Занятие 1. Метод деления отрезка пополам (метод бисекции)

Ставиться задача решить уравнение вида $F(x)$=0. Допустим нам удалось найти отрезок $[a,b]$, в котором расположено искомое значение корня $x=c$, т.е. $a<c<b$.

В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину этого отрезка, т.е. $c_0=(a+b)/2$. Далее исследуем значения функции $F(x)$ на концах отрезков $[a,c_0]$ и $[c_0,b]$, т. е. в точках a,c_0,b. Тот отрезок, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, Поэтому его принимают в качестве нового отрезка. Вторую половину отрезка $[a,b]$, на которой знак $F(x)$ не меняется, отбрасываем. В качестве первой итерации корня принимаем середину нового отрезка и т.д.

Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, т.е. после n итераций он сокращается в 2^n раз.

Пусть для определенности $F(a)<0, F(b)>0$ (рис.1).

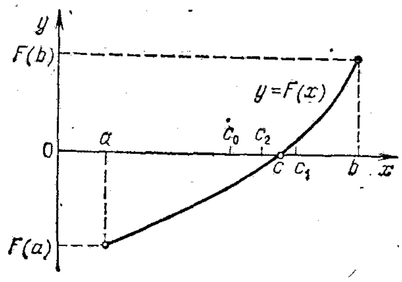


Рис.1 Метод деления отрезка пополам

В качестве начального приближения корня примем $c_0=(a+b)/2$. В рассматриваемом случае $F(c_0)<0$, поэтому рассматриваем только отрезок $[c_0,b]$. Следующее приближение: $c_1=(c_0+b)/2$. При этом отрезок $[c_1,b]$ отбрасываем, поскольку $F(c_1)>0$ и $F(b)>0$. Аналогично находим другие приближения: $c_2=(c_0+c_1)/2$ и т.д.

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока значение функции $F(x)$ после n-й итерации не станет меньшим по модулю некоторого заданного малого числа ε, т.е. $|F(c_n)<\varepsilon|$.

Метод деления отрезка пополам довольно медленный, однако он всегда сходится, т.е. при его использовании решение получается всегда, причем с заданной точностью.

Типовой пример №1. Методом деления отрезка пополам найти с погрешностью 10^{-3} корни уравнения: $2e^x=10x$.

Решение:

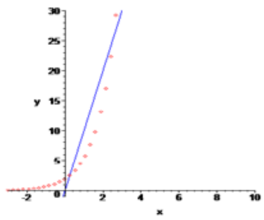
Найдем отрезок $[a,b]$, в котором расположено искомое значение корня $x=c$ графическим способом.

Для построения графиков f(x) используется команда **plot**(f(x), x=a..b, y=c..d, parameters), где parameters − параметры управления изображением. Настройка изображения также может осуществляться с панели инструментов.

Основные параметры команды plot: **title**="text", где text − заголовок рисунка; **coords**=polar - в полярных координатах; **axes** − установка типа осей: axes=NORMAL; axes=BOXED; axes=FRAME; axes=NONE; **scaling** −- установка масштаба рисунка: scaling=CONSTRAINED − одинаковый масштаб; scaling=UNCONSTRAINED − график масштабируется; **style**=LINE(POINT); **numpoints** = n − число точек графика.

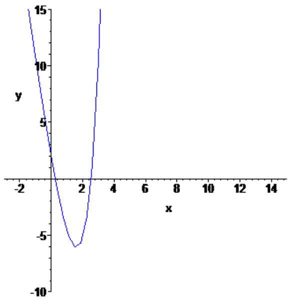
Можно построить два графика левой и правой части или перенести все в одну часть и построить один график. В первом случае надо находить точки пересечения графиков, а во втором – точки пересечения с осью OX.

```
> restart;
> plot([2*exp(x), 10*x], x=-3..10,y=-1..30, color=[red,blue], style=[point,line]);
```



или

```
> plot([2*exp(x)- 10*x], x=-3..15,y=-10..15, color=[blue], style=[line]);
```



Запишем итерационный процесс, используя оператор цикла **while …. do.** Предварительно введем функцию:

```
> restart;
f := x -> evalf(2*exp(x)-10*x);
```

$f := x \to \mathrm{evalf}(2\,\mathbf{e}^{x} - 10\,x)$

Зададим начальный отрезок для левого корня и точность:

```
> a:=-1;b:=2;eps:=0.001;
```

Вычислим значения функции на концах отрезка и определим середину отрезка:

```
> f(a);f(b);
c:=(a+b)/2;
```

Организуем итерационные вычисления метода деления пополам:

```
> while abs(f(c))>eps do
if evalf(f(a)*f(c))>0 then a:=c else b:=c end if;
c:=(a+b)/2;
end do;
```

Итогом итераций будет вывод на экран всех приближенных значений

```
> evalf (c);
```

0.2592163086

Проверка: насколько правая часть близка к нулю

```
> evalf(f(c));
```

Зададим начальный отрезок для правого корня и точность:

```
> a:=2;b:=4;e:=0.001;
> f(a);f(b);
> c:=(a+b)/2;
> while abs(f(c))>e do
if evalf(f(a)*f(c))>0 then a:=c else b:=c end if;
c:=(a+b)/2;
end do;
> evalf(c);
```

Проверка: насколько правая часть близка к нулю

```
> evalf(f(c));
```

Задания для самостоятельного решения по теме 3.

Решить уравнения методом половинного деления:

1.1 $\sqrt{x} = x - 2$; **1.2** $\sqrt[4]{x} = 4 - 3x$; **1.3** $2^{|x|} = x + 5$; **1.4** $3^{x} = 12x$;

1.5 $\sqrt[4]{x} = 34 - 2x$; **1.6** $\lg x = -\sqrt{x}$; **1.7** $\log_2 x = x^2 - 5x$; **1.8** $2^{x} = x^2 + 2x$;

1.9 $\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) = 2^{x}$; **1.10** $\dfrac{\log_3(5x - 6)}{\sqrt{10 - 3x}} = 2$.