Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема6. «Определенный интеграл»

Михаи́л Васи́льевич Острогра́дский

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

6.1 Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ **задана непрерывная функция**

$$y = f(x).$$

Обозначим через *m* и *M* соответственно наименьшее и наибольшее значение функции на этом отрезке. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$

точками на ряд частичных отрезков:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b,$$ **причем**

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Обозначим, далее, наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке

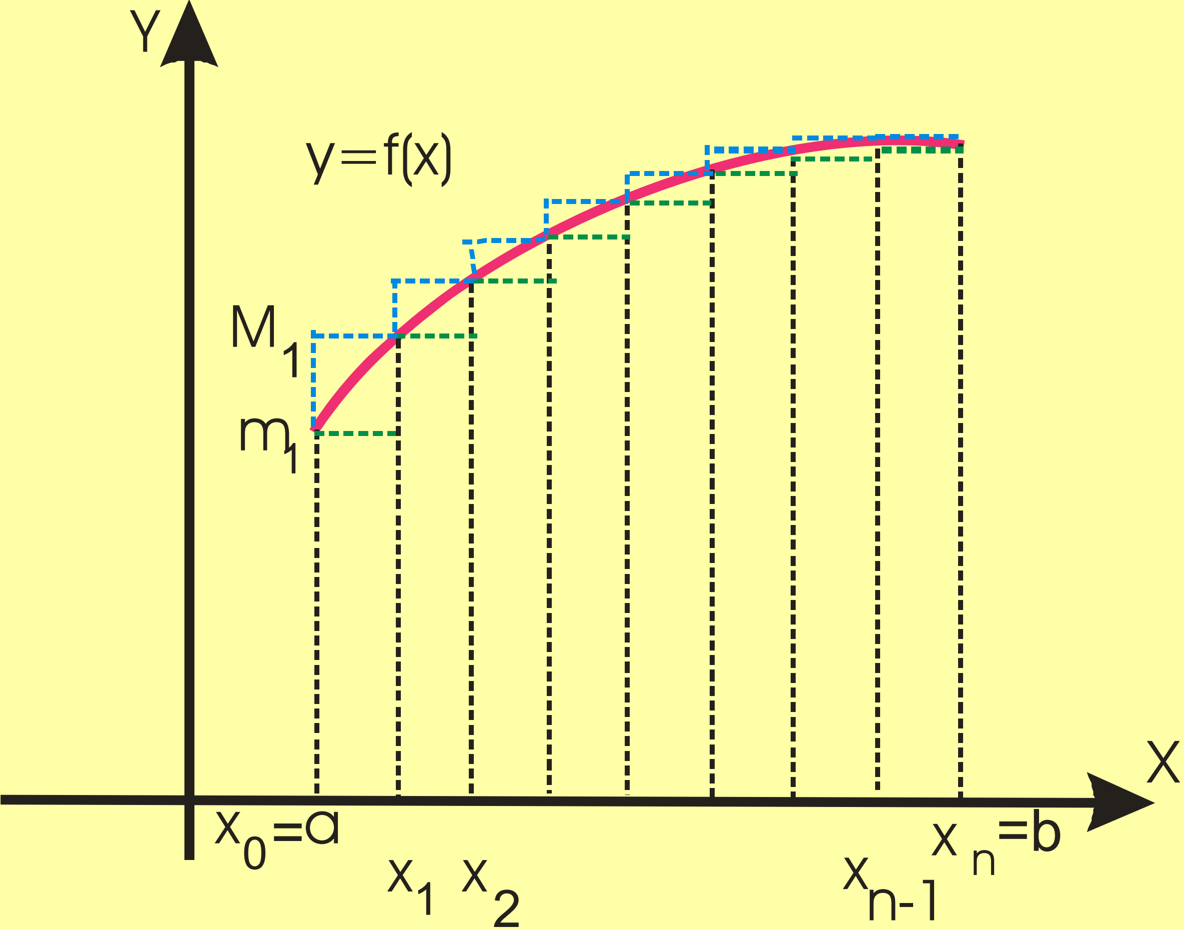
$$\left[x_0, x_1\right], \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0$$ **через** $$m_1, M_1$$

аналогично

$$\left[x_1, x_2\right] \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \qquad m_2, M_2$$

$$\ldots$$

$$\left[x_{n-1}, x_n\right] \qquad \Delta x_n = x_n - x_{n-1} \qquad m_n, M_n$$



Составим суммы:

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i$$

Сумму $\underline{S}_n$ **называют нижней интегральной суммой,**

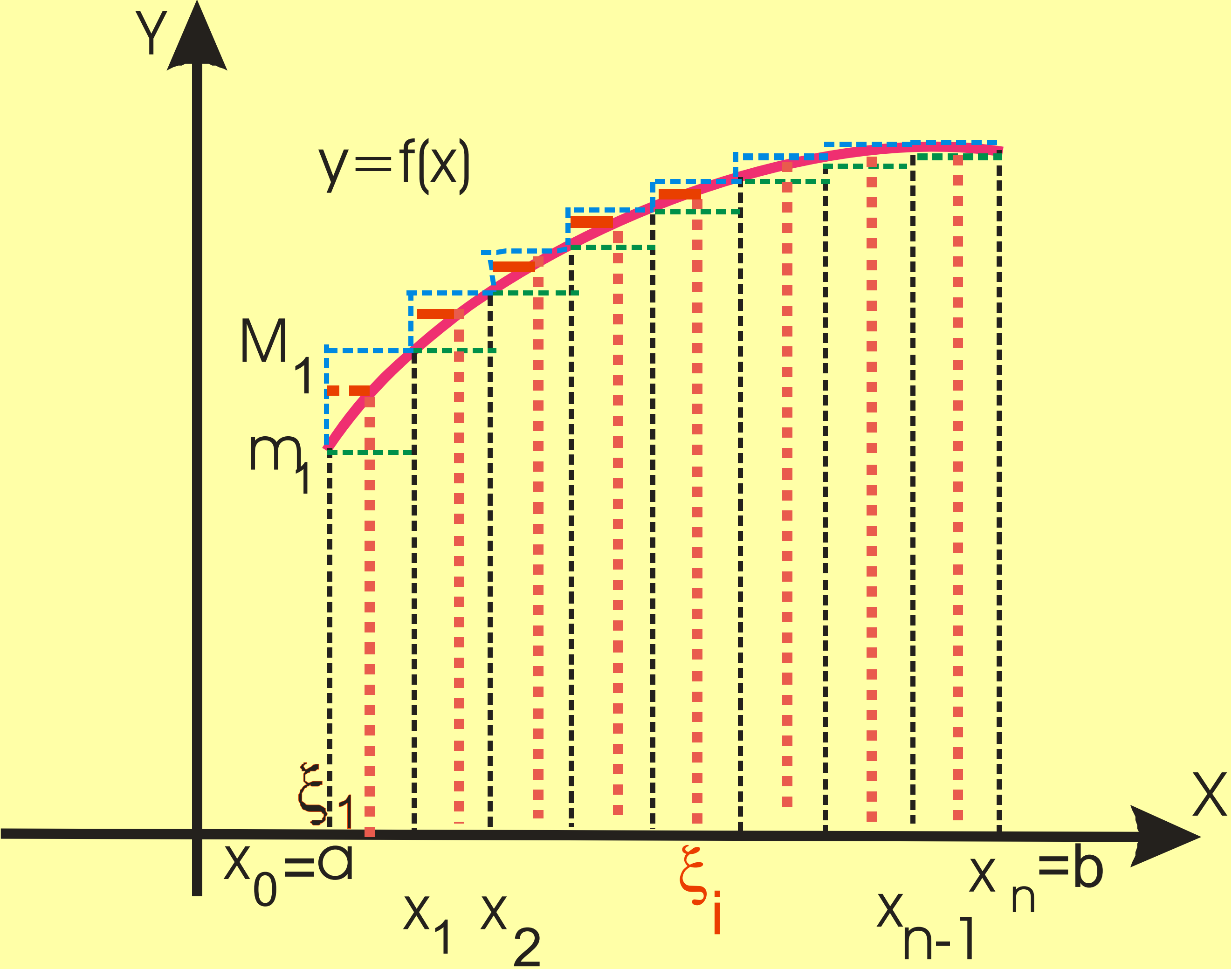
а сумму $\overline{S}_n$ **- верхней интегральной суммой.**

Если $f(x) \geq 0,$ **то нижняя интегральная сумма численно равняется площади «вписанной» ступенчатой фигуры, а верхняя интегральная сумма численно равняется площади «описанной» ступенчатой фигуры.**

На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$

в каждой точке вычисляем значение функции:

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n).$$



Составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Сумма называется интегральной суммой.

Фигура, площадь которой равна S_n **ограничена ломаной, заключенной между «вписанной» ломанной и «описанной» ломанной**

$$\underline{s_n} \le S_n \le \overline{S_n}.$$

Определение:

Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ **таких, что**

$\max \Delta x_i \to 0$ **и при любом выборе точек** ξ_i

интегральная сумма стремиться к одному и тому же пределу

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S,$$

то S называют определенным интегралом от функции ***f(x)*** **на отрезке** $[a, b]$ **и обозначают**

$$\int_a^b f(x)dx$$

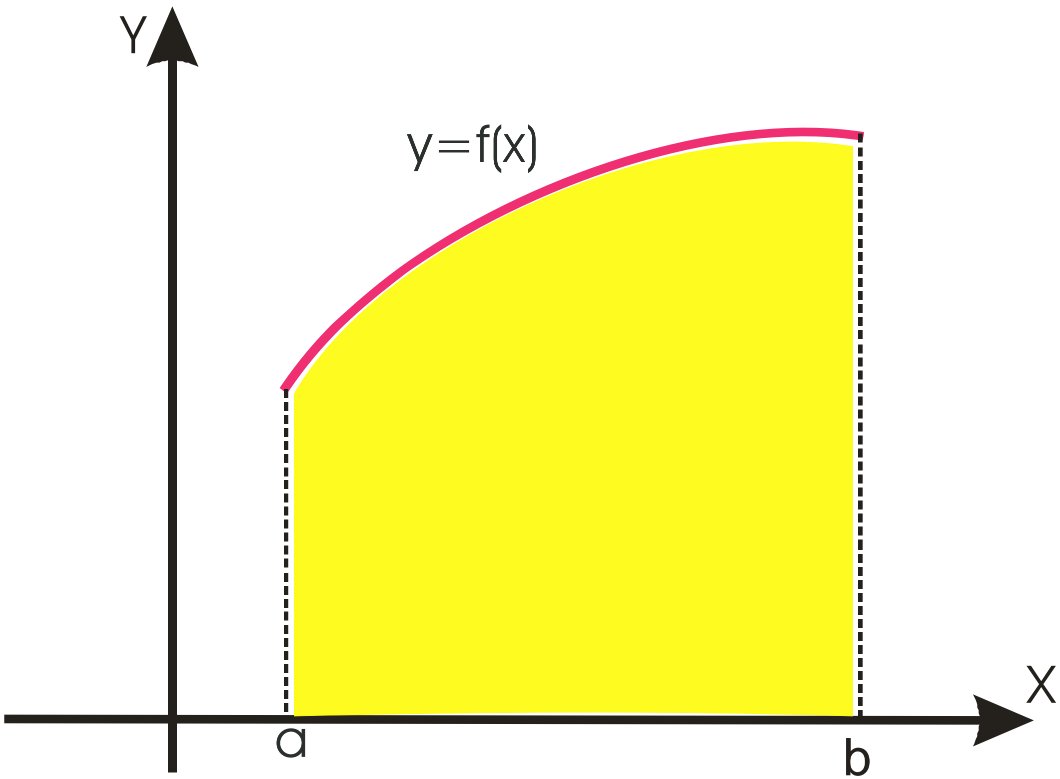
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (6.1)$$

Число *a* называется нижним пределом интеграла, *b*- верхним пределом интеграла.

6.2 Геометрический и физический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ **задана функция** $f(x) \geq 0.$

Фигура, ограниченная сверху графиком функции



$$y = f(x),$$

сбоку прямыми

$$x = a, x = b$$

и снизу осью ох, называется криволинейной трапецией.

Согласно определению, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла.*

Физический смысл определенного интеграла:
работа переменной силы F действующей на отрезке $\left[a\,,b\right]$ **равна определенному интегралу от силы** $F\left(x\right),$ **взятому по отрезку** $\left[a,b\right]$

$$A=\int_a^b F\left(x\right)dx$$

6.3 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема: **Если функция** $y = f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$ **и** $F(x)$ **ее первообразная** $(F'(x) = f(x))$, **то**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.2)$$

Равенство (6.2) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Согласно этой формуле, чтобы вычислить интеграл, нужно вначале найти первообразную функции $F(x)$ **и взять разность *F(b)-F(a)* значений этой первообразной на концах отрезка** $[a, b]$.

Пример:

1. $$\int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

2. $$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_e^{e^2}=$$

$$=\ln\left|\ln e^2\right|-\ln\left|\ln e\right|=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

6.4 Основные свойства определенного интеграла

1. **Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:**

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

Доказательство:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= c \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx.$$

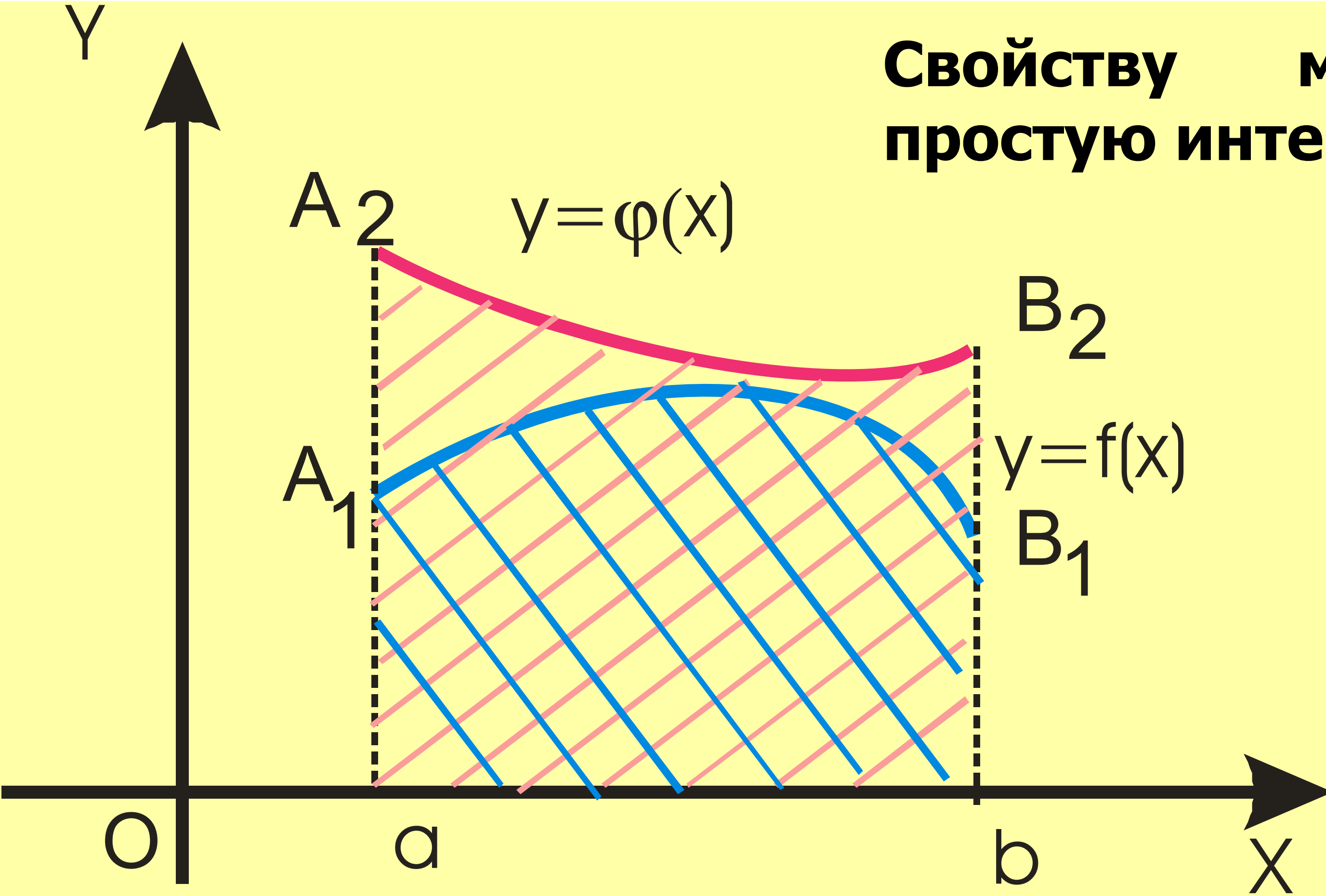
2. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

3. Если на отрезке $[a, b]$, **где** $a < b$

функции удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$,

то $$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$



Свойству можно дать простую интерпретацию:

Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b **не больше площади криволинейной трапеции** aA_2B_2b

4. Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$

на отрезке $[a, b]$, **т.е.** $m \le f(x) \le M$ **и**

$a \le b$, **то**

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Действительно, по условию $m \le f(x) \le M.$

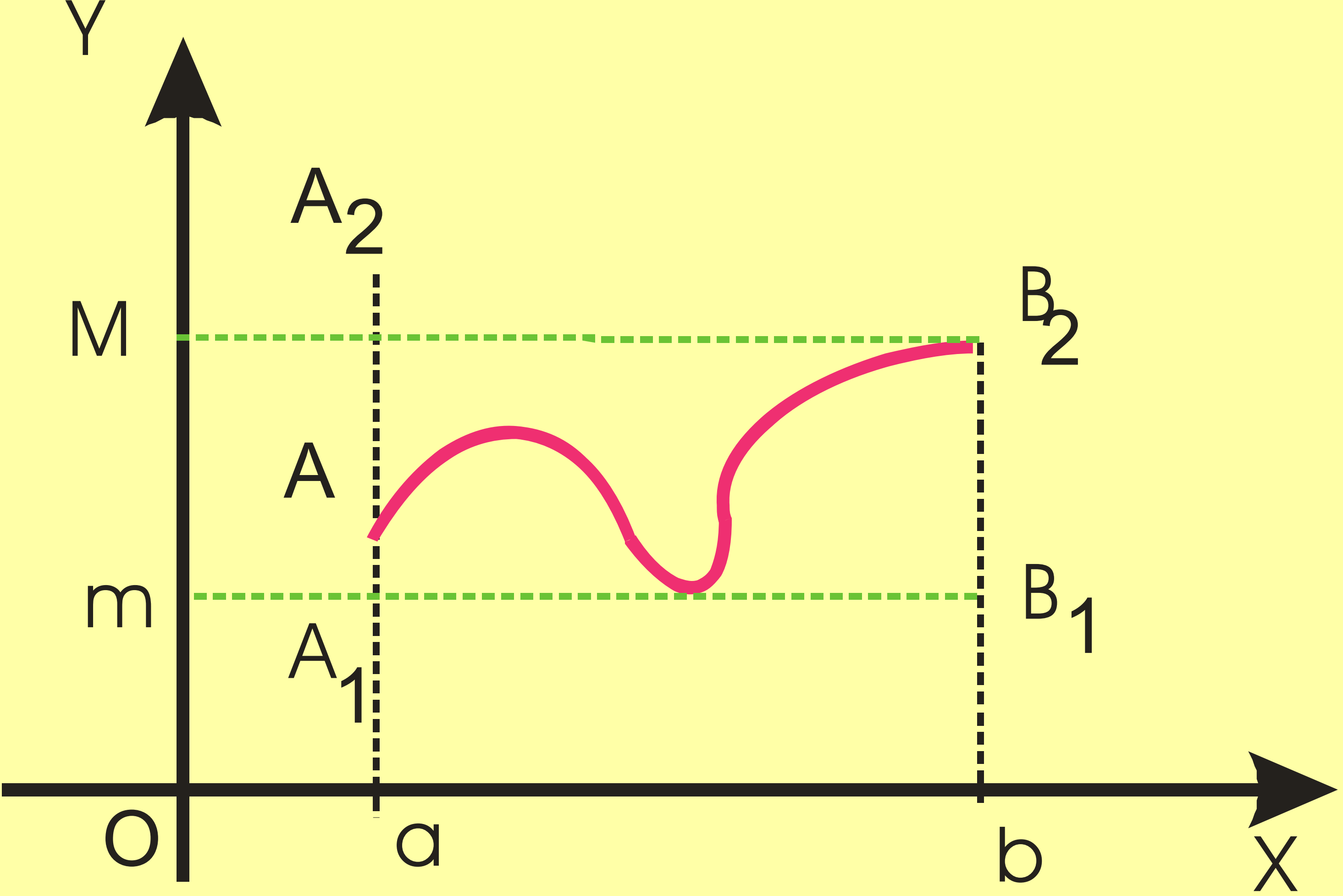
На основании свойства 3 имеем

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

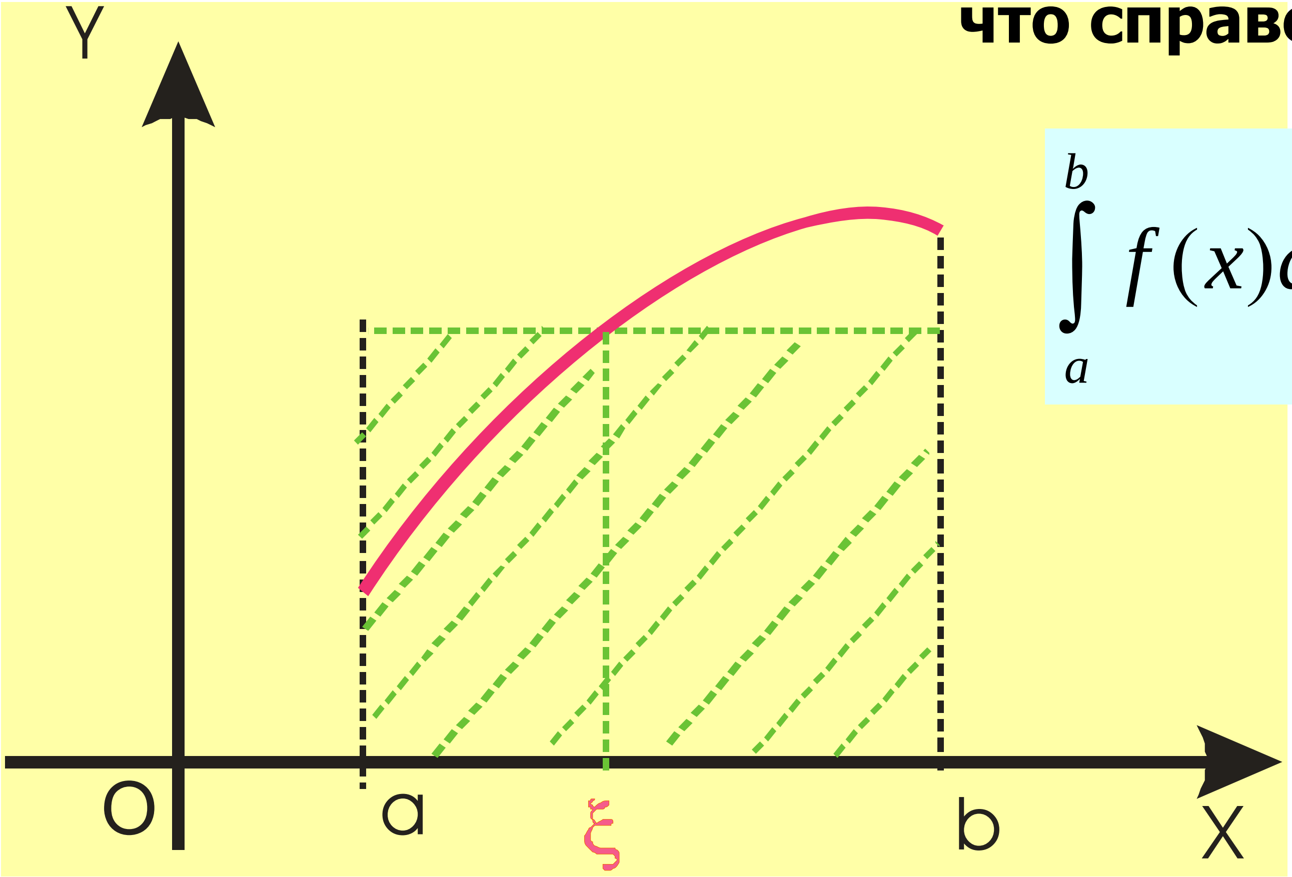
Геометрическая интерпретация:



Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции aAB_2b **заключена между площадями прямоугольников** aA_1B_1b **и** aA_2B_2b.

5. Теорема о среднем: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



Согласно теореме, площадь криволинейной трапеции будет равна, при некотором ξ,

площади прямоугольника высотой $f(\xi)$

и основанием $(b-a)$.

6. Если поменять местами пределы интегрирования, то знак определенного интеграла измениться на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доказательство:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

7. Для любых чисел *a,b,c* справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6.5 Вычисления определенного интеграла

1. Формула Ньютона-Лейбница.

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применять этот метод удобно во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подинтегральной функции $f(x)$.

2. Интегрирование подстановкой.

Теорема: Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx,$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t),$

тогда если **1.** $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$

2. $\varphi(t), \varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$,

3. $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Замечание:

•При вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется.

•Не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x = 0, t = 0 \\ x = 2, t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2};$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)-\sin 0\right) = \pi.$$

3. Интегрирование по частям:

Пусть $u = u(x), v = v(x)$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv, \int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

$$u \cdot v \Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

$$\boxed{\int_a^b udv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b vdu.}$$

Пример:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left[\begin{aligned} & u = x \\ & du = dx \\ & dv = \sin x dx \\ & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{aligned}\right] =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(\pi\cos\pi - 0\cos 0) + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

6.6 Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей

Если на отрезке $[a, b]$, **функция** $f(x) \geq 0$,

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, **прямыми** $x = a, x = b$

и осью ОХ, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx.$

Если $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x)dx$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (6.3)$$

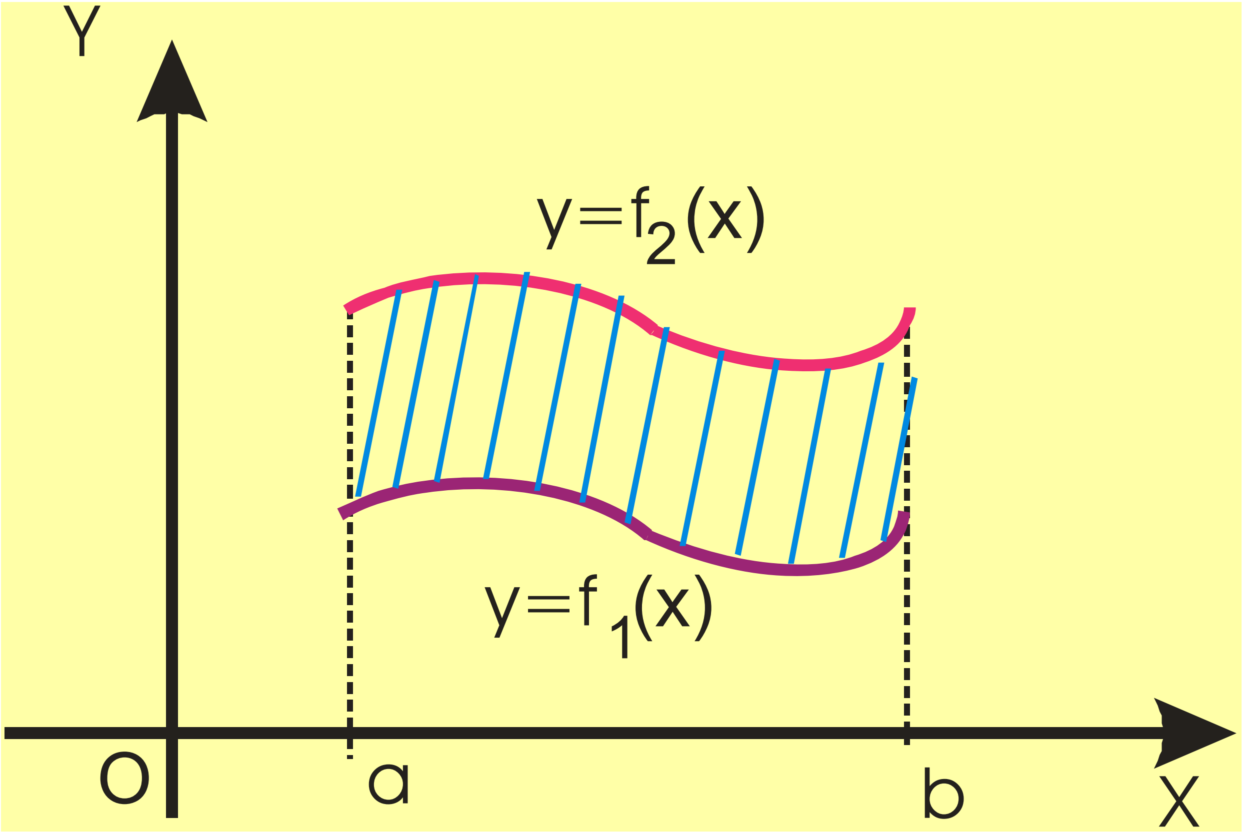
Площадь фигуры, ограниченной кривыми

$y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$ **причем**

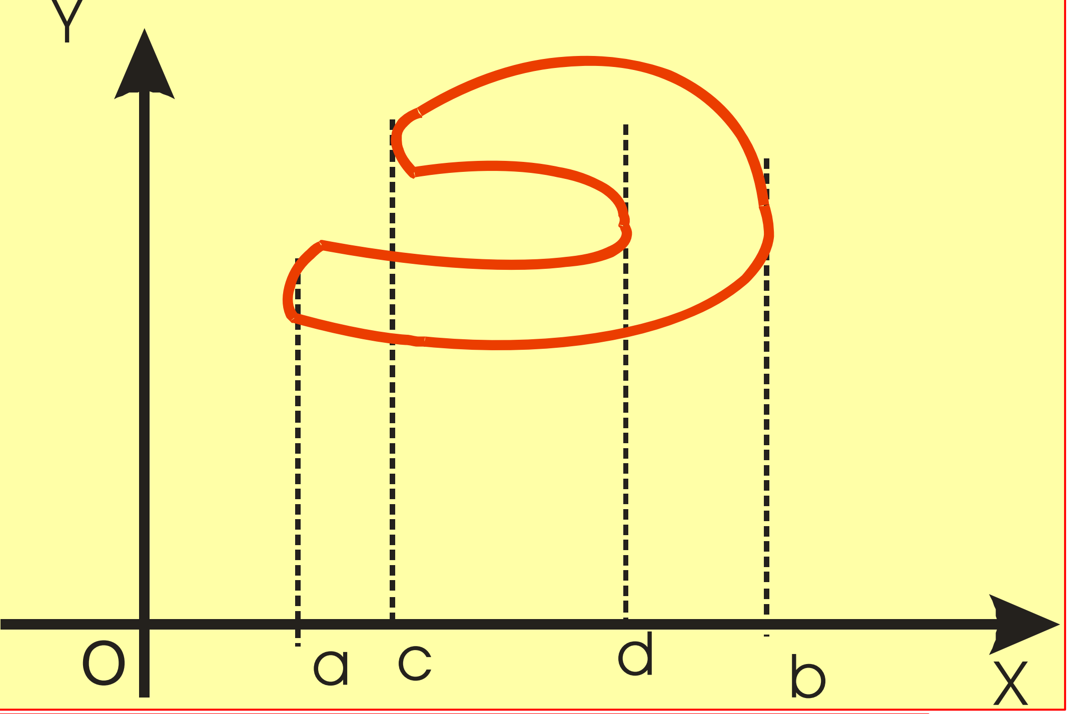
$f_2(x) \geq f_1(x)$ **и прямыми** $x = a, x = b$

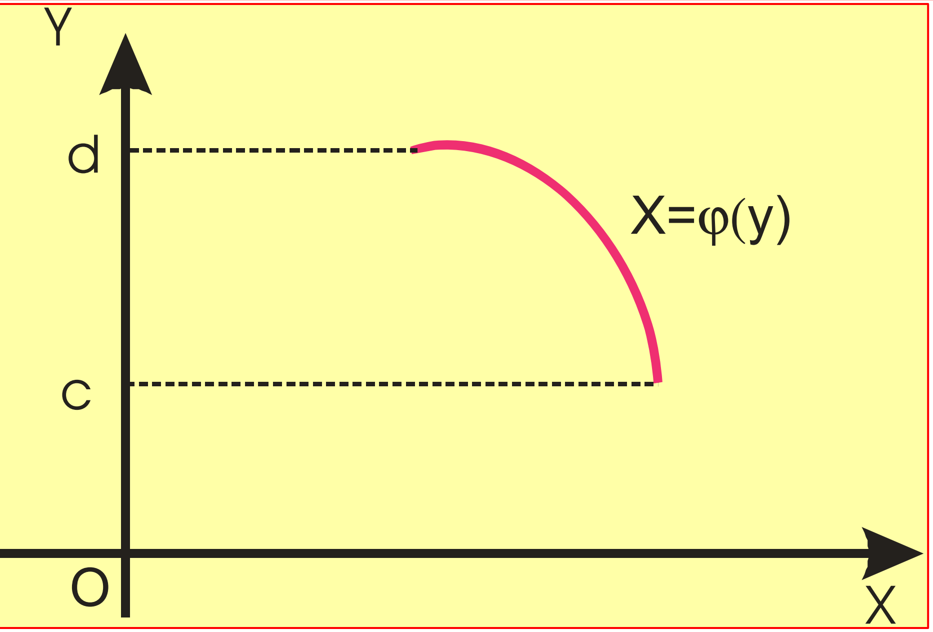
вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$



Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми параллельными оси ОУ, её следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.





Если криволинейная трапеция ограниченна прямыми

$$y = c, y = d$$

осью ОУ и кривой

$$x = \varphi(y)$$

то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \varphi(y)\,dy$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной в параметрическом виде, т.е.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\varphi(\alpha) = a,$$

$$\varphi(\beta) = b. \qquad (6.4)$$

Выражение (6.4) задает некоторую функцию

$$y = f(x)$$ **на отрезке** $$[a, b]$$

и следовательно площадь криволинейной трапеции может вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx$$

Сделаем замену переменного

$$x = \varphi(t), \qquad f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t),$$

$$dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (6.5)}$$

Выражение (6.5) позволяет вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пример 1:

Вычислить площадь ограниченную кривыми

$$y = \sqrt{x}, y = x^2.$$

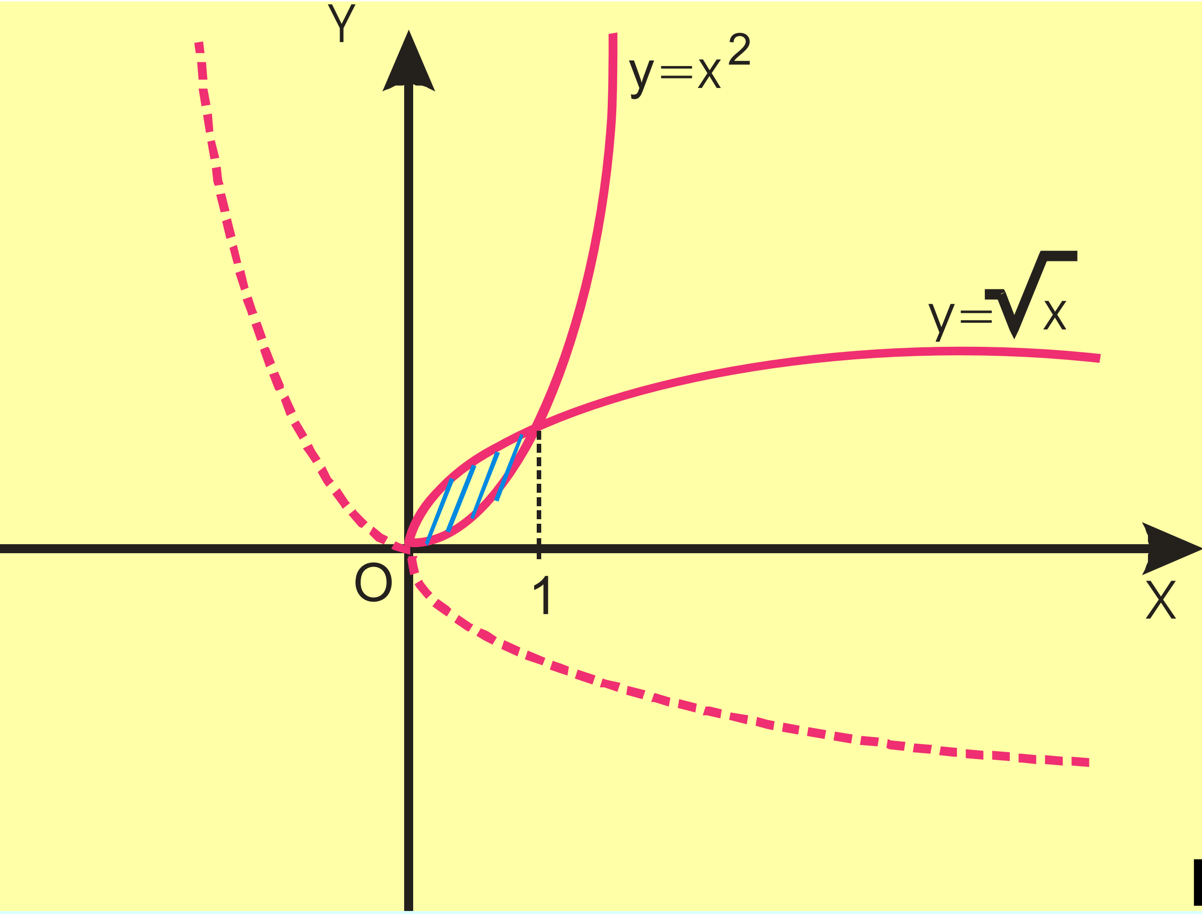
Решение

Находим точки пересечения кривых:

$$\sqrt{x} = x^2, \quad x = x^4,$$

$$x - x^4 = 0, \qquad x(1 - x^3) = 0,$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$



Находим площадь:

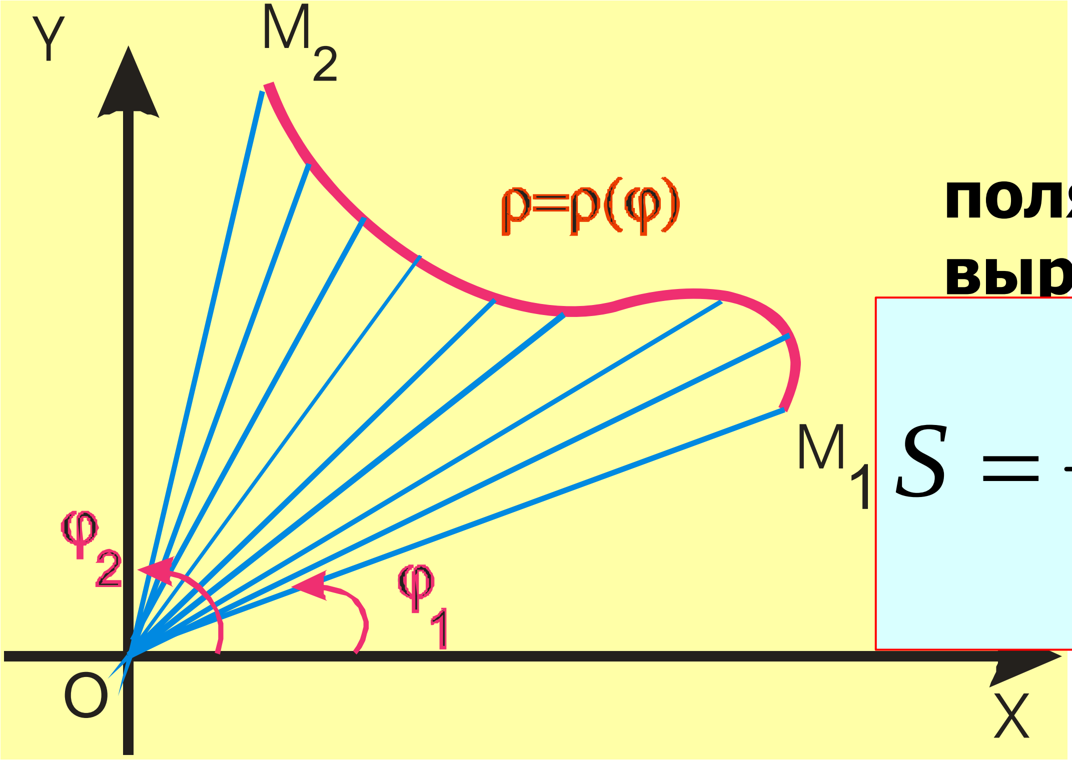
$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

В случае, когда кривая задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = \rho(\varphi)$$

площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами

OM_1 и OM_2, с соответствующими значениями



φ_1 и φ_2

полярного угла, выражается интегралом

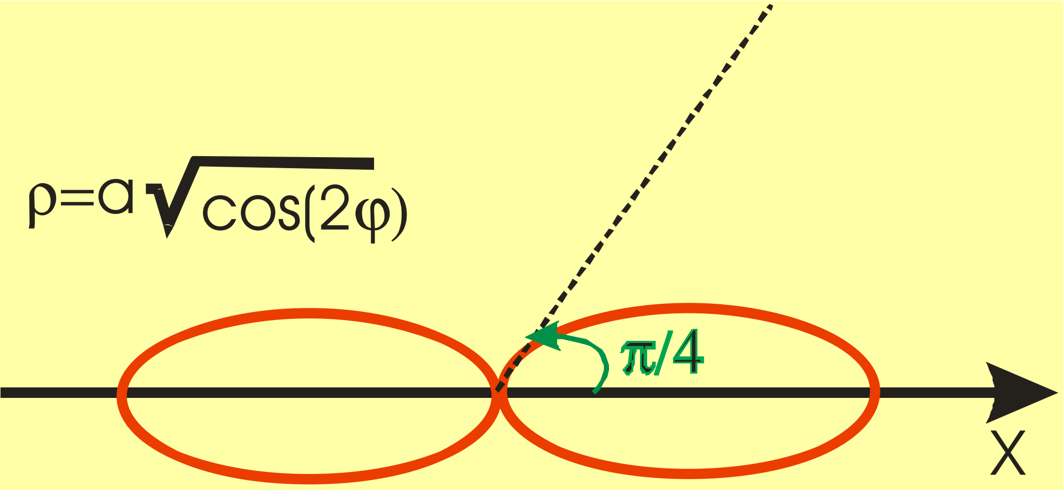
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi \quad (6.6)$$

Пример 2:

Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Решение



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}4\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi =$$

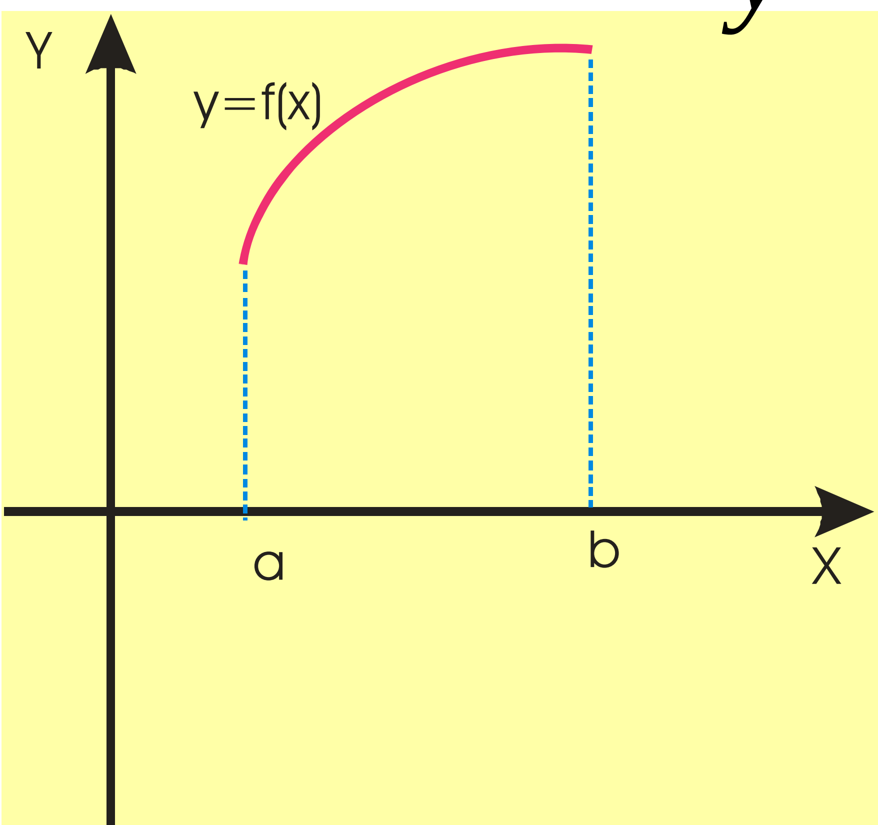
$$= 2a^2 \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= a^2 \sin 2\frac{\pi}{4} - 0 = a^2.$$

2. Длина дуги кривой

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости задана кривая

$$y = f(x).$$



Длина дуги $\overset{\cup}{AB}$

данной кривой заключенной между вертикальными прямыми

$$x = a, x = b$$

вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx \qquad (6.7)$$

Пример: **Определить длину окружности**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Решение: **Будем вычислять длину четвертой части окружности лежащей в первой четверти. Уравнение дуги:**

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^r \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx=$$

$$=4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=4r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=$$

$$=4r(\arcsin 1-\arcsin 0)=4r\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\pi r.$$

Пусть уравнение кривой заданно в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

$\varphi(t), \psi(t)$ **и их производные непрерывны, причем**

$\varphi'(t)$ **не обращается в нуль, на заданном интервале.**

В этом случае длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \quad (6.8)$$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

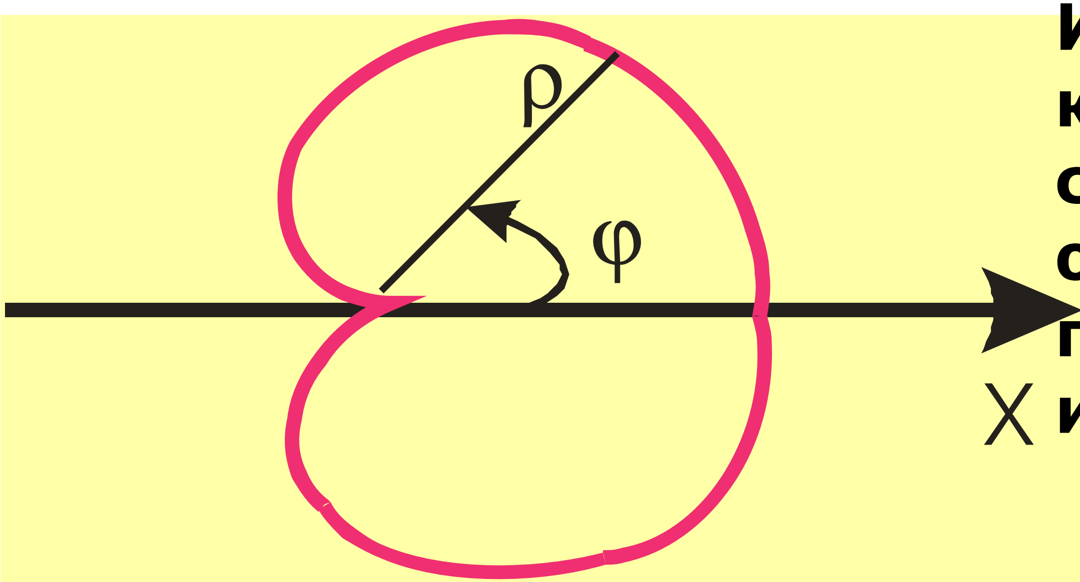
то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \qquad (6.9)$$

Пример: Вычислить длину кардиоиды:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

Решение



Из рисунка видно, что кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому изменяя угол от 0 до

$$\pi$$

мы будем получать половину искомой длины:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \qquad \rho' = -a \sin\varphi,$$

$$l = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8a.$$