 0,3 }
- 2) Из чисел 1, 2, ..., 8 наудачу выбираем одно. Найти вероятность того, что оно кратно 3. {Отв: 0,25 }
- 3) Наудачу называем число  $x$  из 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что оно чётно. {Отв: 0,4 }
- 4) Из чисел 1, 2, ..., 99, 100 наудачу называем одно число. Найти вероятность того, что это число чётное. {Отв: 0,5 }
- 5) Забыты две последние цифры номера телефона, которые набираем наудачу. Найти вероятность того, что номер телефона набран правильно. {Отв: 0,01 }
- 6) Наудачу называем одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что это число удовлетворяет уравнению  $x^2 - 6x + 8 = 0$ . {Отв: 0,4 }
- 7) Лица А, Б, В наудачу поставлены в очередь. Найти вероятность того, что А и Б стоят рядом. {Отв: 2/3 }
- 8) Три цифры 1, 2, 3 наудачу располагаем в ряд. Найти вер. того, что цифра 1 стоит первой. {Отв: 2/3 }
- 9) Кубик, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три. {Отв: 0,384; 0,096; 0,008 }
- 10) Выбрасываем 2 игральных кости. Найти вероятности событий:  
А – сумма выпавших очков равна 8      В – сумма выпавших очков равна 9  
С – сумма очков равна 4                      D – сумма очков кратна числу 3  
Е – произведение очков равно 6      {Отв: 5/36; 1/9; 1/12; 11/36; 1/9 }

### 2. Элементы комбинаторики

#### задачи на перестановки

- 1) Сколько всех различных чисел можно получить, если переставлять местами:
  - а) 4 карточки, обозначенных 1, 2, 3, 4; (Отв:  $4! = 24$ )
  - б) 6 карточек, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 ? (Отв:  $6! = 720$ )

2) Сколько всех различных перестановок букв можно сделать в словах: КНИГА, САМОЛЁТ?

(Отв  $4! = 120$ ,  $7! = 5040$ )

3) Сколькими различными способами могут сесть 6 человек за круглым столом? (Отв:  $7! = 5720$ )

#### задачи на размещения

4) Вычислить  $A_6^2$ ,  $A_5^3$ ,  $A_{10}^4$  (Отв  $30$ ;  $60$ ;  $5040$ )

5) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:

а) 3-значных с различными цифрами; (Отв  $A_7^3 = 210$ )

б) 4-значных с различными цифрами; (Отв  $A_7^4 = 840$ )

6) Сколькими различными способами можно выбрать 3 человека из 5 кандидатов на 3 различные должности? (Отв:  $A_5^3 = 60$ )

7) На железнодорожной станции имеется 6 путей.

Сколькими способами можно расставить на них 4 состава? (Отв  $A_6^4 = 360$ )

#### задачи на сочетания

8) Вычислить  $C_6^2$ ,  $C_5^3$ ,  $C_{10}^4$  (Отв  $15$ ;  $10$ ;  $210$ )

9) Сколькими способами можно выбрать три детали из коробки, содержащей 10 деталей?

(Отв:  $C_{10}^3 = 120$ )

10) Сколькими различными способами можно выбрать 3 человека из 5 кандидатов на 3 одинаковые должности? (Отв:  $C_5^3 = 10$ )

#### задачи на правило произведения (основное правило комбинаторики)

11) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6:

а) любых 2-значных; (Ответ:  $6 \cdot 6 = 36$ )

б) 3-значных, составленных из нечётных цифр; (Ответ:  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ )

в) 3-значных чётных; (Ответ:  $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ )

г) любых 4-значных; (Ответ:  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ )

д) 4-значных нечётных; (Ответ:  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$ )

12) Составляем все различные перестановки из 4 карточек с буквами А, А, М, М.

Сколько раз получим слово МАМА ? (Ответ:  $2! \cdot 2! = 4$ )

13) Составляем все различные перестановки из 6 карточек с буквами К, Л, М, О, О, О.

Сколько раз получим слово МОЛОКО ? (Ответ:  $1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! = 6$ )

14) Составляем все различные перестановки из 6 карточек с буквами А, А, Б, Н, Н.

Сколько раз получим слово БАНАН ? (Ответ:  $2! \cdot 1! \cdot 2! = 4$ )

15) В ящике 10 шаров, из которых 6 белых и 4 зеленых. Сколькими способами можно извлечь два шара, так чтобы они оказались разного цвета? (Ответ:  $6 \cdot 4 = 24$ )

### задачи разные

16) Вычислить: а)  $(C_6^2 \cdot A_4^1 + P_5) / P_3$  . { =30 }

б)  $C_8^5$  . { =56 }    в)  $C_5^3 + A_6^2$  . { =40 }    г)  $(C_6^2 \cdot A_4^1 + P_5) / P_3$  . { =30 }

17) 25 выпускников школы обменялись фотографиями. Сколько всех фото было сделано?

{ Отв  $A_{25}^2 = 24 \cdot 25 = 600$  }

18) На железной дороге 25 станций. Сколько нужно различных билетов для обслуживания такой дороги? { Отв  $A_{25}^2 = 24 \cdot 25 = 600$  }

19) Сколько всех различных словарей нужно издать для перевода с любого на любой из пяти различных языков (напр, русс, англ, франц, нем, итал ?) { Отв  $A_5^2 = 20$  }

20) 8 шахматистов сыграли друг с другом по одной партии. Сколько всех партий сыграно? {  $C_8^2 = 28$  }

21) Для разгрузки товаров требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке? (Отв  $C_{20}^5 = 15504$ )

22) Сколько всех 3-значных чисел с возрастающими цифрами ? { Отв  $C_9^3 = 84$  }

23) При встрече 16 игроков футбольной команды обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (Отв  $C_{16}^2 = 120$ )

24) Сколькими способами можно разбить на две равные группы:

а) группу из 6 человек для (Отв  $C_6^3 = 20$ )    б) группу из 8 человек для (Отв  $C_8^4 = 70$ )

25) В ящике 10 шаров, из которых 5 зеленых, 3 голубых и 2 красных. Сколькими способами можно извлечь три шара, так чтобы они оказались разного цвета? (Отв:  $5 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ )

26) Составляем все различные перестановки из 7 карточек с буквами К, К, Л, Л, О, О, О.

Сколько раз получим слово КОЛОКОЛ ? { Отв  $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$  }

27) Составляем все различные перестановки из 10 карточек с буквами А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т.

Сколько раз получим слово МАТЕМАТИКА? {  $3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! = 24$  }

28) Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:

а) любых 4-значных; { Отв  $7^4 = 2401$  }    б) 3-значных чётных; { Отв  $7^2 \cdot 3 = 147$  }

### задачи на классическую вероятность

29) Четыре карточки обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. Наудачу извлекаем две карточки и располагаем в ряд. Найти вероятность того, что получим число 31. { **Отв** 1/12 }

30) Четыре книги под номерами 1, 2, 3, 4 наудачу поставлены в ряд на полку.

Найти вероятности событий: А – книга с номером 1 стоит последней; { **Отв** 0,25 }

В – книги с номерами 3 и 4 стоят рядом; { **Отв** 0,5 }

31) Пять карточек, обозначенных буквами Л, О, С, Т, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получится слово СТОЛ. { **Отв** 1/24 }

32) Четыре карточки, обозначенных буквами А, А, М, М, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово МАМА. { **Отв** 1/6 }

33) Семь карточек, обозначенных буквами К, К, Л, Л, О, О, О, наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово КОЛОКОЛ. { **Отв**  $2! \cdot 2! \cdot 3! / 7! = 1/210$  }

34) Имеется  $p$  шаров, из которых  $p_1$  – белых,  $p_2$  – синих.

Извлекаем  $q$  шаров. Найти вероятность того, что среди этих  $q$  имеется  $q_1$  белых и  $q_2$  синих.

$$\begin{array}{l} p = p_1 + p_2 \\ q = q_1 + q_2 \\ m = \frac{C_{p_1}^{q_1} \cdot C_{p_2}^{q_2}}{C_p^q} = P(A) \\ n = C_p^q \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} P(A) = \frac{C_{p_1}^{q_1} \cdot C_{p_2}^{q_2}}{C_p^q} \end{array} \quad (5)$$

35) В ящике 7 шаров, из которых 4 белых и 3 синих. Наудачу извлекаем 4 шара. Найти вероятность того, что ровно 2 из этих шаров окажутся белыми. { **Отв** 18/35 }

36) В ящике 5 шаров, из которых 3 белых и 2 синих. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что оба эти шара окажутся белыми. { **Отв** 0,3 }

### 3. Геометрическая вероятность

1. Наудачу называем число  $x$ , принадлежащее отрезку  $[2; 12]$ . Найти вероятность того, что оно удовлетворяет неравенству  $x \geq 8$ . (**Отв**: 0,4)

2. На отрезке  $[-3; 10]$  на удачу ставим точку  $x$ . Найти вероятность того, что она удовлетворяет условию  $|x| \leq 4$ . { **Отв** 7/13 }

3. Наудачу ставим точку на  $[1; 9]$ . Вероятность того, что она попадёт на отрезок  $[2; b]$  равна 0,25. Найти  $b$ . (**Отв**: 4)

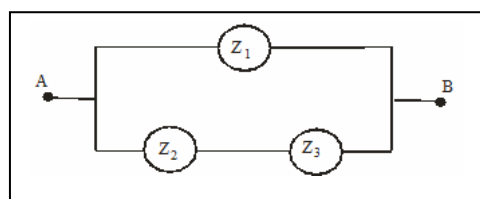
4. В круге радиуса  $R_1 = 4$  расположен круг радиуса  $R_2 = 2$ . На большой круг наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый круг. (**Отв**: 0,25)

5. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(2;1), B(-2;-1), C(2;-1). Ставим точку наудачу в треугольник ABC. Найти вероятность того, что точка окажется в первой четверти. (**Отв**: 0,25)

6. В квадрат вписан круг. На квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг. { Отв  $\pi/4 \approx 0,79$  }
7. На куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в пирамиду  $BCDC_1$ . { Отв  $1/6$  }

#### 4. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения событий

- События  $A$  и  $B$  несовместны,  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,3$ . Вычислить  $P(A+B)$ . (Отв: 0,7)
- События  $A$  и  $B$  независимы,  $P(A) = 0,6$ ,  $P(B) = 0,7$ . Вычислить  $P(AB)$ . (Отв: 0,42)
- События  $A$  и  $B$  независимы,  $P(A) = 0,7$ . Вероятность совместного появления событий  $P(AB) = 0,35$ .  
Найти вероятность события  $B$ . (Отв: 0,5)
- Пусть заданы вероятности событий  $A$  и  $B$ :  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,6$  и вероятность совместного появления событий  $P(AB) = 0,3$ . Найти вероятность появления хотя бы одного события, т.е.  $P(A+B)$ . (Отв: 0,7)
- Пусть задана вероятность события  $A$ :  $P(A) = 0,8$ . Вероятность совместного появления событий  $P(AB) = 0,4$ . Найти условную вероятность  $P_A(B)$ . (Отв: 0,5)
- Из 1, 2, 3, 4, 5, 6 наудачу выбираем цифру  $a$ , из 7, 8, 9 – цифру  $b$ . Найти вероятность того, что  $ab = 42$ . (Отв: 1/18)
- В ящике 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что один из них окажется белым, а другой – чёрным. (Отв: 0,6)
- В первом ящике находятся 2 белых шара и 5 синих, во втором – 4 белых и 2 синих. Из каждого ящика извлекаем по одному шару. Найти вероятность того, что оба выбранных шара будут синие. (Отв: 5/21)
- В первом ящике находится 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных, а во втором 4 шара: 1 белый и 3 чёрных. Из каждого ящика наудачу извлекаем по одному шару. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них чёрный; в) оба шара одного цвета. (Отв: а) 0,15; б) 0,85; в) 0,45)
- Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,91, а для второго – 0,89. Стрелки сделали по одному выстрелу независимо друг от друга. Какова вероятность, что в цель попадет хотя бы один стрелок? (Отв: 0,99)
- Участок электрической цепи  $AB$  состоит из элементов, указанных на схеме.



Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута.

Элементы  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ , в течение месяца независимо друг от друга выходят из строя с вероятностями  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,05$ ,  $p_3 = 0,05$ .

Определить вероятность безотказной работы схемы (событие  $A$ )

в течение месяца. (Отв: 0,99)

## 5 Формула Бернулли

1. Выбрасываем 5 монет. Найти вероятность того, что ровно 2 раза выпадет герб. { Отв.  $5/16$  }
2. Бросаем 5 раз игральную кость. Найти вероятность того, что ровно 2 раза выпадет номер, который делится на 3. { Отв.  $4/27$  }
3. Выбрасываем 3 игральных кости. Найти вероятность того, что выпадут все нечётные номера. { Отв.  $1/8$  }
4. Имеется 6 лотерейных билетов, вероятность выигрыша по каждому из которых равна  $p = 0,2$ . Найти вероятность того, что ровно три билета выигрывают. { Отв.  $0,08192$  }
5. Наудачу выбираем 4 человека. Найти вероятность того, что ровно 2 из них родились во вторник. { Отв.  $216/2401 \approx 0,09$  }
6. На отрезке  $[0; 9]$  наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что ровно 2 из них попадут на отрезок  $[0; 3]$ . { Отв.  $8/27$  }
7. На отрезке  $[-6; 8]$  наудачу отмечаем 7 чисел. Найти вероятность того, что ровно 4 из них удовлетворяют неравенству  $x^2 - 9 \leq 0$ . { Отв.  $(35 \cdot 3^4 \cdot 4^3) / 7^7 \approx 0,22$  }
8. На квадрат ABCD наудачу ставим 6 точек. Найти вероятность того, что что ровно 3 из них попадут на  $\Delta ABC$ . { Отв.  $0,3125$  }
9. На квадрат со стороной 4 наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что все они окажутся удаленными от сторон квадрата не менее, чем на 1. { Отв.  $(4/16)^4 = 1/256$  }
10. Имеется 3 лотерейных билета, вероятность выигрыша по каждому из которых равна  $p = 0,3$ . Найти вероятность того, что хотя бы 2 билета выигрывают. { Отв.  $0,216$  }
11. Изделия производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди четырёх взятых наугад деталей будет хотя бы две бракованных. { Отв.  $\approx 0,014$  }
12. В водоёме 80 % всех рыб составляют карпы. Найти вероятность того, что из 5-ти выловленных рыб окажется хотя бы один карп. { Отв.  $0,99968$  }
13. В равносторонний треугольник вписан круг, а в этот круг вписан равносторонний треугольник. На большой треугольник наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что хотя бы 2 из них попадут в малый треугольник. { Отв.  $\approx 0,262$  }

## 6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. Пусть  $H_1, H_2$  – полная группа событий.  
 $P(H_1) = 0,4$ ;  $P(H_2) = 0,6$ ;  $P_{H_1}(A) = 0,8$ ;  $P_{H_2}(A) = 0,7$ . Вычислить  $P(A)$ . { Отв.  $0,74$  }
2. Три станка штампуют детали. Первый станок производит 25 %, второй 30 %, третий 45 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2 %, 2,5 %, 4 %. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной. (Отв:  $0,0305$ )

3. В одной группе 10 студентов, из которых 2 отличника, во второй – 12 студентов, из которых 3 отличника. Из наудачу выбранной группы наудачу выбран студент. Найти вероятность того, что он отличник. (Отв: 0,225)
4. В цехе работают 4 мастера и 8 учеников. При изготовлении изделия мастер допускает брак с вероятностью 0,04; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что его изготовил: а) мастер; б) ученик?  
(Отв: а) 0,12; б) 0,88)
5. Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Наугад выбранный стрелок выстрелил в мишень. Мишень поражена. Найти вероятность того, что стрелял третий стрелок. (Отв: 0,38)

### 7. Дискретные случайные величины

1. Найти числовые характеристики  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$  дискретной случайной величины  $X$  заданной законом распределения:

$X$	-2	1	3
$p$	0,2	0,7	0,1

б)

$X$	-4	2	5
$p$	0,3	0,5	$p_3$

(Отв: а)  $M(X) = 0,6$ ,  $D(X) = 2,04$ ,  $\sigma(X) \approx 1,43$ ; б)  $M(X) = 0,8$ ,  $D(X) = 11,16$ ,  $\sigma(X) \approx 3,34$ )

2. Имеется две лотереи, вероятность выигрыша по каждой из которых равна  $p = 0,2$ . Пусть  $X$  – число выигрышных лотерей из этих двух. Построить закон распределения случайной величины  $X$ , найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .  
(Отв:  $M(X) = 0,4$ ,  $D(X) = 0,32$ ,  $\sigma(X) \approx 0,57$ )

3. Стрелок делает 2 выстрела по мишени. Пусть  $X$  – число попаданий.

Известно, что  $M(X) = 0,9$ . Найти  $D(X)$ . (Отв:  $D(X) = 0,495$ )

4. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение следующих случайных величин: а) числа гербов при выбрасывании 20 монет; б) числа попадания в мишень из 50-ти выстрелов, если вероятность попадания в одном выстреле равна  $p = 0,6$ ; в) числа точек, попавших на отрезок  $[3; 7]$  при выбрасывании наудачу 30 точек на отрезок  $[1; 15]$ .

(Ответ: а) 10; 5; 2,236; б) 30; 12; 3,464; в) 60/7; 300/49; 2,474)

## 8. Непрерывные случайные величины

1. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ x/5, & \text{если } 0 < x \leq 5. \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(1, 3)$ .

(Ответ: 0,4)

2. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin 3x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

Вычислить вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значения из интервала  $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{9}\right)$ .

(Ответ:  $f(x) = 3 \cos 3x$  в интервале  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ ; вне интервала  $f(x) = 0$ ,  $P = 0,15$ )

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Найти функцию распределения  $F(x)$ .

Построить графики функций  $f(x)$ ,  $F(x)$ .

$$\text{Ответ: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ -\cos x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

4. Найти числовые характеристики  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$  непрерывной случайной величины  $X$ , если известна функция распределения этой величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x^3, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad (\text{Ответ: } M(X) = 3/4, D(X) = 3/80, \sigma = 0,19)$$

5. Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на  $[3; 5]$ . Найти дифференциальную и интегральную функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию и  $P(2 < X < 4)$ . (Ответ: 4; 1/3; 0,5)

6. Случайная величина  $X$  равномерно распределена, причем  $M(X) = 3$ . Функция плотностей вероятностей  $f(x)$  принимает значения 0 и 0,5. Найти дисперсию  $D(X)$ . (Ответ: 1/3)

7. Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону, причем  $M(X) = 3$ ,  $D(X) = 1$ . Найти  $P(2 < X < 5)$ . (Ответ: 0,8186)

8. Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону, причем  $M(X) = 7$ ,  $D(X) = 16$ . Найти  $P(|X - 7| \leq 2)$ . (Ответ: 0,3830)

9. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром  $\sigma = 10$  мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм. (Ответ: 0,8664)