Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема8. «Комплексные числа»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

8.1 Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел

Комплексным числом называют выражение

$$z = a + ib,$$

где a, b - действительные числа, а *i*- мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1},$

a называется действительной или вещественной частью

$$a = \operatorname{Re} Z,$$

b -мнимой частью комплексного числа $b = \operatorname{Im} Z,$

Если $a = 0,$ то $0 + ib = ib$

- такое число называют чисто мнимым,

если $b = 0,$ то $a + i0 = a$

- действительное число.

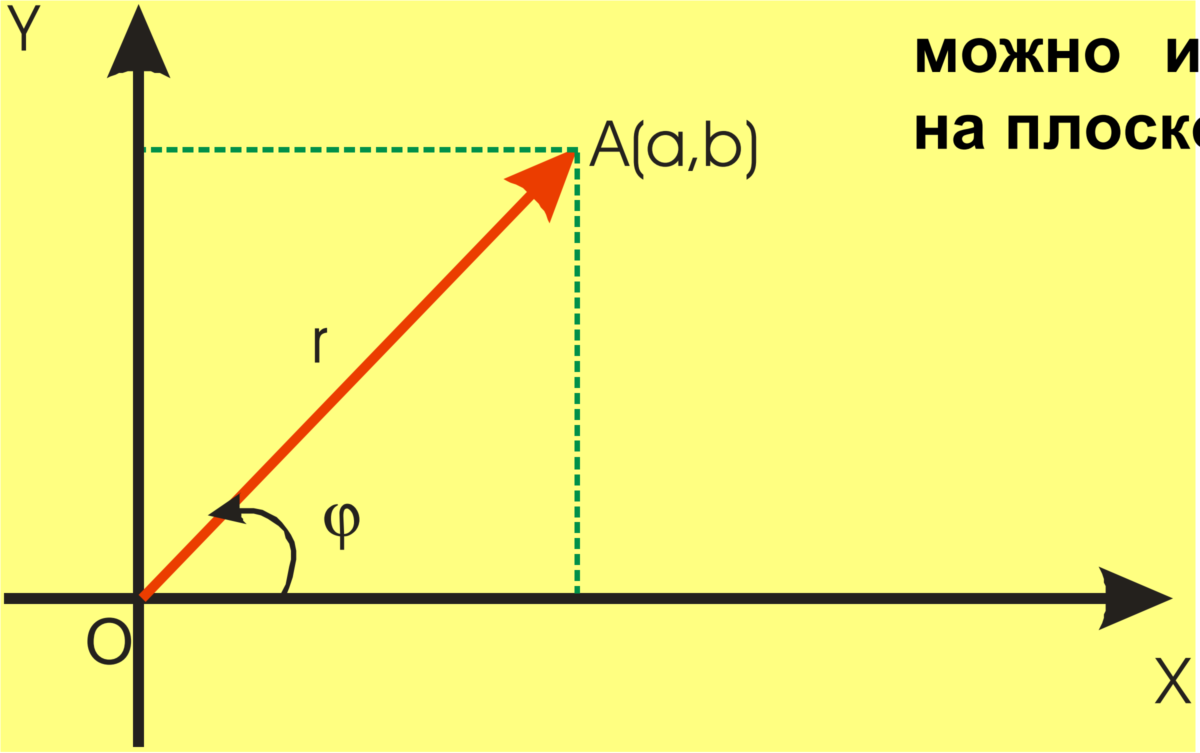
Два комплексных числа $z = a + ib,$ $\bar{z} = a - ib,$ отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными $z_1 = z_2,$ если равны их действительные части $a_1 = a_2$ и мнимые $b_1 = b_2.$

Комплексное число равно нулю $z = a + ib = 0,$

тогда и только тогда, когда $a = 0, b = 0.$

Всякое комплексное число $z = a + ib,$



можно изобразить точкой на плоскости *XOY*:

Плоскость на которой изображаются комплексные числа называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс OX называют действительной осью, а ось ординат называют мнимой осью.

Каждое комплексное число можно задать при помощи радиус вектора $\vec{r} = \vec{OA}.$

Длина вектора $|\bar{r}| = r$ **называется модулем комплексного числа** $|z| = r.$

Угол между положительным направлением действительной оси и радиус вектором, называется аргументом комплексного числа и обозначают

$$\varphi \quad \text{или} \quad Argz$$

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$

определяется с точностью до слагаемого

$$2\pi k \qquad (\mathrm{k} = 0, \pm 1, \ldots.)$$

$$\boxed{Argz = \arg z + 2\pi k,}$$

где $\arg z$ **-главное значение аргумента,**

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$

называют *<u>алгебраической формой</u>* комплексного числа.

Модуль *r и* аргумент комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора

$\vec{r} = \overrightarrow{OA},$ **изображающего комплексное число**

$$z = a + ib.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases},$$

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая запись называется <u>тригонометрической формой комплексного числа.</u>

Модуль $r=|z|$ **определяется по формуле**

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Аргумент определяется из формул

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{r},\qquad tg\varphi=\frac{b}{a}.$$

Т.к. $\varphi=Argz=\arg z+2\pi k,$ **то**

$$\cos\varphi=\cos(\arg z+2\pi k)=\cos(\arg z),$$

$$\sin\varphi=\sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа $\varphi = \arg z.$

Комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

можно записать используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

<u>в показательной (или экспоненциальной) форме</u>

$$z = re^{i\varphi}$$

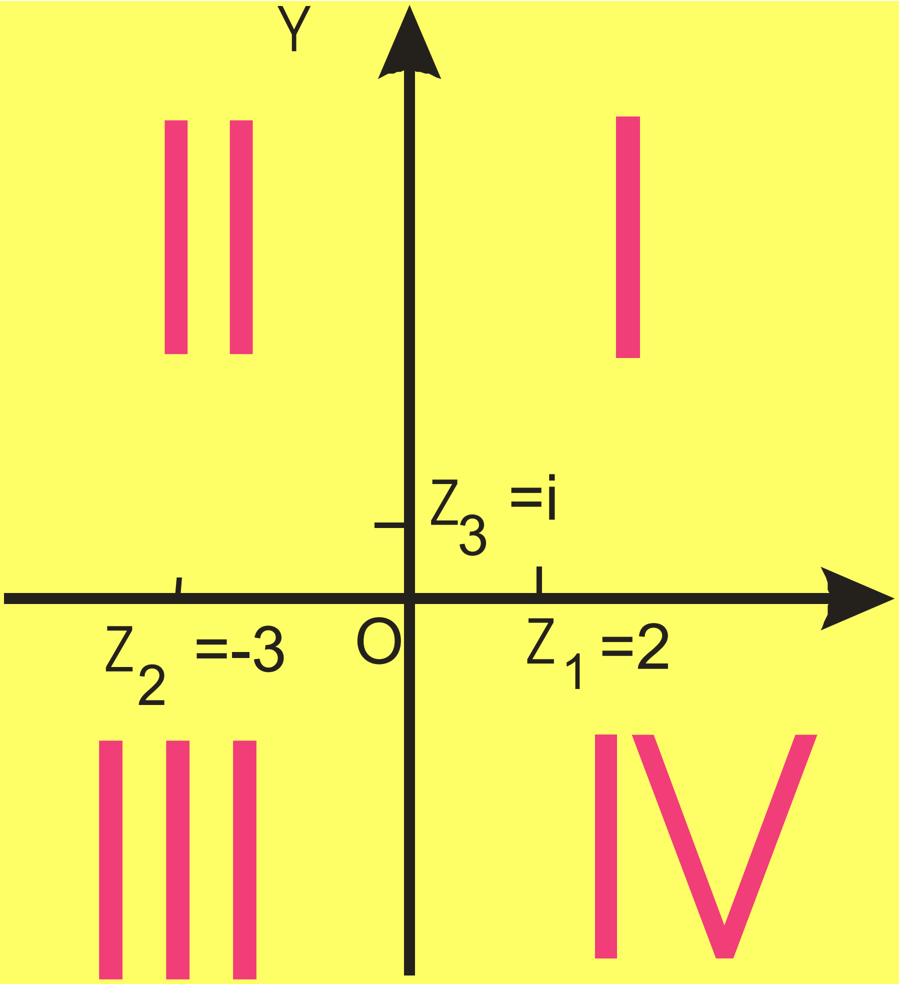
Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси ОХ <u>против</u> часовой стрелки.

Поскольку, $-\pi < \arg z \leq \pi,$ **то из формулы**

$$tg\varphi = \frac{b}{a},$$ **получаем что**

$$\begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a}, & \text{для внутренних точек I, IV четвертей} \\ arctg\,\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{для внутренних точек II четверти} \\ arctg\,\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{для внутренних точек III четверти} \end{cases}$$

Если точка лежит непосредственно на действительной или мнимой оси, то аргумент z определяется по рисунку.



$$z_1 = 2, \quad \arg z_1 = 0$$

$$z_2 = -3, \quad \arg z_2 = \pi$$

$$z_3 = i, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример: Записать комплексные числа

а) $z_1 = -1 + i,$

б) $z_2 = -1$

в тригонометрической и показательной формах

Решение:

а) $z_1 = -1 + i,$

$$r = |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg z_1 = arctg\frac{1}{-1} + \pi = -arctg 1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi,$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

б) $z_2 = -1.$

$$r = |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1,$$

$$\varphi = \arg z_2 = \pi,$$

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$$

8.2 Действия над комплексными числами

1)Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

называется комплексное число определяемое равенством:

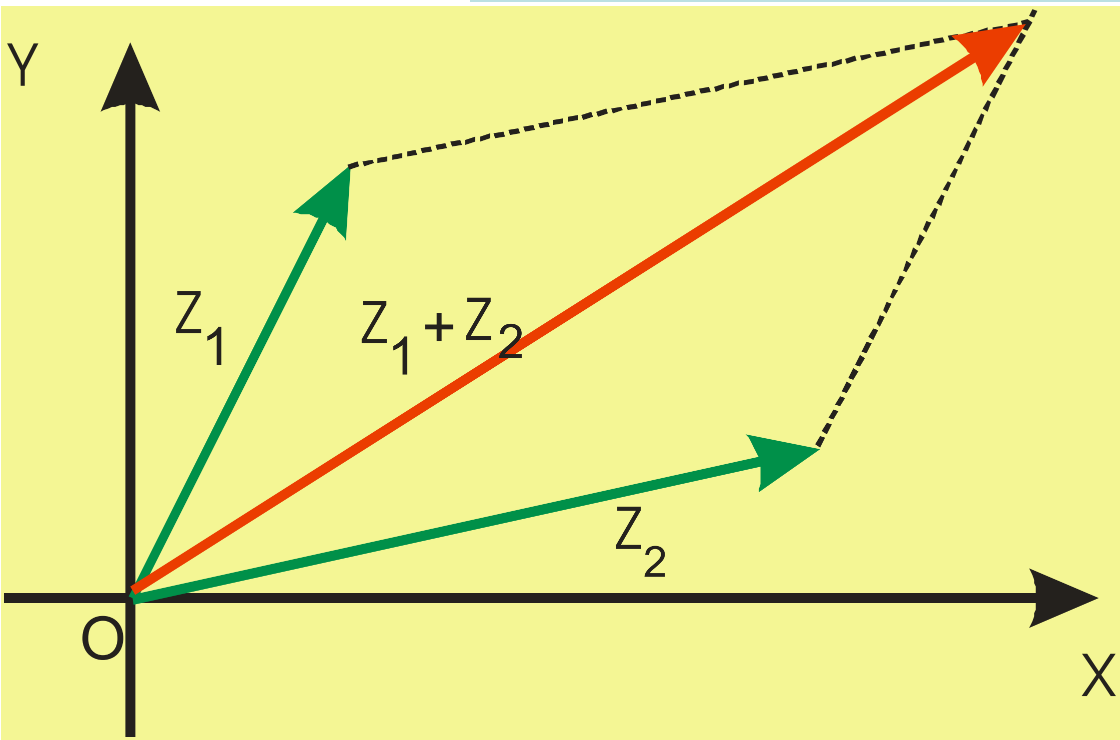
$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2,$$

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

Сложение комплексных чисел обладает коммутативным и ассоциативным свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,$$



Из определения следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы:

2) Вычитание комплексных чисел:

Разностью двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + ib_1, \qquad z_2 = a_2 + ib_2$$

называется такое комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - (a_2 + ib_2) =$$

$$= a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2).$$

3) Умножение комплексных чисел

Произведением двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + ib_1, \qquad z_2 = a_2 + ib_2$$

называется такое комплексное число, которое получается, если мы перемножаем эти числа как двучлены , учитывая что $i^2 = -1, i^3 = -i, \ldots$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2),$$

Пусть два комплексных числа заданы в тригонометрической форме, т.е.

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$$

$$i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)),$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

4) Деление комплексных чисел

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число сопряженное знаменателю, т.е. избавляются от мнимости в знаменателе:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Пусть комплексные числа заданы в тригонометрическом виде:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули соответственно делятся, а аргументы соответственно вычитаются.

Пример:

Даны комплексные числа:
$$z_1 = 2 + 3i,$$
$$z_2 = 3 - 4i,$$
$$z_3 = 1 + i.$$

Найти
$$z = \frac{z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}.$$

Решение.

Последовательно вычисляем
$$z_1 + z_3 = (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(3-4i) = 6+12+i(9-8) = 18+i,.$$

$$z_2^2 = (3-4i)(3-4i) = 9-16+i(-12-12) = -7-24i,$$

$$z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 =$$

$$= (2+3i)+(18+i)+(-7-24i) = 13-20i,$$

$$z = \frac{(13-20i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{39-80+i(-60-52)}{9+16} =$$

$$= \frac{-41-112i}{25} = \frac{-41}{25} - i\frac{112}{25}$$

8.3 Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа

1)Возведение в степень

Т.к. произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$ **то**

$$z^n = (r(\cos\varphi + i \sin\varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Формула называется формулой Муавра.

2) Извлечение корня

Корнем n-степени из комплексного числа, называется такое комплексное число, *n*-степень которого равняется подкоренному числу,т.е.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$ **или**

$$[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Т.к. у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число кратное *2π*, то

$$\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}, \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k, \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

Следовательно

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$k=0,1,2,\ldots,n-1$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π, а следовательно будут получаться значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Действительно покажем, что значение корня при *k=n,* совпадают с *k=0.*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)=$$

(k=n)

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right),$$

т.е. *k=0.*

Пример:

Найти все значения: $\sqrt[3]{i} = \omega$

Решение

Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме

$$i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)\right),$$

$$k=0,1,2$$

При $k=0,$ **имеем** $\omega_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$

При $k=1,$

$$\omega_1=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=$$

$$=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

При $k = 2,$

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$