Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

2. Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

2.1 Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим пример.

При бросании игральной кости могут появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

На перёд определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены.

В этом смысле число очков есть случайная величина, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 это возможные значения этой случайной величины.

Определение 1. **Случайной** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от многих случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Определение 2. **Дискретной** **(прерывной)** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение 3. **Непрерывной** называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно что возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Пример.

Расстояние, которое пролетает снаряд, при выстреле из орудия, есть непрерывная случайная величина.

Расстояние зависит не только от установки прицела. Но и от многих других причин, например от направления и силы ветра.

Поэтому возможные значения этой величины будут принадлежать отрезку $(a,b).$

Для задания дискретной случайной величины, кроме перечисления всех возможных ее значений, нужно указывать их вероятности.

***Законом распределения дискретной случайной величины,* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями**

Его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины, первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая - их вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Поскольку события $x_1, x_2, \ldots, x_n$

образуют полную группу, то сумма их вероятностей должна быть равна 1, т.е.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически.

Для этого в прямоугольной системе координат по оси *x* откладываем x_i,

а по оси *y* откладываем p_i.

В результате получают систему точек (x_i, p_i).

Затем эти точки соединим отрезками прямых.

Полученную фигуру называют **многоугольником распределения.**

2.2 Биномиальное распределение

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться, а может не появиться.

Вероятность наступления события во всех испытаниях равна *p*.

Тогда вероятность того, что событие не наступит

$$q = 1 - p$$

В качестве дискретной случайной величины *X* будет выступать число появлений события *A* в этих испытаниях.

Нужно найти закон распределение величины *X*, т.е. мы должны найти возможные значения *X* и их вероятности.

Событие *A* в *n*-испытаниях может либо не появится, либо появиться 1 раз, либо появиться 2 раза и т.д., либо появиться n-раз.

Т.е. возможные значения *X* таковы

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \ldots, x_{n+1} = n.$$

Для того, что бы определить вероятности этих возможных значений будем пользоваться формулой Бернулли (1.26) или (1.27)

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{\kappa} \cdot q^{n-k}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) является аналитическим выражением биномиального закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей определяемой формулой Бернулли.

Запишем биномиальный закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	…	k	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = C_n^0 q^n,$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad P_0^n = q^n,$$

$$P_n(1) = C_n^1 p^1 q^{n-1},$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n$$

$$P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n}, \qquad C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1,$$

$$P_n(n) = p^n.$$

Пример

Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение.

Дискретная случайная величина *X* (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения:

$x_1 = 0$ **(ни один из элементов устройства не отказал),**

$x_2 = 1$ **(отказал один элемент),**

$x_3 = 2$ **(отказали два элемента),**

$x_4 = 3$ **(отказали три элемента).**

Из условия задачи следует, что

$$p = 0{,}1 \quad n = 3, \quad q = 0{,}9.$$

В соответствии с формулой Бернулли находим

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{к} \cdot q^{n-k}.$$

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729;$$

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Запишем искомый биномиальный закон распределения

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1

2.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин

а) Математическое ожидание дискретной случайной величины;

Пусть задана случайная дискретная величина *X* с соответствующим законом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Математическим ожиданием **дискретной случайной величины называют сумму произведений всех его возможных значений на соответствующие вероятности**

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \quad (2.2)$$

Если значения случайной величины *A* образуют бесконечную последовательность, то математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (2.3)$$

Формула (2.3) применима только в том случае, если ряд стоящий справа сходится абсолютно.

Пусть произведено n-испытаний, в котором случайная величина *X* приняла

m_1 **раз значение** x_1

m_2 **раз значение** x_2,

....

m_k **раз значение** x_k.

Причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$

Тогда среднее арифметическое величины *X*, можно определить по формуле:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n},$$

$\frac{m_1}{n} = W_1$ **- относительная частота значения** x_1,

$\frac{m_2}{n} = W_2$ **- относительная частота значения** x_2

и т.д.

Если предположить, что число испытаний достаточно велико, то

$$W_1 \approx p_1 = \frac{m_1}{n}, \;\; W_2 \approx p_2 = \frac{m_2}{n}, \ldots, \;\; W_k \approx p_k = \frac{m_k}{n}.$$

С учетом этого

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k. \quad (2.4)$$

Сравним выражения (2.4) и (2.2)

$$\boxed{\overline{X} \approx M(X).}$$

Таким образом, математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины (тем точнее, чем больше число испытаний).

Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей (XVI-XVII в).

Когда область ее применения ограничивалась азартными играми.

В это время игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша или иными словами, математическое ожидание выигрыша.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине

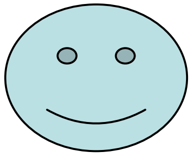
$$M(C) = C, \quad C = const.$$

Доказательство.

Постоянную С можно рассматривать, как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение С и вероятность этого значения $p = 1,$

тогда по определению математического ожидания

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$



2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X), \qquad C = const.$$

Доказательство.

Пусть случайная величина *X* задана законом распределения вероятностей, т.е.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Определим случайную величину *CX*, как величину возможное значение, которой будет

$$Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n,$$

а соответствующие им вероятности будут

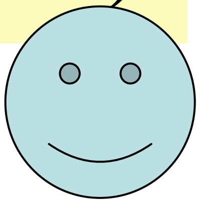
$p_1, p_2, \ldots, p_n,$ **тогда закон распределения для *СХ* примет вид:**

СХ	Cx_1	Cx_2	$\cdots$	Cx_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Согласно определению математическое ожидание

$$M(CX) = Cx_1 p_1 + Cx_2 p_2 + \ldots + Cx_n p_n =$$

$$= C(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n) = CM(X).$$



3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Доказательство.

Пусть независимые случайные величины *X* и *У* заданы законами распределения

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
G	g_1	g_2

Составим все возможные значения, которые может принимать случайная величина $X \cdot Y$

$$x_1 y_1, \quad x_1 y_2, \quad x_2 y_1, \quad x_2 y_2$$

а соответствующие им вероятности

$$p_1 g_1, p_1 g_2, p_2 g_1, p_2 g_2.$$

Тогда закон распределения для случайных *X У* примет вид

ХУ	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

$$M(XY) =$$

$$= x_1y_1p_1g_1 + x_1y_2p_1g_2 + x_2y_1p_2g_1 + x_2y_2p_2g_2 =$$

$$= y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) + y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) =$$

$$= (y_1 g_1 + y_2 g_2)(x_1 p_1 + x_2 p_2) = M(X)M(Y).$$

Следствие. **Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.**

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z),$$

4.Математическое ожидание суммы двух случайных величин, равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y),$$

$$M(X-Y)=M(X)+M(-Y)=M(X)-M(Y),$$

5. Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* будет появляться с вероятностью *p*.

Возникает вопрос: чему равно среднее число появлений событий *A* в этих испытаниях?

Теорема. **Математическое ожидание** $M(X)$ **числа появления события *A* в *n* независимых испытаниях, равно произведению числа испытаний на вероятность появления события *A* в каждом испытании**

$$M(X)=n\cdot p. \quad (2.5)$$

Доказательство.

Пусть случайная величина *X* – это число наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Пусть X_1 **- число появлений события *A* в первом испытании,**

X_2 -**число появлений события во втором испытании,**

X_n **- число появлений события *A* в *n-ом* испытании.**

Поскольку математическое ожидание суммы событий равна сумме математических ожиданий, то можно записать

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Следует отметить, что X_1

- число появлений события *A* в первом испытании, может принимать два значения ,

$x_1' = 1,$ **что означает, что событие *A* наступило с вероятностью р, и**

$x_1'' = 0,$ **что означает, что событие *A* не наступило с вероятностью**

$$q = 1 - p$$

$$M(X_1) = 1 \cdot p + 0(1 - p) = p,$$

Аналогичные рассуждения проводится для X_2

$$M(X_2) = p, \quad \dots \quad M(X_n) = p,$$

$$M(X) = p + p + \dots + p = np.$$

Пример. **Независимые случайные величины *Х* и *У* заданы следующими законами распределения:**

X	5	2	4
P	0.6	0.1	0.3

Y	7	9
P	0.8	0.2

Найти математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$

Решение.

$$M(XY) = M(X)M(Y),$$

$$M(X) = 5 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.3 = 4.4,$$

$$M(Y) = 7 \cdot 0.8 + 9 \cdot 0.2 = 7.4,$$

$$M(XY) = 4.4 \cdot 7.4 = 32.56.$$

Пример.

Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия

$$p = 0{,}6.$$

Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение.

Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно

$$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6 \text{ выстрелов.}$$

б) Дисперсия дискретной случайной величины.

Рассмотрим дискретные случайные величины *X* и *У*, заданные следующими законами распределения:

X	-0.01	0.01
P	0.5	0.5

Y	-100	100
P	0.5	0.5

Найдем математическое ожидание этих величин

$$M(X) = -0.01 \cdot 0.5 + 0.01 \cdot 0.5 = 0,$$

$$M(Y) = -100 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.5 = 0,$$

Таким образом видно, что математическое ожидание этих величин одинаковые, а возможные значения существенным образом отличаются.

Поэтому зная лишь математическое ожидание случайной величины нельзя судить о том, какие возможные значения она принимает, а так же нельзя судить о том, как эти возможные значения рассеяны вокруг математического ожидания.

Поэтому наряду с математическим ожиданием вводят ряд других характеристик, например дисперсию.

Пусть *X* случайная величина, *M(x)*- математическое ожидание этой величины.

Отклонением называют разность между случайной величиной и её математическим ожиданием

$$x - M(x).$$

Запишем закон распределения отклонения.

Для того, что бы отклонение приняло значение

$$x_1 - M(x),$$

достаточно что бы случайная величина *X* приняла значение

$$x_1.$$

Вероятность этого события равна p_1,

следовательно и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1 - M(x)$,

так же равна p_1.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

X-M(X)	$x_1 - M(x)$	$x_2 - M(x)$	$\cdots$	$x_n - M(x)$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Теорема. **Математическое ожидание отклонения равно нулю**

$$\boxed{M(X - M(X)) = 0.}$$

Доказательство.

Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание разности равно разности математических ожиданий, математическое ожидание постоянной, равно самой постоянной), а так же принимая во внимание, что *M(X)* постоянная величина, можно записать

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) =$$

$$= M(X) - M(X) = 0.$$

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Определение. Дисперсией или рассеянием, случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата её отклонения

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (2.6)$$

Пусть случайная величина X задана законом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

$(X-M(X))^2$	$\left(x_1-M(X)\right)^2$	$\left(x_2-M(X)\right)^2$	…	$\left(x_n-M(X)\right)^2$
P	p_1	p_2	…	p_n

По определению дисперсии

$$D(X)=M(X-M(X))^2=$$

$$=(x_1-M(x))^2p_1+(x_2-M(x))^2p_2+$$

$$+\ldots+(x_n-M(x))^2p_n.$$

Теорема. **Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания**

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \qquad (2.7)$$

Доказательство.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 =$$

$$= M(X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2) =$$

$$= M(X^2) - M(2X \cdot M(X)) + M[M(X)]^2 =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 =$$

$$= M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю

$$D(C) = 0, \quad \mathrm{C} = const,$$

Запишем выражение (2.6) для случая, когда

$$X = C$$

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 =$$
$$= M(0) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Доказательство.

Из определения дисперсии следует:

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 =$$

$$= M\left[C^2 (X - M(X))^2\right] =$$

$$= C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин, равно сумме дисперсий этих величин

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство.

Для доказательства воспользуемся выражением (2.7)

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$$

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-\left[M(X+Y)\right]^2=$$

$$=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$

$$=M(X^2)+M(2XY)+M(Y^2)-$$

$$-\left[M(X)\right]^2-2M(X)M(Y)-\left[M(Y)\right]^2=$$

$$= M(X^2) - [M(X)]^2 + M(Y^2) - [M(Y)]^2 =$$

$$= D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий

$$\boxed{D(X - Y) = D(X) + D(Y).}$$

Доказательство:

$$D(CX) = C^2 D(X),$$

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y) =$$

$$= D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Теорема. **Дисперсия числа появления события *A* в *n* независимых испытаниях в каждом из которых, вероятность *p* появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятность появления и вероятность не появления события в одном испытании**

$$D(x) = npq. \quad (2.8)$$

Пример.

Найти дисперсию случайной величины X используя формулы (2.6) и (2.7)

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Решение

1.Запишем формулу (2.6)

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = 1\cdot 0.3 + 2\cdot 0.5 + 5\cdot 0.2 = 2.3.$$

Составим закон распределения отклонений

$x - M(x)$	-1.3	-0.3	2.7
P	0.3	0.5	0.2

Составим закон распределения квадрата отклонений

$(x-M(x))^2$	1.69	0.09	7.29
P	0.3	0.5	0.2

$$D(x)=M((x-M(x))^2)=$$
$$=1.69\cdot 0.3+0.09\cdot 0.5+7.29\cdot 0.2=2.01.$$

2. Запишем формулу (2.7)

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2.$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3.$$

Составим закон распределения для X^2

X^2	1	4	25
P	0.3	0.5	0.2

$$M(X^2) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.5 + 25 \cdot 0.2 = 7.3,$$

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 7.3 - 2.3^2 = 2.01.$$

в) Среднее квадратичное отклонение;

Средним квадратичным отклонением случайной величины *X*, называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия имеет размерность, равная квадрату размерности случайной величины.

Т.к. средне квадратичное отклонение- это корень квадратный из дисперсии, то размерность σ совпадает с размерностью *X*.

Пример.

Случайная величина *X* задана законом распределения

X	2	3	10
P	0.1	0.4	0.5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$.

Решение. **Запишем формулу (2.7)**

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$$

$$M(X) = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 10 \cdot 0.5 = 6.4$$

x^2	4	9	100
P	0.1	0.4	0.5

$$M(X^2) =$$

$$= 4 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.4 + 100 \cdot 0.5 = 54,$$

$$D(X) = 54 - 6.4^2 = 13.04,$$ $$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13.04} \approx 3.61.$$

d) Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины.

Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

которые имеют одинаковые распределения, а следовательно и одинаковые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и т.д.)

$$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = a,$$

$$D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_n) = D.$$

Обозначим среднее арифметическое, рассматриваемых величин через $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

1. Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин, равно математическому ожиданию каждой их этих величин

$$\boxed{M(\overline{X}) = a.}$$

Доказательство.

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(a + a + \ldots + a) = \frac{na}{n} = a.$$

2. Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n-раз меньше каждой из этих величин

$$\boxed{D(\overline{X}) = \frac{D}{n}.}$$

Доказательство.

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\big(D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)\big) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(D + D + \ldots + D) = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

3. Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше, среднего квадратического отклонения каждой из этих величин.

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.4 Ковариация. Коэффициент корреляции.

Ковариацией двух случайных величин *X* и *Y* называется математическое ожидание произведения их отклонений от соответствующих математических ожиданий.

Обозначим ковариацию случайных величин *X* и *Y*, через *cov(X,Y)*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))) \qquad (2.9)$$

Используя свойства математического ожидания, преобразуем правую часть формулы (2.9)

$$M((X-M(X))(Y-M(Y)))=$$

$$=M(XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y))=$$

$$=M(XY)-M(XM(Y))-M(YM(X))+M(M(X)M(Y))=$$

$$=M(XY)-\cancel{M(X)M(Y)}-M(Y)M(X))+\cancel{M(X)M(Y)}=$$

$$=M(XY)-M(X)M(Y)$$

Следовательно

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y) \quad (2.10)}$$

т.е. ковариация случайной величины равна математическому ожиданию их произведения минус произведение их математических ожиданий.

Из формулы (2.9) следует

$$\mathrm{cov}(X, X) = D(X),$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X).}$$

Теорема.

Если случайные величины *X,Y* независимы, то их ковариация равна нулю

$$\boxed{\mathrm{cov}(X, Y) = 0. \qquad (2.11)}$$

Доказательство.

Т.к. случайные величины *X,Y* независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий и формула (2.11) следует из формулы (2.10).

Если $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0,$

то случайные величины *X,Y* зависимы.

В качестве количественной характеристики степени зависимости случайных величин *X,Y* используется *коэффициент корреляции.*

Коэффициентом корреляции $\rho(X,Y)$ **случайных величин *X,Y* называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин**

$$\boxed{\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.}$$

Коэффициент корреляции по модулю не превосходит единицы: $\boxed{|\rho(X,Y)|\le 1}$

Если величины *X,Y* независимы, то коэффициент корреляции их равен нулю:

$$\boxed{\rho(X,Y)=0.}$$

Если случайные события связаны линейной зависимостью

$$Y = AX + B,$$

где *A* и *B* постоянные, то

$$\left|\rho(X,Y)\right| = 1$$

2.5 Начальные и центральные теоретические моменты.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную законом распределения

X	1	2	5	100
P	0.6	0.2	0.19	0.01

$$M(x)=1\cdot 0.6+2\cdot 0.2+5\cdot 0.19+100\cdot 0.01=2.95.$$

Запишем закон распределения для величины x^2

x^2	**1**	**4**	**25**	**10000**
P	**0.6**	**0.2**	**0.19**	**0.01**

$$M(x^2)=1\cdot 0.6+4\cdot 0.2+25\cdot 0.19+10000\cdot 0.01=106.15.$$

Из вычислений видно, что $M(X)$,

значительно больше, чем $M(X^2)$

т.к. после возведения в квадрат, возможные значения величины x^2

соответствующие *x=100*, стало *10000*.

Т.е. переход от $M(x)$ до $M(X^2)$ позволит лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет маленькую вероятность.

Начальным моментом порядка k случайной величины X, называют математическое ожидание величины X^k

$$\nu_k = M(X^k).$$

Если $k = 1, \quad \nu_1 = M(X)$

- начальный момент первого порядка,

$$k = 2, \quad \nu_2 = M(X^2)$$

\- начальный момент второго порядка.

С учетом этого

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (2.12)$$

Центральным моментом порядка *k* случайной величины *X*, называют математическое ожидание величины $\left(X - M(X)\right)^k$

$$\boxed{\mu_k = M\left[\left(X - M(X)\right)^k\right].}$$

$$k = 1, \quad \mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Центральный момент первого порядка равен нулю.

$$k = 2, \quad \mu_2 = M\left[(X - M(X))^2\right] = D(X). \quad (2.13)$$

Центральным момент второго порядка равен дисперсии.

Сравнивая (2.12) и (2.13) получим связь центральных и начальных моментов

$$\boxed{\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.}$$

Можно получить формулы

$$\boxed{\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^2,}$$

$$\boxed{\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^2.}$$

Действительно

$$\mu_3 = M((X - M(X))^3) =$$

$$= M(X^3 - 3X^2M(X) + 3XM^2(X) - [M(X)]^3) =$$

$$= M(X^3) - 3M(X^2)M(X) + 3M(X)M^2(X) - M^3(X) =$$

$$= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 3\nu_1^3 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3.$$

Пример.

Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

X	1	2
P	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины *X*.

Решение.

Найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}6 = 2{,}8$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1^3 \cdot 0,4 + 2^3 \cdot 0,6 = 5,2$$

Вычислим центральные моменты:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 =$$

$$= 5,2 - 3 \cdot 1,6 \cdot 2.8 + 2 \cdot (1,6)^3 = -0,48$$

Значения μ_2 и μ_3

также можно найти по формуле (2.13)

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6$$

$$\mu_2 = M[\left(X - M(X)\right)^2] =$$
$$= (1 - 1{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (2 - 1{,}6)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

$$\mu_3 = M[\left(X - M(X)\right)^3] =$$
$$= (1 - 1{,}6)^3 \cdot 0{,}4 + (2 - 1{,}6)^3 \cdot 0{,}6 = -0{,}48$$