Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема1. «Случайные события»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Москва: Высш. школа, 1977. – 479 с.

2. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007.– 288 с.

3. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А. П.Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть – Минск: Выш. школа, 1992. – 191 с.

1.1 Классификация событий.

Будем называть опытом, или испытанием, всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление.

Например, опытом является стрельба по мишени, бросание монеты и т.д.

Возможный результат опыта называют событием.

Например, при стрельбе по мишени событиями будут попадание и промах.

События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита *A, B* и т.д.

Наблюдаемые события можно разделить на 3 вида:

1. **достоверные,**
2. **невозможные,**
3. **случайные.**

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Например, в сосуде находится вода при нормальном атмосферном давлении и

$$t = 20^0 C.$$

Тогда событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» является достоверным при заданных условиях «нормальное атмосферное давление,

$$t = 20^0 C \text{ ».}$$

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий.

Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если заданы условия «нормальное атмосферное давление, $t = 20^0 C$ ».

Случайным называют событие, которое при осуществлении данной совокупности условий может произойти, а может и не произойти.

Например, при подбрасывании монеты мы не можем предсказать исход: упадет монета гербом вниз или вверх.

Поэтому событие «при бросании монеты выпал герб» - случайное.

Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия многих случайных причин (например, сила с которой подбрасывают монету, форма монеты и т.д.).

Учесть влияние этих причин на результат невозможно, поскольку их число очень велико и законы их действия неизвестны.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые многократно повторяются при осуществлении одних и тех же условий, т.е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называются равновозможными, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

образуют полную группу, если в результате испытания появиться хотя бы одно из них.

Если события образующие полную группу попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Пример.

Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. **Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий:**

«выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй»,

«выигрыш не выпал на первый билет, а выпал на второй»,

«выигрыш выпал на оба билета»,

«выигрыш не выпал на оба билета».

Эти события образуют полную группу попарно не совместных событий.

Два события называются противоположными, если появление одного из них равносильно не появлению другого.

Примеры противоположных событий: попадание и промах при стрельбе, «герб», «цифра» при бросании монеты.

Если одно из противоположных событий обозначено буквой *А*, то другое обозначают $\overline{A}$

Например, если *А* - попадание, то $\overline{A}$ **-промах при стрельбе.**

События считают равновозможными, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Например, при бросании монеты событие *А* - «появление цифры» и событие *В* - «появление герба» равновозможны.

При этом предполагается, что монета изготовлена из однородного материала и имеет правильную цилиндрическую форму.

1.2 Классическое определение вероятности

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется элементарным исходом (элементарным событием или шансом).

Рассмотрим пример.

Пусть в урне находится 6 одинаковых тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них красные, 3 - синие, 1 - белый.

Под событием *A* будем понимать «появление цветного шара.».

В нашем испытании возможны следующие элементарные исходы:

ω_1 **-появился белый шар,**

ω_2, ω_3 **-появился красный шар,**

$\omega_4, \omega_5, \omega_6$ **-появился синий шар.**

Эти исходы образуют полную группу попарно-несовместных событий и они равновозможны, поскольку шары вынимают на удачу, они одинакового размера и тщательно перемешаны.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называют благоприятствующими этому событию.

В нашем примере событию *A* «появление цветного шара» благоприятствуют 5 элементарных исходов: $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$

Вероятностью события *A*, называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов образующие полную группу

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.1)$$

***где m*-число элементарных исходов, благоприятствующих *A*, *n*- общее число элементарных исходов.**

В нашем примере, всего элементарных исходов *n=6,* из них *m=5* благоприятствуют событию *А.*

Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна

$$P(A) = \frac{5}{6}.$$

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то

$$m = n, \qquad P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна 0.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных условий не благоприятствуют данному событию, т.е.

$$m = 0, P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов. В этом случае

$$0 \le m \le n, \qquad \frac{0}{n} \le \frac{m}{n} \le \frac{n}{n},$$

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Пример.

Найти вероятность появления верхней грани с цифрой 5 при бросании игральной кости.

Решение.

В данной задаче *n=6, m=1,* поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}.$$

Пример.

Найти вероятность появления верхней грани с числом очков, делящимся на 3, при бросании игральной кости.

Решение.

В данной задаче всего элементарных исходов будет шесть $n=6$. Т.к. на 3 делятся числа 3 и 6, то благоприятствующих исходов будет два $m=2$.

Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

1.3 Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же *n* различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком.

Число всевозможных перестановок из *n* элементов обозначают через P_n и

$$P_n = n! \quad (1.2)$$

где

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

и по определению полагают

$$0! = 1$$

Если среди *n* элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 – элементов другого вида и т.д., то *число перестановок с повторениями* определяют формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \qquad (1.3)$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

Пример.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение.

Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Действительно

$$\begin{array}{c} 123 \\ 231 \\ 312 \\ 213 \\ 132 \\ 321 \end{array}$$

Пример.

Сколько различных перестановок букв можно сделать в слове *колокол*?

Решение.

В слове *колокол* буква *о* повторяется трижды, буква *л-дважды* и буква *к-дважды*.

Для подсчета перестановок применяем формулу (1.3).

При $n = 7, n_1 = 3; n_2 = 2, n_3 = 2,$ **получаем**

$$P_7(3;2;2) = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 210.$$

Размещениями **называют комбинации, составленные из** n **различных элементов по** m**, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.**

Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (1.4)$$

Число размещений* из *n* элементов по *m **элементов** ***с повторениями*** **равно**

$$\left(A_n^m\right)_{\text{с повт}} = n^m \qquad (1.5)$$

Пример.

Сколько можно составить сигналов из 3 флажков различного цвета взятых по 2.

Решение.

Пусть у нас имеется зеленый, красный и синий флажки. Тогда по два мы можем составить следующие сигналы:

$КЗ,$

$КС,$

$ЗС,$

$ЗК,$

$СК,$

$СЗ.$

Т.е шесть сигналов. Этот же результат мы получим, воспользовавшись формулой (1.4)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Сочетаниями называют комбинации, содержащие *m* элементов из числа *n* заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний выражается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (1.6)$$

Число сочетаний с повторениями **из *n* элементов по *m* элементов равно числу сочетаний без повторений из *n+m-1* элементов по *m* элементов**

$$\left(C_n^m\right)_{\text{с повт}} = C_{n+m-1}^m \qquad (1.7)$$

Пример.

Сколькими образами можно выбрать две детали из ящика, содержащий 10 деталей.

Решение.

Искомое число способов находим по формуле (1.6)

$$n = 10, m = 2,$$

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2!8!} = 45.$$

Число размещений перестановок и сочетаний связано равенством

$$\boxed{A_n^m = C_n^m \cdot P_m.}$$

Правило суммы.

Если некоторый объект *A*, может быть выбран из совокупности объектов *n* способами, а другой объект может быть выбран *m* способами, то выбрать либо *A*, либо *B* можно *n*+*m* способами.

Правило произведения.

Если объект *A* можно выбрать из совокупности объектов *n* способами и после каждого такого выбора объекта *B* можно выбрать *m* способами, то пара объектов *(A,B)* в указанном порядке может быть выбрана $n \cdot m$ **способами.**

1.4 Действия над событиями

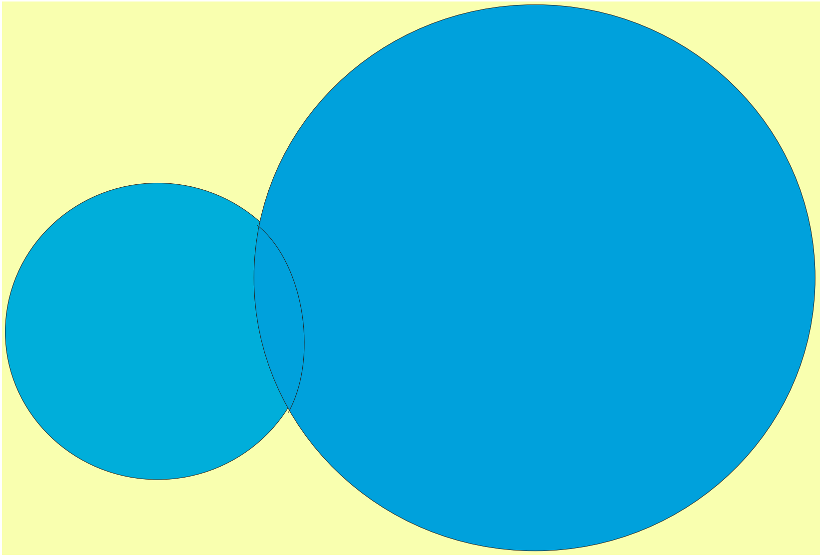
Суммой, или объединением, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Сумма двух событий *A* и *B* обозначается *A*+*B* или

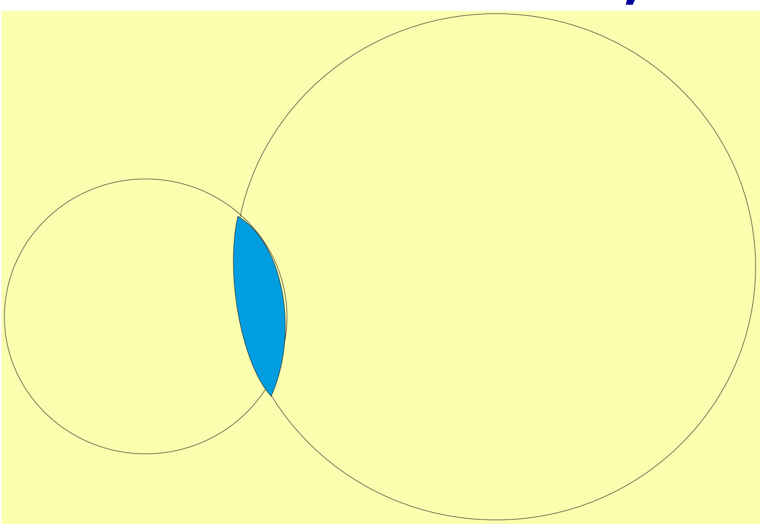
$$A \cup B.$$

Например, если производится два выстрела по мишени и *A* – попадание при первом выстреле, *B* – попадание при втором выстреле, то *A*+*B* попадание при одном из выстрелов или при обоих выстрелах.

Операции над событиями можно представить как операции над множествами.



Произведением $A \cdot B$ **или пересечением** $A \bigcap B$ ***двух событий*** **называется событие, состоящее в одновременном их появлении.**



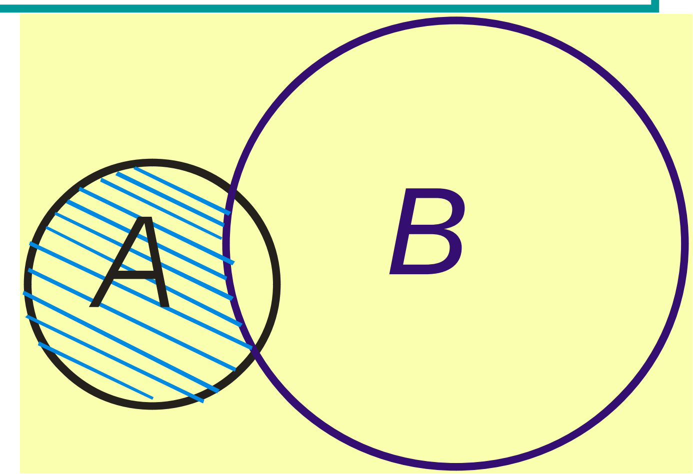
Если события *A* и *B* – несовместны, то их произведение является невозможным событием.

Например, пусть *A* – выигрыш по лотерее 1, *B* – выигрыш по лотерее 2, тогда *AB* – выигрыш по двум лотереям.

Разностью событий A и B **называется событие *C*, которое означает, что наступает событие *A* и не происходит событие *B*.**

Разность событий *A* и *B* обозначается

***A–B* или** $A \setminus B$



Свойства операций объединения и пересечения событий:

1) операции коммутативны, т.е.

$$A \bigcup B = B \bigcup A \qquad A \bigcap B = B \bigcap A$$

2) операции ассоциативны, т.е.

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup C) \bigcup B$$

$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap C) \bigcap B$$

3) операции дистрибутивны

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$$

4) $A \bigcup A = A \qquad A \bigcap A = A$

1.5 Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события **называется отношение числа испытаний, в котором событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний**

$$W(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.8)$$

гле *m*-число появлений события, *n*-общее число испытаний.

В качестве статистического определения вероятности применяют относительную частоту события.

Определение вероятности не требует, что бы испытания проводились в действительности.

Определение же относительной частоты предполагает, что испытания произвели фактически.

Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту после опыта.

Ограниченность классического определения вероятности:

1. Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно.

На практике довольно часто встречаются испытания, в которых число исходов бесконечно.

В таких случаях классическое определение неприменимо.

2. Очень часто не возможно представить результат испытаний в виде совокупности элементарных событий.

Еще труднее указать причины, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

Обычно о равновозможности элементарных событиях говорят из соображения симметрии.

Например предполагают, что игральная кость имеет форму правильного куба и изготовлена из однородного материала.

Поэтому на практике применяют статистическое определение вероятности.

1.6 *Геометрические вероятности*

Пусть отрезок *l* составляет часть отрезка *L*. На удачу на отрезок *L* поставлена точка.

Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка *L*, вероятность попадания точки на отрезок *l*, пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно *L*.

Таким образом, вероятность попадания точки на отрезок *L* можно определить:

$$P = \frac{l}{L}, \quad (1.9)$$

На плоскости имеется область *G* и область g в ней.

Площади их равны S_G **и** S_g **соответственно.**

В область *G* бросается наудачу точка.

Вероятность того, что точка окажется в области g***,*** **принимается равной**

$$P = \frac{S_g}{S_G}. \quad (1.10)$$

Аналогично определяется ***вероятность попадания точки в объем*** V_{g_1} находящийся в объеме V_{G_1}

$$P = \frac{V_{g_1}}{V_{G_1}} \qquad (1.11)$$

Вероятности, определенные таким образом, получили название ***геометрических.***

Пример.

На плоскости начерчены две концентрические окружности. Радиусы, которых соответственно 5 и 10 сантиметров. Найти вероятность того, что точка брошенная на удачу в большой круг попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

Решение.

Площадь большого круга

$$S_G = \pi r_2^2 = 100\pi,$$

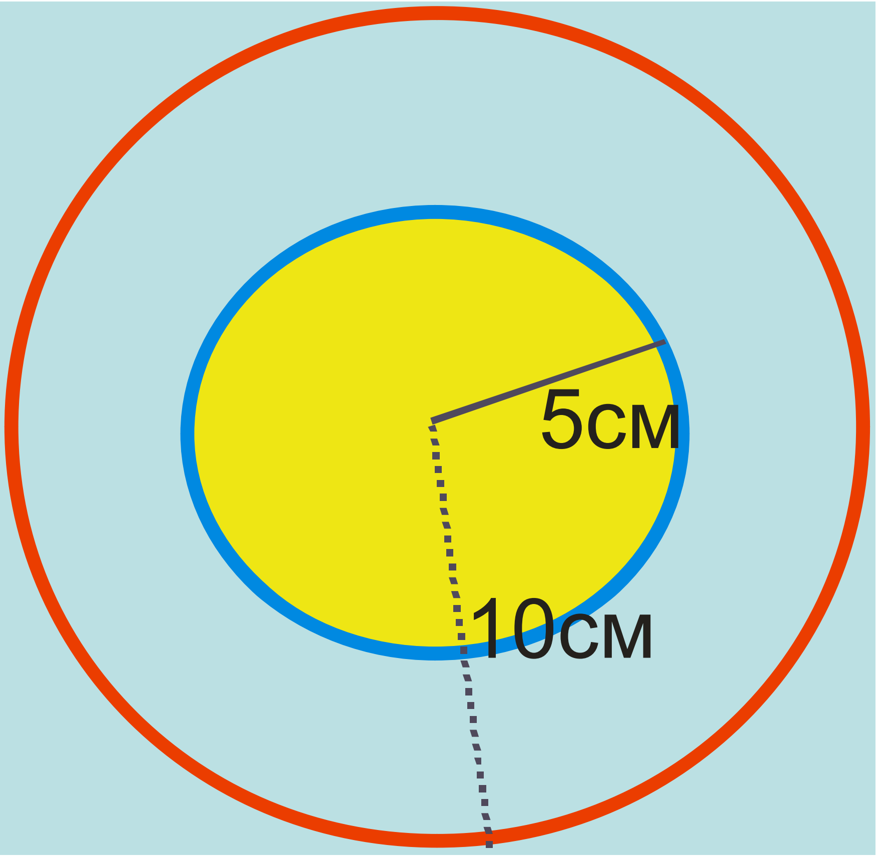
Площадь кольца

$$S_g = \pi(r_2^2 - r_1^2) =$$

$$= \pi(100 - 25) = 75\pi.$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0{,}75.$$



Пример.

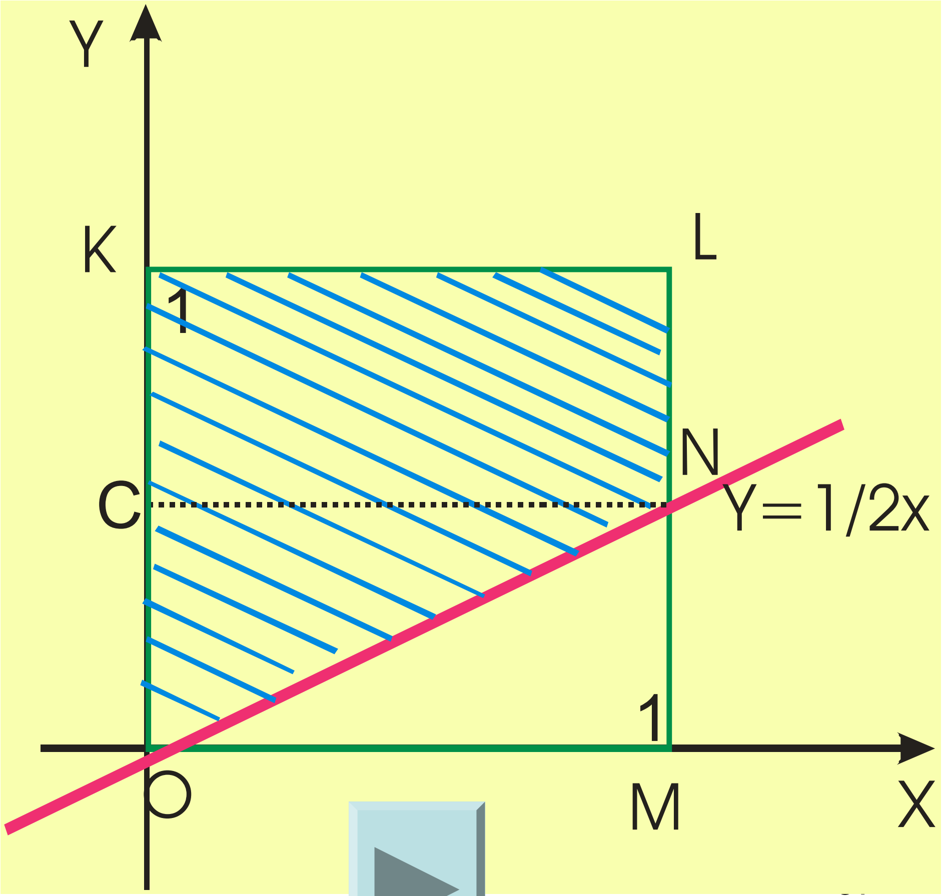
В квадрат с вершинами в точках *O(0,0), K(0,1),L(1,1),M(1,0)* наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству *y>x/2.*

Решение.

Проведем прямую *y=1/2x*. Она пересечет отрезок *ML* в точке *N(1;1/2).*

Эта прямая рассекает плоскость на две полуплоскости.

Для координат точек верхней из них будет выполнятся неравенство *y>x/2.*



Поэтому $S_g = S_{OKLN}$

Многоугольник *OKLN* состоит из прямоугольника *CKLN*, его площадь $S_{CKLN} = 1/2$

и треугольника *OCN*, $S_{\Delta OCN} = 1/4.$

Поэтому $S_g = S_{OKLN} = 1/2 + 1/4 = 3/4.$

Площадь квадрата *OKLM* равна единице

$$S_G = S_{OKLM} = 1$$

Поэтому искомая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{S_{OKLN}}{S_{OKLM}} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Пример.

Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго - двум часам.

Решение.

Обозначим через *x* и *y* время прибытия пароходов.

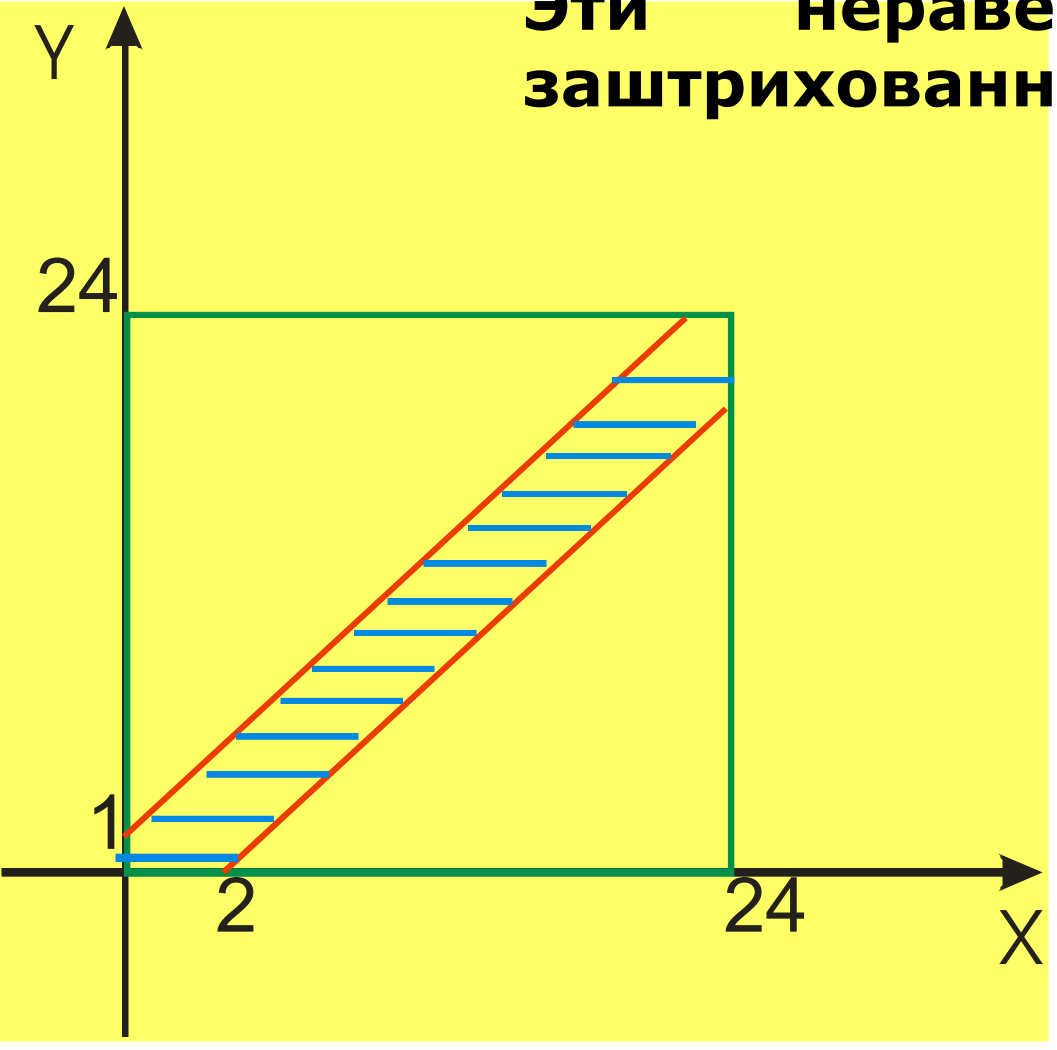
Возможные значения *x* и *y*:

$$0 \le x \le 24, \quad 0 \le y \le 24.$$

Благоприятствующие значения

$$y - x \le 1, \quad x - y \le 2.$$

Эти неравенства определяют заштрихованную область.



Площадь этой области

$$S_g = 24 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 23 - $$
$$- \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 22 = 69{,}5.$$

Поскольку

$$S_G = 24 \cdot 24 = 576,$$

искомая вероятность

$$P=\frac{S_g}{S_G}=\frac{69{,}5}{576}=0{,}121.$$

1.7 Закон сложения вероятностей

Суммой *A+B* события *A* и *B*, называют событие состоящие в появлении события *A* или события *B*, или обоих этих событий.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании.

Если события *А* и *В* несовместны, то под *А+В* понимают появление либо события *А*, либо события *В*.

Пусть события *А* и *В* несовместны, причем вероятности этих событий известны.

Теорема 1.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B).}$$

Доказательство.

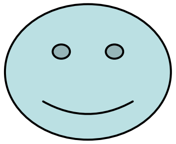
Пусть *n* общее число возможных элементарных исходов,

m_1 - число исходов благоприятствующих событию *A*,

m_2 - число исходов благоприятствующих событию *B*.

Тогда число элементарных исходов благоприятствующих наступлению либо событию *A*, либо *B* $m_1 + m_2$

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$



Следствие. Вероятность появления одного из несколько попарно несовместных событий, равно сумме вероятности этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

Пример.

В урне 30 шаров: 10-красных, 5-синих, 15-белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение.

Появление цветного шара означает появление либо синего, либо красного шара.

Пусть событие *A*- это появление красного шара. Тогда вероятность появление события *A*

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

Пусть событие *B*- это появление синего шара:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},$$

События A и B несовместны, поскольку появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета. Поэтому применима теорема сложения

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Теорема 2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образующих полную группу равна единице, т.е.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Доказательство основано на том, что появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна 1, т.е.

$$P(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) = 1.$$

Поскольку любые два события полной группы попарно несовместны, можно применить теорему сложения вероятностей

$$P(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Пример.

Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов *A,B,C*. Вероятность получения пакета из города *A* равна 0,7, из города *B* – 0,2.

Найти вероятность того, что очередной пакет получат из города С.

Решение.

События «пакет получен из города *A*», «пакет получен из города *B*», «пакет получен из города *C*» образуют полную группу, поэтому

$$P(A)+P(B)+P(C)=1,$$
$$0.7+0.2+P(C)=1,$$
$$P(C)=1-0.9=0.1.$$

Два события, называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пусть события *A* и *B* совместны и известны их вероятности *P(A)*, *P(B)*, а так же известна вероятность их совместного появления *P(AB)*.

Нужно найти вероятность события *A+B*, которое состоит в том, что появиться хотя бы одно из событий *A* и *B*.

Теорема 3.

Вероятность суммы совместных событий вычисляется по формуле:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (1.12)$$

Доказательство.

Поскольку события *A* и *B* совместны, то событие *A+B* наступит, если наступит хотя бы одно из трех несовместных событий

$$A\overline{B}, \overline{A}B, AB$$

Тогда для несовместных событий, мы можем записать

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB), \qquad (1.13)$$

Событие *A* произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий $A\overline{B}, AB,$

тогда для двух несовместных событий можно применить теорему сложения

$$P(A)=P(A\overline{B}+AB)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \quad (1.14)$$

Событие *В* произойдет, если произойдет хотя бы одно из двух несовместных событий $B\overline{A}, BA.$

Поскольку события $B\overline{A}, BA.$

несовместны, то к ним так же можно применить теорему для несовместных событий

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(BA).$$

Отсюда

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(BA). \qquad (1.15)$$

Подставим (1.14) и (1.15) в (1.13), и получим выражение (1.12)

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

1.8 Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из противоположных событий обозначить через *A*, то другое принято обозначать $\overline{A}.$

Пример.

Попадание и промах при выстреле по цели- это 2 противоположных события, т.е. если *A*- попадание, то $\overline{A}$ **- промах.**

Теорема.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице $P(A)+P(\overline{A})=1.$

Замечание. Если вероятность одного из противоположных событий обозначить через p, а вероятность другого события q, то

$$\boxed{p+q=1.}$$

Пример.

Вероятность того, что день будет дождливым

$$p=0.7$$

Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение.

События «день будет ясным», «день дождливый» противоположные. Поэтому

$$p+q=1,\qquad 0.7+q=1,$$

$$q=0.3.$$

1.9 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P_A(B)$, **или *P(B/A)* называют вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие *A* наступило.**

Пример.

В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие *B*), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие *A*).

Решение.

После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых

$$P_A(B) = \frac{3}{5}.$$

Произведением двух событий *A* и *B* подразумевают событие *AB*, состоящее в совместном появлении этих событий.

Пример: Если событие *A* – «деталь годная», а событие *B* – «деталь окрашенная», то под *AB* понимается деталь годная и окрашенная.

Будем рассматривать два события *A* и *B* и полагаем, что вероятности $P(A), P_A(B)$ **известны.**

Теорема 1.

Вероятность совместного появления двух событий, равно произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (1.16)$$

Следствие. **Для трех событий (1.16) примет вид:**

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Порядок, в котором расположены события может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Событие *B*, называют **независимым** **от события *A*, если появления события *A* не изменяет вероятности события *B*.**

В этом случае условная вероятность события *B*, будет равна его безусловной вероятности

$$\boxed{P_A(B) = P(B).}$$

В этом случае **теорема умножения** **для независимых событий примет вид**

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B), \quad (1.17)}$$

т.е. вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий.

На практике о независимости событий судят по смыслу задачи.

Например, вероятности поражения цели каждым из орудий не зависит от того, поразило ли цель другое орудие. Поэтому событие «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» будет независимы.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

Например события *A*, *B*, *C* попарно независимы, если независимы события *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*.

Несколько событий называют независимыми в совокупности, или просто независимыми, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Например, события *A*, *B*, *C* независимы в совокупности, если независимы *A* и *B*, *A и C*, *B и C*, *A и BC*, *B и AC*, *C и AB*.

Следствие.

Вероятность совместного появления несколько событий, независимых в совокупности равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \quad (1.`18)$$

Пример 1.

В урне 5 белых, 4 черных, 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что на удачу извлекают 1 шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании (*событие А*), появится белый шар, во втором – черный (*событие В*), и при третьем- синий (*событие С*).

Решение.

Вероятность появления белого шара в первом испытании:

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

Вероятность появления черного шара при втором испытании вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар

$$P_A(B) = \frac{4}{11}$$

Вероятность того, что при третьем испытании появился синий шар, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар и при втором - черный

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}.$$

Вероятность совместного появления:

$$P(ABC) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Пример 2

Найти вероятность совместного появления герба, при первом бросании двух монет.

Решение.

Событие *A* –появление герба на одной монете, тогда вероятность события

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Событие *B* –появление герба на второй монете:

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

События *A* и *B* независимы, поэтому искомая вероятность по теореме умножения для независимых событий

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

1.9 Вероятность появления хотя бы одного события

Если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из них означает, наступление одного или двух, или трех событий.

Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_n,$

являются независимыми в совокупности.

Теорема. **Вероятность появления хотя бы одного из событий** $A_1, A_2, \dots, A_n$

независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n). \quad (1.19)$$

Доказательство.

Событие *A* и событие $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$

(ни одно из событий не наступило), являются противоположными (т.к. они образуют полную группу событий), поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1:

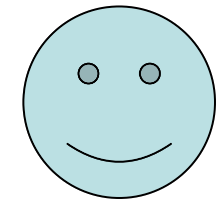
$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = 1,$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n).$$

События $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$

являются независимыми

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$



Пример.

Вероятности попадания в цель при стрельбе из 3 орудий такова:

$$p_1 = 0.8, \;\; p_2 = 0.7, \;\; p_3 = 0.9.$$

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие *A*), при одном залпе из всех орудий.

Решение.

Обозначим через A_1 **- попадание первого орудия,**

A_2 -попадание второго орудия,

A_3 - попадание третьего орудия.

Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от стрельбы из других орудий.

Поэтому события A_1, A_2, A_3

будут независимы в совокупности.

Вероятность событий противоположных событиям $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$

(т.е. вероятности промахов) будем обозначать:

$$q_1 = P(\overline{A}_1) = 1 - p_1 = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$q_2 = P(\overline{A}_2) = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3,$$

$$q_3 = P(\overline{A}_3) = 1 - p_3 = 1 - 0.9 = 0.1.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n),$$

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.994.$$

Замечание: Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного события можно записать в виде:**

$$P(A) = 1 - q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \;\; = 1 - q^n.$$

1.11 Формула полной вероятности

Пусть несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$

образуют полную группу и пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n).$

Пусть событие *A* наступает при условии появления одного из несовместных событий

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ **и пусть известны условные вероятности:**

$$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A).$$

Поскольку заранее не известно какое из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ **наступит их называют гипотезами.**

Нужно найти вероятность события $P(A)$

Теорема. **Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при условии появлении одного из совместных событий** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ **которые образуют полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий, на соответствующую условную вероятность события *A***

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+$$
$$+P(B_n)P_{B_n}(A). \quad (1.20)$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство:

По условию теоремы событие *A* может наступить, если наступит одно из несовместных событий:

$$AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$$

Пользуясь теоремой сложения получим

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n). \quad (1.21)$$

По теореме умножения

$$P(AB_1) = P(B_1)P_{B_1}(A), \quad (1.22)$$

$$P(AB_2) = P(B_2)P_{B2}(A), \quad (1.23)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(AB_n) = P(B_n)P_{Bn}(A). \quad (1.24)$$

Если (1.22), (1.23), (1.24) подставить в (1.21), то мы получим (1.20).

Пример.

В первой коробке содержится 20 радио ламп, из них 18 стандартных. Во второй - 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки на удачу взята лампа и переложена в первую Найти вероятность того, что лампа на удачу извлечена из первой коробки будет стандартная.

Решение.

Пусть событие *А* – «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (гипотеза B_1), либо нестандартная (гипотеза B_2).

Вероятность гипотез

$$P(B_1) = \frac{9}{10}, \qquad P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Аналогично, если была переложена нестандартная лампа

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная деталь

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A),$$

$$P(A) = \frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21} + \frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21} \approx 0.9.$$

Формула Байеса (Бейеса)

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ **образующих полную группу.**

Известны $$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A).$$

В этом случае мы можем найти, согласно (1.20), полную вероятность события *A*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + \\ + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим произведено испытание, в результате которого событие А появилось.

Поставим своей задачей определить, как изменились вероятности гипотез.

Т.е. нас интересуют условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n).$$

Определим условную вероятность $P_A(B_1).$

По теореме умножения

$$P(AB_1) = P(B_1)P_{B_1}(A) = P(A)P_A(B_1),$$

$$P_A(B_1) = \frac{P_A(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)},$$

В качестве $P(A)$ **берется выражение (1.20)**

Аналогичные рассуждения можно провести и для других гипотез.

Т.е. условная вероятность любой гипотезы B_i может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}, \quad (1.25)$$

$$(i = 1,..,n).$$

Выражение (1.25) называется формулой Бейеса.

Пример.

Каждый из танков независимо сделал выстрел по некоторому объекту. Вероятность поражения цели первым танком $p_1 = 0,8,$ **вторым** $p_2 = 0,4.$ **Объект поражен одним попаданием.**

Определить вероятность того, что объект поражен первым танком.

Решение.

Событие *A* – «поражение объекта одним попаданием».

До стрельбы возможны следующие гипотезы:

B_1 **-первый танк попал, второй не попал.** **Вероятность этой гипотезы**

$$P(B_1) = p_1 q_2 = p_1(1 - p_2) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48,$$

B_2 **-первый танк не попал, второй попал**

$$P(B_2) = p_2 q_1 = p_2(1 - p_1) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08,$$

B_3 **- оба танка не попали**

$$P(B_3) = q_1 q_2 = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12,$$

B_4- оба танка попали $P(B_4) = p_1 p_2 = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32.$

Определим условные вероятности наступления события

$$P_{B1}(A) = 1, \quad P_{B3}(A) = 0,$$

$$P_{B2}(A) = 1, \quad P_{B4}(A) = 0,$$

$$P_A(B_1) = $$

$$= \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) + P(B_4)P_{B_4}(A)} =$$

$$= \frac{0.48 \cdot 1}{0.48 \cdot 1 + 0.08 \cdot 1 + 0.12 \cdot 0 + 0.32 \cdot 0} = \frac{6}{7}.$$

1.12 Формула Бернулли

Пусть произведена серия из *n*-испытаний. В каждом из которых событие *A* может появиться, а может и не появиться.

Будем полагать, что в каждом испытании вероятность события *A* одна и та же и равна *P*.

Вероятность того, что событие А не наступит в испытании будем обозначать за $q = 1 - p$

Поставим перед собой задачу, вычислить вероятность того, что в *n* испытаниях событие *A* осуществится k раз, а следовательно не осуществится $n - k$ **раз.**

Событие *A* появиться *k* раз при *n* испытаниях, если чередование $A,\ \overline{A}$ **будет, например, таким**

$$\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k}\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-k}$$

Вероятность такого события будет равна

$$p^{\kappa}\cdot q^{n-k}$$

Но событие *A* может появится *k* раз при *n* испытаниях и при другой последовательности чередования $A,\ \overline{A}.$

Например

$$\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k-1}\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-k}\cdot A.$$

Вероятность появления такого чередования будет

$$p^{k-1} \cdot q^{n-k} \cdot p = p^{k} \cdot q^{n-k}.$$

Число всех возможных чередований будет равно числу сочетаний из *n*-элементов по *k*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, вероятность того, что событие *A* появится *k* раз в *n* испытаниях

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^{к} \cdot q^{n-k}, \qquad (1.26)$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{к} \cdot q^{n-k}. \quad (1.27)$$

Полученную формулу называют формулой Бернулли.

Пример.

Какова вероятность того, что событие *A* произойдет два раза

а) при двух испытаниях,

б) при трех испытаниях,

в) при 10 испытаниях, если вероятность появления события при каждом испытании

$$p = 0.4$$

Решение.

Для решения воспользуемся формулой (1.27)

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^к \cdot q^{n-k}. \quad (1.27)$$

а) $n = 2, k = 2, p = 0.4, q = 0.6,$

$$P_2(2) = \frac{2!}{2!(2-2)!}0.4^2 0.6^0 = [0! = 1] = 0.16,$$

б) $n = 3, k = 2, p = 0.4, q = 0.6,$

$$P_3(2) = \frac{3!}{2!1!}0.4^2 0.6 = 0.288,$$

в) $n = 10, k = 2, p = 0.4, q = 0.6,$

$$P_{10}(2) = \frac{10!}{2!8!}0.4^2 0.6^8 = 0.00203.$$

1.13 Локальная теорема Лапласа

Пользоваться формулой Бернулли весьма неудобно при больших значениях *n*, т.к. формула требует выполнения действий над громадными числами.

Например. $n = 50, k = 30, p = 0.1,$

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} 0.1^{30} 0.9^{20}.$$

Поэтому в случаях, когда число испытаний достаточно велико используют **локальную теорему Лапласа.**

Заметим, что для частного случая, когда $p = \frac{1}{2}$ **формула была найдена в 1730 Муавром, а в 1783 г., для любого p формула была обобщена Лапласом, поэтому теорему называют теоремой Муавра Лапласа.**

Теорема.

Если вероятность *p* появления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие *A* появится в *n* испытаниях *k*-раз $P_n(k)$

приближенно равна значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad (1.28)$$ **где** $$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Имеются специальные таблицы в которых помещены значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

для положительных значений аргумента *x*.

Следует помнить, что функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x).$

1.14 Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$

того, что событие в *n* испытаниях появится от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) = \phi(x'') - \phi(x'), \quad (1.29)$$

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ **и** $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Функцию $$\phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

называют функцией Лапласа.

И при решении задач, пользуются специальными таблицами.

Если $x < 0$ **то пользуются той же таблицей,**

но учитывают, что функция $\phi(x)$ **нечетная**

$$\phi(-x) = -\phi(x).$$

Обычно значения в таблицах приводят до

$x = 5.$ **Если** $x > 5,$ **то значение функции**

$$\phi(x) = 0.5$$