

Тема 4 «Механический и магнитный момент атомных систем»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

4.1 Свойства центрально-симметричных систем.

Поле называется центральным, если линия действия сил проходит через одну точку.

Определим вначале собственные значения проекции момента импульса на ось Z.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x.$$

В квантовой физике получим соответствующие операторы

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Пусть $A(x,y,z)$ – некоторая функция координат.

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

В сферической системе координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi = x$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial x} (-y) + \frac{\partial A}{\partial y} x = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A$$

Учитывая

$$\hat{l}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\frac{\hat{l}_z}{i}$$

Тогда

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.1)$$

Установим вид собственной функции данного оператора

$$\hat{l}_z \psi = \alpha \psi$$

Получим дифференциальное уравнение

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \alpha \psi$$

В нем можно выполнить
разделение переменных

$$\frac{\partial \psi}{\psi} = i\alpha d\varphi$$

Откуда

$$\psi = Ce^{i\alpha\varphi} \quad (4.2)$$

Для того чтобы функция ψ была однозначной,
необходимо, чтобы она была периодична по φ с
периодом 2π , т.е.

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

$$Ce^{i\alpha\varphi} = Ce^{i\alpha(\varphi+2\pi)}$$

$$e^{i\alpha 2\pi} = 1$$

$$\cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha = 1$$

$$\cos 2\pi\alpha = 1$$

Отсюда находим

$$\alpha = m, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, собственные значения оператора \hat{l}_z равны положительным и отрицательным целым числам, включая значение нуль.

Получили функцию $\psi_m = Ce^{im\varphi}$

Постоянную C найдём из условия нормировки функций

$$\int_0^{2\pi} \psi_m^* \psi_m d\varphi = 1$$

$$|C|^2 2\pi = 1$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Тогда собственная функция оператора \hat{l}_z

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

m – называют **МАГНИТНЫМ КВАНТОВЫМ ЧИСЛОМ**.

Это возможные значения проекции l_z

Вывод: проекции магнитного квантового числа на ось z квантованы.

Заметим, что если коммутатор для физических величин \hat{A}, \hat{B} равен нулю, т.е. $[A, B] = 0$, то волновые функции для них можно выбрать общими.

Найдем собственные функции оператора \hat{l}^2

$$\hat{l}^2 \psi = \lambda \psi.$$

Явный вид оператора в декартовой с.к.

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$$

и в сферической с.к.

$$\hat{l}^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (4.4)$$

Поскольку $[\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0$ то волновые функции для

\hat{l}^2 и \hat{l}_z можно выбрать общими. Пологая

$$\psi = f(\theta) \cdot \psi_m(\varphi) \quad (4.5)$$

будем решать уравнение

$$\hat{l}^2 \psi = \lambda \psi$$

$$-\left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right\} = \lambda \psi$$

Первое слагаемое

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = -\hat{l}_z^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{l}_z \psi &= \hat{l}_z f(\theta) \cdot \psi_m(\varphi) = f(\theta) \hat{l}_z \cdot \psi_m(\varphi) = \\ &= f(\theta) m \psi_m(\varphi) = m \psi \end{aligned}$$

$$\hat{l}_z^2 \psi = m^2 \psi$$

$$-\left\{-\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot m^2 \psi_m f(\theta) + \frac{\psi_m}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right)\right\} = \lambda f(\theta) \psi_m$$

$$-\left\{-\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot m^2 f(\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right)\right\} = \lambda f(\theta)$$

$$-\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot m^2 f(\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right) + \lambda f(\theta) = 0 \quad (4.6)$$

Это уравнение имеет единственное решение, если

$$\lambda = l(l + 1) \quad \text{и} \quad |m| \leq l$$

где l - неотрицательное целое число ($l=0,1,2,\dots$).

Решение уравнения (4.6) может быть представлено как

$$f(\theta) = P_l^m = \frac{1}{2^l l!} \cdot (1 - \xi^2)^{m/2} \cdot \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} \cdot (\xi^2 - 1)^l$$

где P_l^m присоединенные функции Лежандра, а

$$\xi = \cos \theta$$

Отметим, что при заданном l число m может принимать лишь $2l + 1$ различных значений:

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l.$$

$$\psi = f(\theta) \cdot \psi_m(\varphi) = P_l^m(\theta) \cdot \psi_m(\varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ - сферические функции
Лежандра

Сферические функции Лежандра ортонормированы

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \cdot Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

| СОСТОЯНИЕ | Y_{lm} |
|--------------------|--|
| $l=0 \quad m=0$ | $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ |
| $l=1 \quad m=0$ | $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \theta$ |
| $l=1 \quad m=1$ | $Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{i\varphi}$ |
| $l=1 \quad m=-1$ | $Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{-i\varphi}$ |
| $l=2 \quad m=0$ | $Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cdot (3\cos^2 \theta - 1)$ |
| $l=2$ $m=\pm 1$ | $Y_{21} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot e^{\pm i\varphi}$ |
| $l=2$ $m=\pm 2$ | $Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cdot \sin^2 \theta \cdot e^{\pm i2\varphi}$ |

Вывод. Мы получили, что

$$\hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$$

Причем механические моменты принято измерять в единицах \hbar , т.е.

$$\hat{l}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$$

Формула определяет величину квадрата вектора орбитального момента, следовательно абсолютная величина этого вектора

$$|\vec{l}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

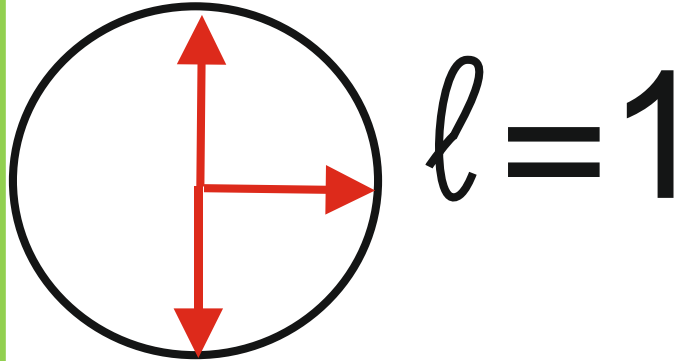
или

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}$$

Проекция момента импульса

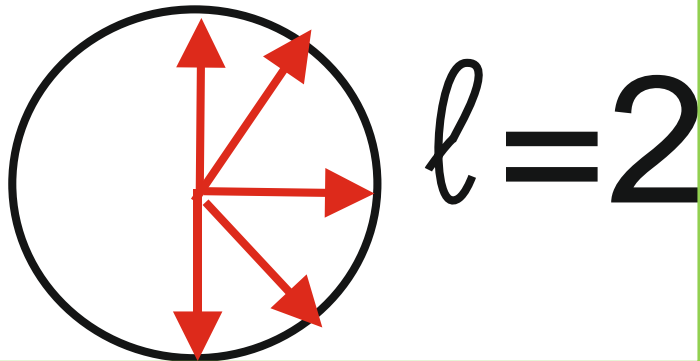
$$\hat{l}_z \psi_m = m \psi_m$$

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$



m – магнитное квантовое число,

$$m = -l, -l + 1, \dots, l$$



т.е. принимает $2l + 1$ значений.

4.2 Орбитальный магнитный момент атома по классической теории.

Электрон, движущийся по замкнутой орбите вокруг ядра, эквивалентен круговому току, магнитный момент которого

$$p_m = \frac{eS}{T}, \quad (4.7)$$

T -период обращения электрона, S - площадь, охватываемая орбитой электрона.

Момент импульса

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.8)$$

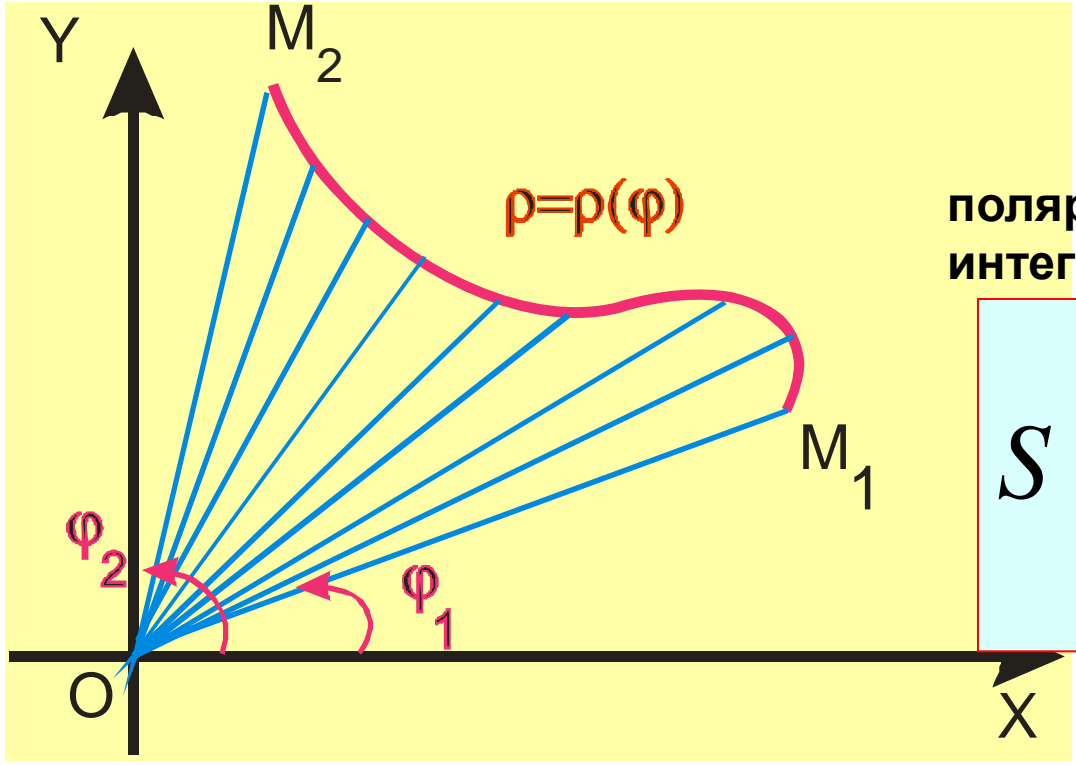


В случае, когда кривая задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = \rho(\varphi)$$

площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами

OM_1 и OM_2 , с соответствующими значениями



φ_1 и φ_2

полярного угла, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Площадь круговой орбиты электрона

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \quad (4.9)$$

Из (4.8) получаем

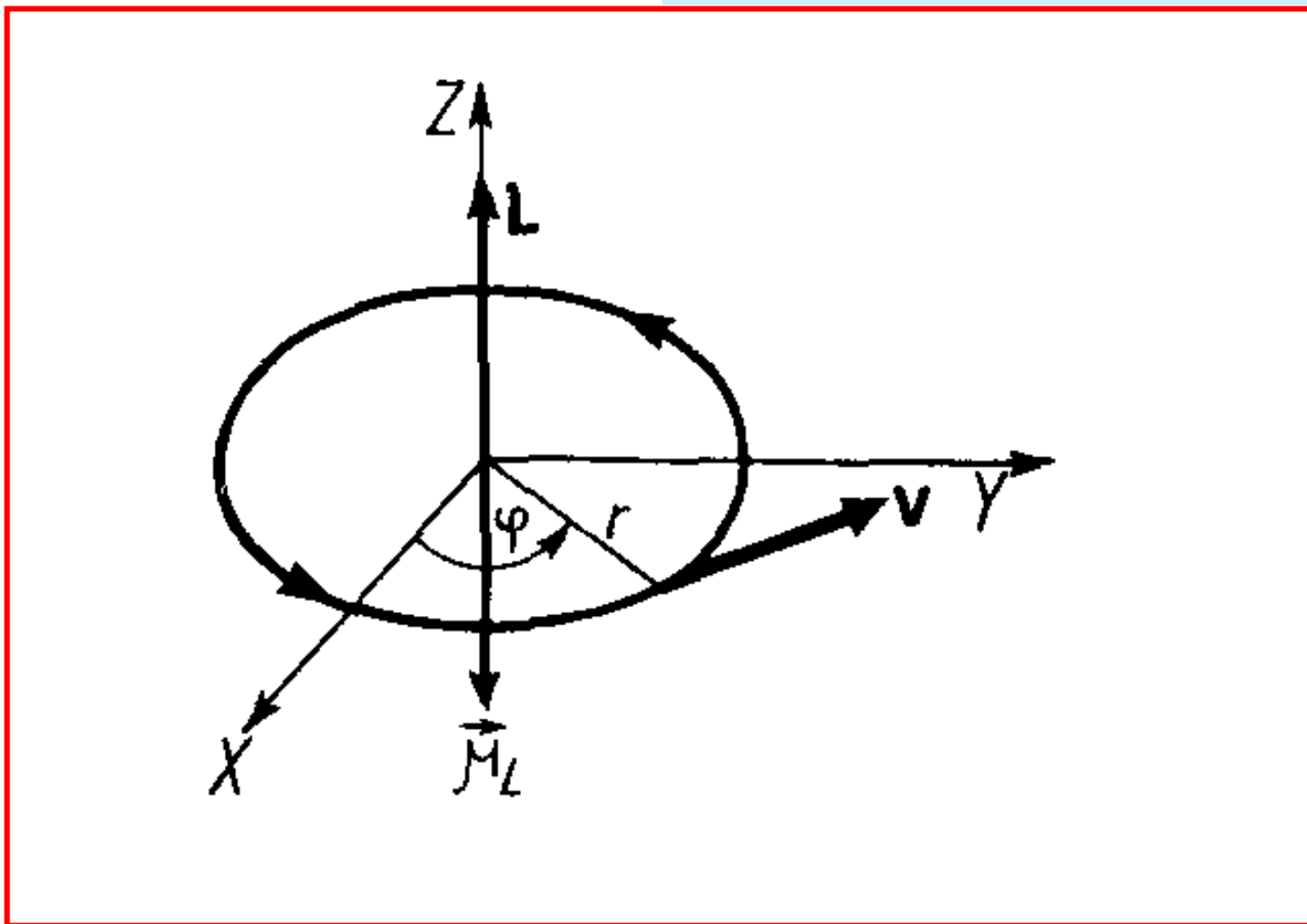
$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt$$

следовательно

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \frac{L}{mr^2} dt = \frac{TL}{2m}$$

Учитывая (4.7) получим

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{eL}{m}. \quad (4.10)$$



Магнитный и механический моменты являются векторами. Для положительно заряженной частицы их направление совпадает, а для отрицательно заряженной частицы противоположно. Поэтому

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \frac{q\vec{L}}{m}.$$

Для электрона

$$q = -e.$$

Обычно записывают

$$\vec{p}_m = -\frac{\mu_B \vec{L}}{\hbar}, \quad (4.11)$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ - магнетон Бора

Величина $\frac{L}{\hbar}$ безразмерна (**правило квантования**

$L = n\hbar$) и поэтому дает значение магнитного момента в единицах магнетона Бора:

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

4.3 Движение магнитного момента в магнитном поле.

В однородном магнитном поле с магнитной индукцией B атом с постоянным магнитным моментом совершает прецессионное движение вокруг направления индукции магнитного поля, называемое ларморовой прецессией.

Однако однородное магнитное поле не в состоянии само по себе изменить угол между направлениями индукции магнитного поля и магнитного момента атома.

В однородном поле не возникает также никаких сил, действующих на атом в целом и стремящихся сообщить ему ускорение.

В неоднородном магнитном поле на атом с магнитным моментом \vec{p}_m действует сила

$$\vec{F} = \vec{i} \left(\vec{p}_m \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) + \vec{j} \left(\vec{p}_m \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) + \vec{k} \left(\vec{p}_m \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right).$$

Т.к. атом электрически нейтрален, то других сил действующих на него в магнитном поле нет. Поэтому, изучая движение атома в неоднородном поле, можно измерить его магнитный момент.

Пусть атом движется в направлении оси X , а неоднородность магнитного поля создана в направлении оси Z . Тогда

$$B_x = 0, B_y = 0, B_z = B_z.$$

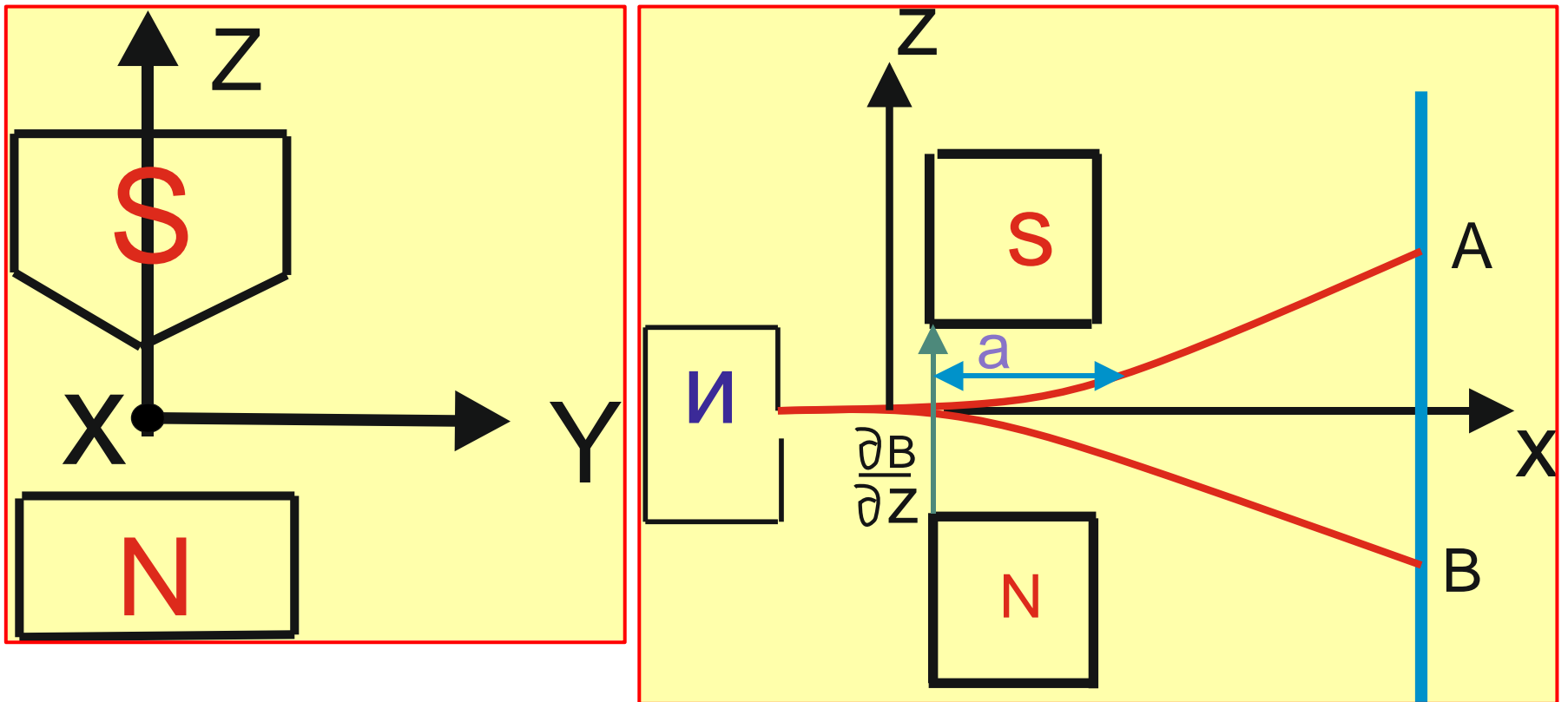
и для силы

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0,$$

$$F_z = p_{mz} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Неоднородное магнитное поле создается в достаточно длинном магните путем придания полюсам в перпендикулярной оси X плоскости специальной формы показанной на рис.



$$\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

при небольшом отклонении от оси x в направлении оси z может считаться постоянной и равной на оси

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0$$

Уравнение движения в пространстве между магнитами

$$m \frac{dv_z}{dt} = p_{mz} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0,$$

m – масса атома.

Следовательно при прохождении пути a

между магнитом, если v - скорость атома по оси x :

$$t = \frac{a}{v}$$

и отклонение по оси z при этом (в месте где заканчивается магнит)

$$z = \frac{dv_z}{dt} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{p_{mz}}{m} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{a}{v} \right)^2 \frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

Выйдя из пространства между магнитами, атом продолжает двигаться под постоянным углом к оси x по прямой линии.

Легко вычислить его полное отклонение от оси x на любом расстоянии от магнита.

Значения величин $\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0, a, v, m,$ **входящих**

в формулу (4.12), известны и по отклонению z можно определить

p_{mz}

4.4 Опыт Штерна и Герлоха.

В 1921г. Штерн предложил идею эксперимента по измерению магнитного момента атома, который был выполнен им совместно с Герлахом в 1922г.

Они проводили опыты с атомами серебра. В замкнутом сосуде нагревали до высокой температуры металлические пары.

Выходящий из маленького отверстия сосуда пучок атомов серебра направлялся между полюсами магнита. В области движения атомов был создан высокий вакуум. При попадании на холодную пластинку атомы серебра осаждались на ней.

По классическим представлениям в пучке атомов магнитные моменты направлены под всевозможными углами к оси z и, следовательно, P_{mz} в (4.12) принимает весь интервал значений от

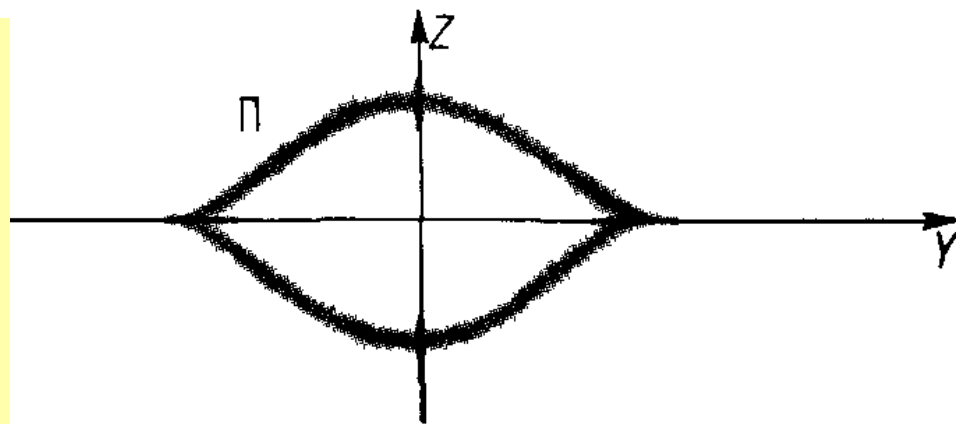
$$-\left|P_m\right| \text{ до } \left|P_m\right|$$

Т.е. на экране они должны находиться между точками A и B .

Но результат оказался загадочным.

Все атомы в плоскости $y=0$ сконцентрировались около точек A и B .

Вблизи плоскости $y=0$ атомы также сконцентрировались вблизи своих возможных отклонений.



Получается что магнитные моменты атомов направлены параллельно оси z , а под углом к оси z направлены быть не могут. **А следовательно ориентация магнитных моментов относительно магнитного поля изменяется дискретно. Это явление получило название пространственного квантования.**

Объяснение этого опыта стало возможным в 1925г., когда был открыт спин электрона. **Было установлено, что магнитный момент атома серебра обусловлен не орбитальными моментами электронов, а внутренним магнитным моментом электрона, связанным с его внутренним механическим моментом, называемым СПИНОМ.**

4.5 Спин электрона.

Электрон обладает собственным механическим моментом импульса, называемым **СПИНОМ** электрона.

Кроме спина электрон обладает магнитным моментом.

Для количественного согласия теории с экспериментом механический момент импульса электрона – спин по модулю должен быть равен

$$\left| \vec{l}_s \right| = \hbar \sqrt{s(s+1)} \quad (s = 1/2) \quad (4.13)$$

Формула записана в полной аналогии с формулой для орбитального момента импульса частицы

$$\left| \vec{l} \right| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

Проекции момента импульса на некоторое направление даются формулой

$$l_{sz} = \hbar m_s \quad (m_s = 1/2, m_s = -1/2) \quad (4.14)$$

Спин является квантовой величиной, не имеющей классического аналога.

Связь с классическими образами можно представить следующими рассуждениями.

Представим электрон окружностью радиуса r , по которой равномерно распределена масса с линейной плотностью $m_e / (2\pi r)$.

Пусть U — линейная скорость точек окружности при вращении.

Момент импульса электрона с учетом релятивистского изменения массы и учитывая

$$l_{sz} = \hbar m_s \quad (m_s = 1/2, m_s = -1/2)$$

равен

$$m_e r v / \sqrt{1 - v^2 / c^2} = \hbar / 2,$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{4m_e^2 r^2 c^2}{\hbar^2}}}.$$

При $r \rightarrow 0$

электрон стягивается в точку,

$v \rightarrow c,$

а проекция момента импульса сохраняет свое значение $\hbar / 2$.

Для объяснения экспериментальных фактов наряду со спином допускается наличие у электрона магнитного момента, который связан со спином соотношением

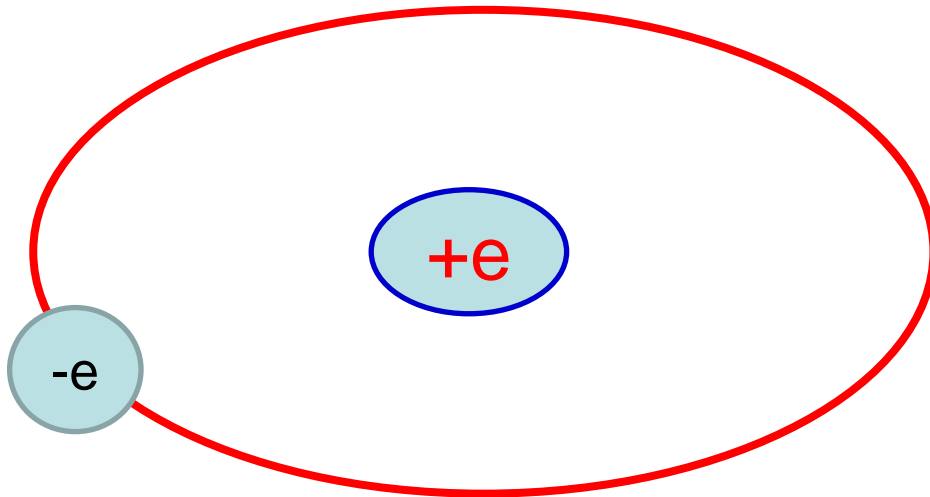
$$\vec{\mu}_s = \frac{q}{m} \vec{l}_s, \quad q = -e. \quad (4.15)$$

С учетом (4.14) следует, что относительно некоторого произвольного направления магнитный момент электрона может ориентироваться лишь двумя способами, когда его проекции равны

$$\mu_{sz} = \pm \frac{e\hbar}{2m}. \quad (4.16)$$

4.6 Спин орбитальное взаимодействие.

Пусть вокруг ядра движется один электрон.



Перейдем в систему координат, связанную с электроном, движущимся вокруг ядра.

В этой системе электрон покоится в начале координат,

а ядро движется вокруг электрона.

При своем движении ядро создает в точке нахождения электрона магнитное поле $B_{эф}$, которое приводит к появлению энергии взаимодействия

$$E = -\vec{\mu}\vec{B}$$

Поскольку магнитный момент может ориентироваться лишь двумя способами относительно направления $\vec{B}_{эф}$,

энергия взаимодействия может принимать лишь два значения:

$$E = -\vec{\mu}_s \vec{B}_{эф} = \pm e\hbar B_{эф} / (2m)$$

Энергия спин-орбитального взаимодействия прибавляется или вычитается от энергии соответствующего уровня электрона.

В результате каждый уровень расщепляется на два подуровня.

Расщепление уровня энергии на подуровни, обусловленное спин-орбитальным взаимодействием, называется **ТОНКОЙ структурой уровней**.

4.7 Сложение моментов количества движения.

Если две части системы характеризуются механическими моментами \vec{J}_1 и \vec{J}_2 значения квадратов которых определяется квантовыми числами J_1 и J_2

$$\vec{J}_1^2 = J_1(J_1 + 1)$$

$$\vec{J}_2^2 = J_2(J_2 + 1)$$

то значение квадрата \vec{J}^2
полного механического момента системы
определяется квантовым числом J ,

последовательные значения которого отличаются
друг от друга на единицу и меняются от суммы

$J_1 + J_2$ до разности $|J_1 - J_2|$

$$J = J_1 + J_2, J_1 + J_2 - 1, \dots, |J_1 - J_2| \quad (4.17)$$

Пусть имеются два орбитальных момента $\vec{L}_{l_1}, \vec{L}_{l_2}$
модуль которых определяется квантовыми
числами l_1, l_2 , т.е.

$$L_{l_1} = \hbar \sqrt{l_1(l_1 + 1)}$$

$$L_{l_2} = \hbar \sqrt{l_2(l_2 + 1)}$$

Модуль суммы моментов

$$\vec{L}_l = \vec{L}_{l_1} + \vec{L}_{l_2}$$

равен

$$|\vec{L}_l| = L_l = \hbar \sqrt{L(L + 1)},$$

причем квантовое число L может принимать одно из значений

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|.$$

Правила сложения нескольких моментов получаются в результате последовательного применения правила для сложения двух моментов.

Пусть имеются N электронов векторы спинов
которых

$$\vec{L}_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Полный спиновый момент всех электронов
определяется вектором \vec{L}_S ,

равным сумме векторов спинов отдельных
электронов:

$$\vec{L}_S = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{si},$$

Причем модуль
этого вектора

$$|\vec{L}_S| = L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}.$$

Квантовое число полного спина S может принимать следующие значения:

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}N - 1, \dots, 0 & (\text{при } N \text{ четном}) \\ \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}N - 1, \dots, \frac{1}{2} & (\text{при } N \text{ нечетном}) \end{cases}$$

Возможные типы связей.

Свойства атома зависят от того, как происходит образование полного момента атома. Возможны два пути:

1. Орбитальный момент каждого электрона складывается со спиновым моментом этого электрона, образуя полный момент электрона

$$\vec{L}_j.$$

После этого полные моменты различных электронов атома складываются между собой, образуя полный момент атома.

Такая связь электронов в атоме называется *(j-j) связью*.

2. Орбитальные моменты различных электронов атома складываются друг с другом, образуя полный орбитальный момент атома

$$\vec{L}_L.$$

Спины отдельных электронов складываются друг с другом, образуя полный спиновый момент атома

$$\vec{L}_S.$$

После этого полный орбитальный момент атома складывается с полным спиновым моментом атома, образуя полный момент атома

$$\vec{L}_J.$$

Такая связь называется (L,S) связью.

Анализ экспериментального материала показывает, что в большинстве случаев осуществляется (L, S) СВЯЗЬ.

4.8 Гиромагнитное отношение

Гиромагнитным отношением называется отношение модуля магнитного момента к модулю механического момента в единицах $e/(2m_e)$.

Если отношение этих величин представить в виде

$$\frac{\mu}{L} = \frac{e}{2m_e} g, \quad (4.18)$$

то безразмерное число g называется гиромагнитным отношением.

Из формулы (4.10)

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{eL}{m}$$

следует, что

$$\frac{\mu_l}{L_l} = \frac{e}{2m_e} \quad (4.19)$$

Сравнивая (4.19) и (4.18) видно, что для орбитального и механического моментов электрона гиромагнитное отношение $g=1$.

Гиромагнитное отношение для спина электрона может быть найдено из формулы (4.15)

$$\vec{\mu}_s = \frac{q}{m} \vec{l}_s.$$

Она может быть записана в виде

$$\frac{\mu_s}{L_s} = \frac{2q}{2m}. \quad (4.20)$$

Следовательно **для спина** гиромагнитное отношение равно **$g=2$** .

4.9 Полный магнитный момент атома.

Полный магнитный момент атома равен сумме полного орбитального магнитного момента и полного спинового магнитного момента атома

$$\vec{\mu}_{\text{полн}} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S,$$

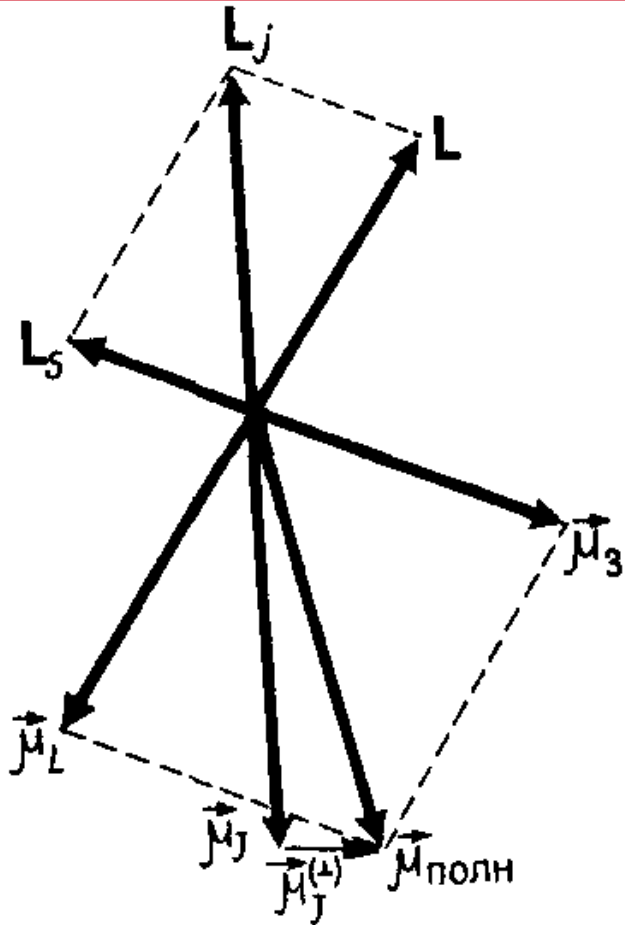
причем

$$\vec{\mu}_L = \frac{q}{2m_e} \vec{L}_L,$$

$$\vec{\mu}_S = \frac{q}{2m_e} \vec{L}_S,$$

Так как гиромагнитное отношение для спина в два раза больше чем для магнитного момента, то полный момент атома не лежит на одной линии с полным механическим моментом. В изолированной механической системе полный механический момент постоянен.

Следовательно, вектор \vec{L}_J сохраняет свое направление в пространстве, а векторы полного орбитального момента и полного спина прецессируют вокруг направления полного момента.



Благодаря этому векторы полного орбитального магнитного моментов также прецессируют вокруг направления полного механического момента и вместе с ними прецессионное движение совершает и полный магнитный момент атома

$$\vec{\mu}_{\text{полн}}$$

Векторное сложение орбитального и спинового механического и магнитного моментов атома.

Полный магнитный момент атома

$$\vec{\mu}_{\text{полн}} = \vec{\mu}_J + \vec{\mu}_{\perp},$$

$\vec{\mu}_J$ -составляющая полного магнитного момента, параллельная полному механическому моменту,

$\vec{\mu}_{\perp}$ -составляющая полного магнитного момента, перпендикулярная направлению полного механического момента.

Обычно производят усреднение полного магнитного момента атома по многим периодам прецессии. Среднее значение перпендикулярной составляющей полного магнитного момента равно нулю. Поэтому среднее значение полного магнитного момента сводится к $\vec{\mu}_J$.

4.10 Множитель Ланде

Полный магнитный момент атома рассчитывают по схеме сложения моментов

$$\mu_J = \mu_L \cos(\vec{L}_L, \vec{L}_J) + \mu_S \cos(\vec{L}_S, \vec{L}_J) \quad (4.21)$$

Запишем выражение

$$\vec{L}_J = \vec{L}_L + \vec{L}_S$$

в виде

$$\vec{L}_L = \vec{L}_J - \vec{L}_S$$

и возведем в квадрат

$$|\vec{L}_L|^2 = |\vec{L}_J|^2 + |\vec{L}_S|^2 - 2|\vec{L}_J| \cdot |\vec{L}_S| \cos(\vec{L}_S, \vec{L}_J)$$

$$\cos(\vec{L}_S, \vec{L}_J) = \frac{|\vec{L}_J|^2 + |\vec{L}_S|^2 - |\vec{L}_L|^2}{2|\vec{L}_J| \cdot |\vec{L}_S|}$$

$$\cos(\vec{L}_S, \vec{L}_J) = \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)} \cdot \sqrt{S(S+1)}}$$

Возводя в квадрат

$$\vec{L}_S = \vec{L}_J - \vec{L}_L$$

получим

$$|\vec{L}_S|^2 = |\vec{L}_J|^2 + |\vec{L}_L|^2 - 2|\vec{L}_J| \cdot |\vec{L}_L| \cos(\vec{L}_L, \vec{L}_J)$$

$$\cos(\vec{L}_L, \vec{L}_J) = \frac{|\vec{L}_J|^2 + |\vec{L}_L|^2 - |\vec{L}_S|^2}{2|\vec{L}_J| \cdot |\vec{L}_L|}$$

$$\cos(\vec{L}_L, \vec{L}_J) = \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)} \cdot \sqrt{L(L+1)}}$$

Учитывая, что

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{L(L+1)},$$

$$\mu_S = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)},$$

где

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

- магнетон Бора и
выражения для косинусов
запишем (4.21)

$$\begin{aligned} \mu_J = & \mu_B \sqrt{L(L+1)} \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)} \cdot \sqrt{L(L+1)}} + \\ & + 2\mu_B \sqrt{S(S+1)} \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)} \cdot \sqrt{S(S+1)}} \end{aligned}$$

$$\mu_J = \mu_B \left[\frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} + 2 \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \right] =$$
$$= \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)},$$

где

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

называется множителем Ланде. Он является гиромагнитным отношением для полного магнитного и механического моментов атома.

