Тема 3 «Интерполяция сплайнами. Метод наименьших квадратов»

Интерполяция сплайнами.

В случае, когда интерполяция функции одним многочленом громоздка или вообще невозможна, применяют интерполяцию сплайнами. В этом случае область интерполирования разбивается на отрезки и на каждом из них производится интерполирование многочленами невысокой степени так, чтобы сочленение графиков этих многочленов было гладким.

Кубический сплайн-функция – специальным образом построенный многочлен третьей степени. Запишем его в виде

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \le x \le x_i. \tag{3.1}$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i можно воспользоваться следующими уравнениями

$$a_i = y_{i-1}, \tag{3.2}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = \overline{1,(n-1)}, \quad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}, \tag{3.3}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), i = \overline{1,(n-1)}; \quad b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n, \tag{3.4}$$

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad i = \overline{2,n}. \tag{3.5}$$

Можно интерполировать таблично заданную функцию при помощи встроенной функции **spline(X, Y, x, k), для *k*=3 (cubic).**

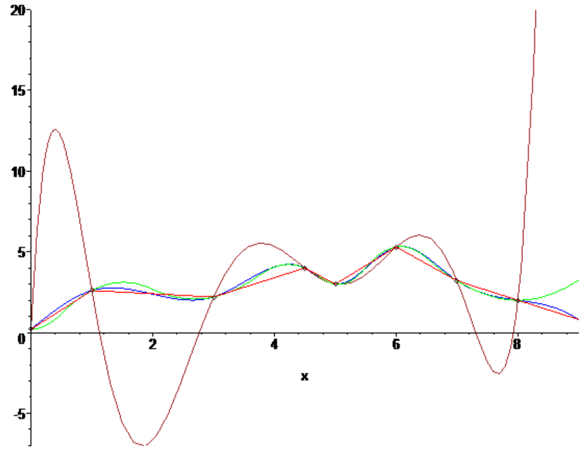
СРАВНЕНИЕ полиномиальной и сплайновой апроксимаций
Когда аппроксимируется гладкая функция, представленная парами данных с равномерном расположением узлов, то данные
как полиномимальной, так и сплайновой аппроксимаций различаются незначительно.
Если точки расположены неравномерно, то применение полиномиальной апроксимации может оказатся совершенно неприемлимым.
В примере полиномиальная апроксимация, особенно в первых трех точках дает явно ошибочные выбросы. Сплайновая аппроксимация ведет себя куда более прпиемлемо.

```
> restart;
> with(plots):
```

Введем векторы значений переменных:

```
> X:=[0,1,3,4.5,5,6,7,8]; Y:=[0.2,2.6,2.2,4,3,5.3,3.2,2];
> f1:=spline(X,Y,x,linear);
> f2:=spline(X,Y,x,quadratic);
> f3:=spline(X,Y,x,cubic);
> f4:=interp(X,Y,x);
> q0:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..8],x=0..9,style=point,color=black):
```

```
> q1:=plot(f1(x),x=0..9,y=-7..20,color=red):
> q2:=plot(f2(x),x=0..9,y=-7..20,color=green):
> q3:=plot(f3(x),x=0..9,y=-7..20,color=blue):
> q4:=plot(f4(x),x=0..9,y=-7..20,color=brown):
> display(q0,q1,q2,q3,q4);
```



Задания для самостоятельного решения по теме 3.

Интерполировать таблично заданную функцию при помощи встроенной функции spline(X, Y, x, k). Построить интерполяционную функцию.

x_i	0	3	5	6	9	10	*11*
$f(x_i)$	2.2	3.06	1.35	5.68	2.59	1.63	2.42

Метод наименьших квадратов

В практических задачах табличные данные функции $f(x_i)$, полученные в результате опытов, являются заведомо неточными. В этом случае интерполяция многочленами или сплайнами при большом количестве узлов является нецелесообразной. В этом случае функцию f приближают многочленом $P_m(x)$ степени m исходя из условия минимизации среднеквадратичного отклонения $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2}$.

Для многочлена первой степени $P_1(x)=kx+b$ нормальная система уравнений метода наименьших квадратов примет вид:

$$\begin{cases} nb + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)k = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)k = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Для многочлена второй степени $P_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ нормальная система уравнений метода наименьших квадратов имеет вид:

$$\begin{cases} nc_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)c_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)c_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases}$$

Для решения данной задачи весьма полезен пакет > **CurveFitting**

```
> with(CurveFitting):
```

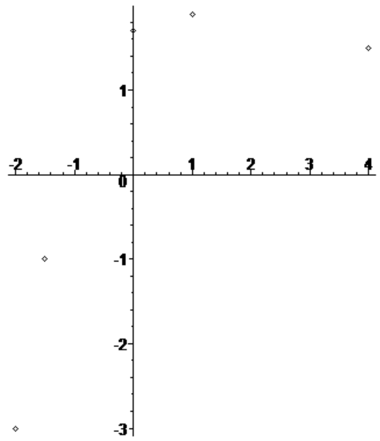
Типовой пример. Функция задана таблицей

x_i	-2	-1.5	0	1	4
$f(x_i)$	-3	-1	1.7	1.9	1.5

Приблизить значения функции многочленами первой и второй степени, используя формулы (6.2), (6.3). Изобразить полученную функцию и заданные точки на графике.

Решение.

```
> restart;
> with(plots):
> X:=[-2,-1.5,0,1,4];
> Y:=[-3,-1,1.7,1.9,1.5];
> q0:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..5],style=point,color=black):
> display(q0);
```




```
> a11:=5; a12:=0; a13:=0;b1:=0; a23:=0;b2:=0;a33:=0;b3:=0;
> for i from 1 to 5 do
a12:=a12+X[i]; a13:=a13+(X[i])^2; b1:=b1+Y[i];
a23:=a23+(X[i])^3; b2:=b2+Y[i]*X[i];
a33:=a33+(X[i])^4;b3:=b3+Y[i]*(X[i])^2;
end do;
> a21:=a12;a22:=a13;a31:=a13;a32:=a23;
> eq1:={a11*b+a12*k=b1, a21*b+a22*k=b2};
ff:=solve(eq1);
```

$$eq1 := \{5\,b + 1.5\,k = 1.1,\ 1.5\,b + 23.25\,k = 15.4\}$$

$$ff := \{b = 0.02171052632,\ k = 0.6609649123\}$$

```
>  for i from 1 to 2 do
```

```
if (lhs(ff[i]) = b) then bb:=rhs(ff[i])  end if:
if (lhs(ff[i]) = k) then kk:=rhs(ff[i])  end if:
   end do;
> bb;kk;
>eq2:={a11*c0+a12*c1+a13*c2=b1,a21*c0+a22*c1+a23*c2=b2,a31*c0+a32
*c1+a33*c2=b3};
f2:=solve(eq2);
```

$$eq2 := \{5\, c0 + 1.5\, c1 + 23.25\, c2 = 1.1,\ 1.5\, c0 + 23.25\, c1 + 53.625\, c2 = 15.4,\ 23.25\, c0 + 53.625\, c1 + 278.0625\, c2 = 11.65\}$$

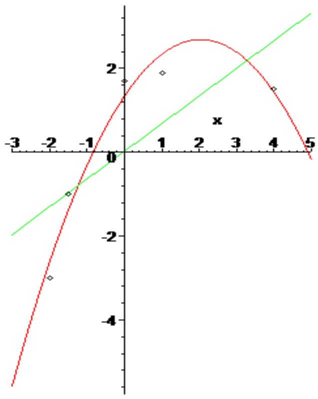
$$f2 := \{c0 = 1.338128353,\ c1 = 1.328293264,\ c2 = -0.3261540499\}$$

```
>  for i from 1 to 3 do
if (lhs(f2[i]) = c0) then c0s:=rhs(f2[i])  end if:
if (lhs(f2[i]) = c1) then c1s:=rhs(f2[i])  end if:
if (lhs(f2[i]) = c2) then c2s:=rhs(f2[i])  end if:
   end do;
> c0s; c1s;c2s;
> P2:=c0s+c1s*x+c2s*x^2;P1:=bb+kk*x;
```

$$P2 := 1.338128353 + 1.328293264\, x - 0.3261540499\, x^2$$

$$P1 := 0.02171052632 + 0.6609649123\, x$$

```
> q2:=plot(P2,x=-3..5,color=red):
q1:=plot(P1,x=-3..5,color=green):
display(q0,q1,q2);
```



Пакет with(CurveFitting):

```
> restart;
> with(CurveFitting):
f3:=LeastSquares([[-2,-3],[-1.5,-1],[0,1.7],[1,1.9],[4,1.5]],
x);
```

$$f3 := 0.02171052632 + 0.6609649123\, x$$

```
> f4:=LeastSquares([-2,-1.5,0,1,4], [-3,-1,1.7,1.9,1.5], x,
curve=a*x+b);
```

$$f4 := 0.02171052632 + 0.6609649123\, x$$

```
> LeastSquares([-2,-1.5,0,1,4], [-3,-1,1.7,1.9,1.5], x,
curve=a*x^2+b*x+c);
```

$$1.338128353 + 1.328293264\, x - 0.3261540499\, x^2$$

```
> Interactive( [[-2,-3],[-1.5,-1],[0,1.7],[1,1.9],[4,1.5]], x );
> Interactive();
```

Задания для самостоятельного решения по теме 3.

1. Для функции заданной таблицей приблизить значения функции многочленами первой и второй степени. Изобразить полученную функцию и заданные точки на графике.

1.1

x_i	-0.4	0	0.5	1.2	2
$f(x_i)$	4.1	4.5	4.9	4.6	4.5

1.2

x_i	0.2	1.1	1.9	2.5	3.2
$f(x_i)$	4.2	3.7	4.1	4	4.2

1.3

x_i	1.1	1.5	2.5	4.1	6
$f(x_i)$	-3.1	-3.4	-3.3	-3.5	-4.2

1.4

x_i	1.5	2	2.4	3	5.1
$f(x_i)$	1.5	1.7	2.1	2.2	3

1.5

x_i	0.2	1.2	2.4	3.0	4.4
$f(x_i)$	-1.1	-1.3	0.2	-0.5	2.2

1.6

	0	0.4	0.8	1.1	1.9
$f(x_i)$	3.4	3.5	2.7	2.8	4

1.7

x_i	3.2	4.1	4.9	5.7	7.2
$f(x_i)$	-2.1	-1.5	-0.7	-1.1	-2.7

1.8

x_i	1.9	2.5	3.4	4.0	5.3
$f(x_i)$	-2.1	-1.5	-1.2	-1.9	-2.3

1.9

x_i	-1.2	-0.8	0.1	0.5	2

1.10

$f(x_i)$	-0.5	-0.7	0.2	0.1	-1

x_i	4.8	5.9	6.7	7.3	8
$f(x_i)$	0.9	0.1	-1.1	-1.2	-2.2