Министерство образования Республики Беларусь
УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема11. «Двойной интеграл»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

11.1 Двойной интеграл и его свойства

Обобщением определенного интеграла на случай функции двух переменных является двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области *D* плоскости *OXY* задана непрерывная функция

$$z = f(x, y).$$

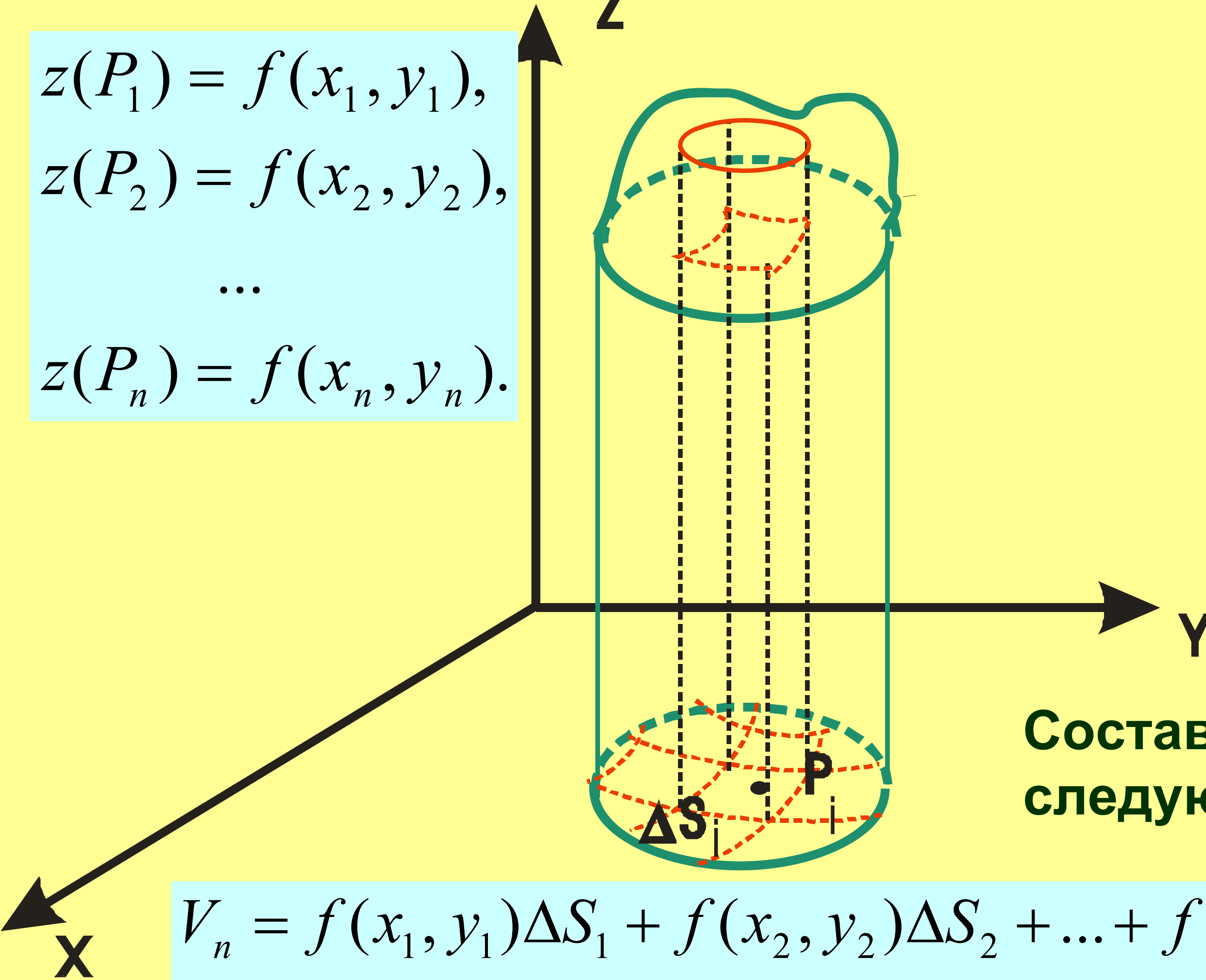
Произвольным образом разобьем область D на ряд площадок

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n.$$

В каждой такой площадке выберем точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$

В каждой точке вычислим значение функции

$$z(P_1) = f(x_1, y_1),$$
$$z(P_2) = f(x_2, y_2),$$
$$\dots$$
$$z(P_n) = f(x_n, y_n).$$



Составим следующую сумму:

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta S_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (11.1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой.

Если $f \geq 0$ в области *D*, то каждое слагаемое

$f(x_i, y_i)\Delta S_i$ в выражении (11.1) представляет

собой объем цилиндра площадь основания которого

ΔS_i, а высота $f(x_i, y_i)$, а следовательно V_n

есть сумма объемов таких элементарных цилиндров, т.е. объем некоторого «ступенчатого» тела.

Рассмотрим предел интегральной суммы (11.1), если *n* стремиться к бесконечности, т.е. размер площадок будет стремиться к нулю.

Если этот предел не будет зависеть от способа разбиения области D и от выбора точки P_i,

то он называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ **и обозначается**

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (11.2)$$

В этом случае функция $f(x,y)$, **называется интегрируемой в области *D*, *D* – область интегрирования, а *x* и *y* – переменные интегрирования.**

Геометрический смысл двойного интеграла:

Если $f(x,y)\geq 0,$ то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области *D* равен **объему тела** ограниченного поверхностью $z=f(x,y),$ плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *z.*

Свойства двойного интеграла:

1. $$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy, c = const,$$

2. Двойной интеграл от суммы двух функций по области *D*, равен сумме двух двойных интегралов по области *D* от каждой из функций в отдельности

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$$

3. Если область *D* разбить линией на две области

$D_1, D_2,$ **причем** $D_1 \cup D_2 = D,$ **тогда**

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

4. Если $f(x,y) \geq 0,$ **то** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0,$

если $f(x,y) \geq \varphi(x,y),$ **то**

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy,$$

5. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой равна *S* и *m,M* соответственно наименьшее и наибольшее значение подынтегральной функции, то

$$mS \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq MS$$

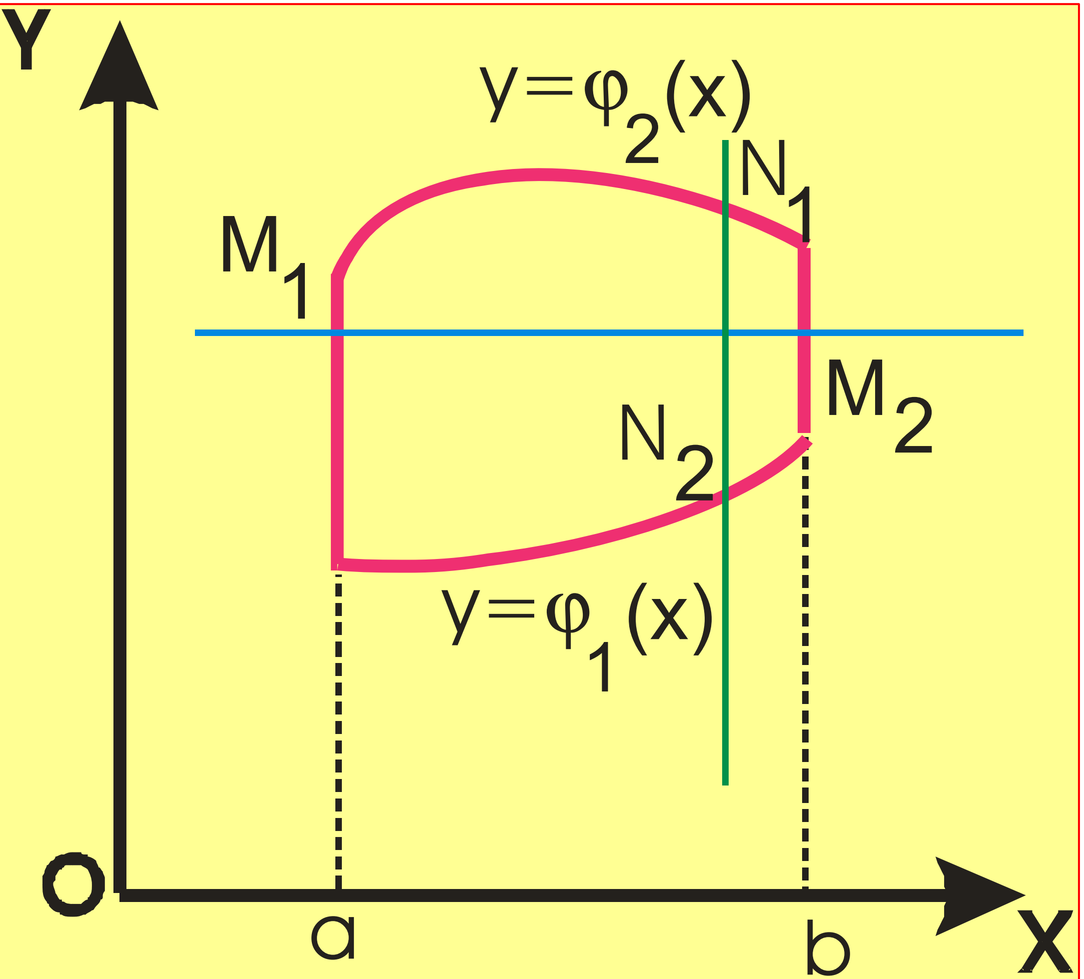
11.2 Вычисление двойного интеграла

Пусть область *D* лежит в плоскости *OXY* и область D ограничена линиями:

$$y = \varphi_1(x),$$

$$y = \varphi_2(x),$$

$$\varphi_2(x) > \varphi_1(x), x = a, y = b, \quad a < b.$$



Область называется правильной в направлении оси *OY*, если любая прямая, параллельна оси *OY* пересекает границу области не более, чем в двух точках. Аналогично, определяет правильность области в направлении оси *OX*.

Область правильная, как в направлении оси *OX,* так и направлении оси *OY,* называется **правильной областью.**

Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$

по правильной области D, равен двухкратному интегралу (или повторному) от этой функции

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

В этом интеграле вычисляют интеграл стоящий в скобках, причем интегрирование ведется по переменной y, а переменная x полагается постоянной. В результате интегрирования, мы получим функцию

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

затем вычисляем интеграл по переменной x. В результате получится некоторое искомое число.

Пример: Вычислить двухкратный интеграл

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\,dy \right) dx.$$

Решение

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\,dy \right) dx = \int_0^1 dx \left(x^2 \int_0^{x^2} dy + \int_0^{x^2} y^2\,dy \right) =$$

$$\int_0^1 dx\left(x^2 y\Big|_0^{x^2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{x^2} \right) = \int_0^1 \Big(x^2(x^2-0)\Big) + \frac{1}{3}(x^6-0))dx =$$

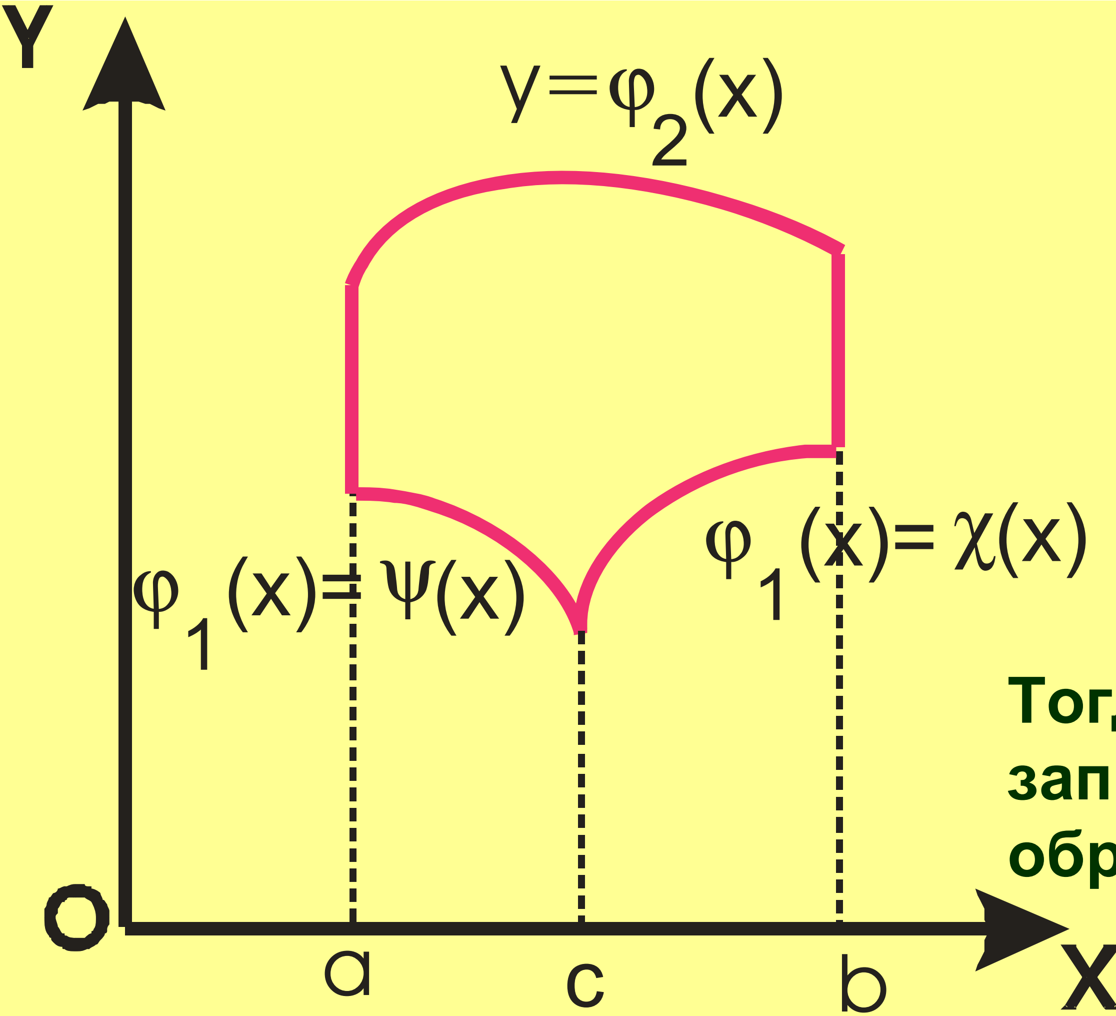
$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}$$

Может случиться так, что область D такова, что одна из функций например $y = \varphi_1(x)$ **не может быть задана одним аналитическим выражением на всем участке изменения x от *a* до *b*.**

Пусть например $\varphi_1(x)=\psi(x),\quad$ на отрезке $[a,c]$

$\varphi_1(x)=\chi(x),\quad$ на отрезке $[c,b].$



Тогда двойной интеграл запишется следующим образом

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^c\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Если же область D ограничена линиями:

$$y=c,\quad y=d,\quad c<d,$$

$$x=\psi_1(y),\quad x=\psi_2(y),\quad \psi_1(y)\le\psi_2(y),$$

то получим

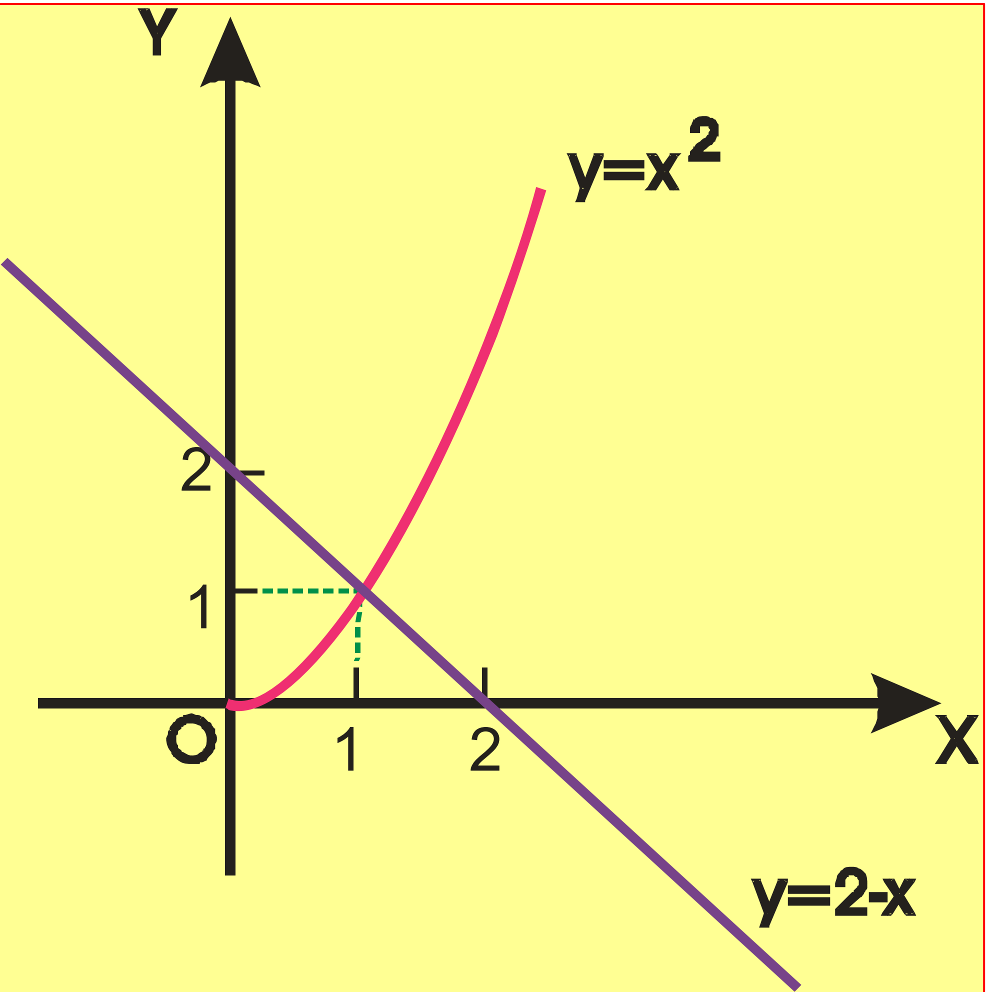
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$

При вычислении внутреннего интеграла считаем *y* постоянным.

Замечание. **Внешние пределы в двойном интеграле всегда постоянны, а внутренние как правило переменные.**

Пример: **Вычислить** $\iint\limits_D (x+2y)dxdy,$

где область *D* ограничена линиями $y = x^2, y = 0, x + y - z = 0.$



Решение

1 способ

Данная область в направлении оси *OX*, будет являться правильной.

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} x\,dx + \int_{\sqrt{y}}^{2-y} 2y\,dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} + 2xy \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{(\sqrt{y})^2}{2} + 2y(2-y) - 2y\sqrt{y} \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{y}{2} + 4y - 2y^2 - 2y^{3/2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + \frac{7}{2} y - 2y^2 - 2y^{3/2} \right) dy =$$

$$= -\int_0^1 \frac{(2-y)^2}{2} d(2-y) + \frac{7}{2}\int_0^1 y dy - 2\int_0^1 y^2 dy - 2\int_0^1 y^{3/2} dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(2-y)^3}{3} \Bigg|_0^1 + \frac{7}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^1 - 2\frac{y^3}{3} \Bigg|_0^1 - 2\frac{y^{5/2}}{5/2} \Bigg|_0^1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left((2-1)^3 - (2-0)^3\right) + \frac{7}{4}(1^2 - 0^2) - \frac{2}{3}(1^3 - 0^3) - \frac{4}{5}(1^{5/2} - 0^{5/2}) =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20}$$

2 способ:

Если внутренний интеграл брать по переменной *y*, то область интегрирования следует разбить на две области *D₁* и *D₂*.

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+2y)\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} (x+2y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\int_0^{x^2} dy + 2\int_0^{x^2} y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(x\int_0^{2-x} dy + 2\int_0^{2-x} y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xy\Big|_0^{x^2} + 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} \right) dx + \int_1^2 \left(xy\Big|_0^{2-x} + y^2\Big|_0^{2-x} \right) dx =$$

$$=\int_0^1\left(x^3+x^4\right)dx+\int_1^2\left(x(2-x)+(2-x)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^3+x^4\right)dx+\int_1^2\left(2x-x^2+4-2x+x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^3+x^4\right)dx+4\int_1^2 dx=$$

$$\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1+\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1+\left.4x\right|_1^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+4(2-1)=\frac{5+4+20}{20}=\frac{29}{20}.$$

11.3 Замена переменных в двойном интеграле

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки, т.е. под знаком двойного интеграла вводят новые переменные.

Пусть на плоскости *OXY* задана область *D*, ограниченная некоторой линей *L*.

Предположим, что *x* и *y* являются функциями новых переменных, т.е.

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \upsilon) \\ y = \psi(u, \upsilon) \end{cases}. \qquad (11.3)$$

Причем, функции φ **и** ψ **однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в области *D*.**

Таким образом, каждой паре значений u и υ ставится в соответствии пара значений *x и y.*

Пусть функции φ и ψ таковы, что если известны *x* и *y*, то согласно (11.3) можно однозначным образом найти пару значений u и υ.

Координаты u и υ, называют **криволинейными координатами.**

Формула преобразование координат в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D F(u,\upsilon)\,|I|\,dud\upsilon \qquad (11.4)$$

Здесь $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}$ - Якобиан или функциональный определитель.

Пример. Вычислить двойной интеграл:

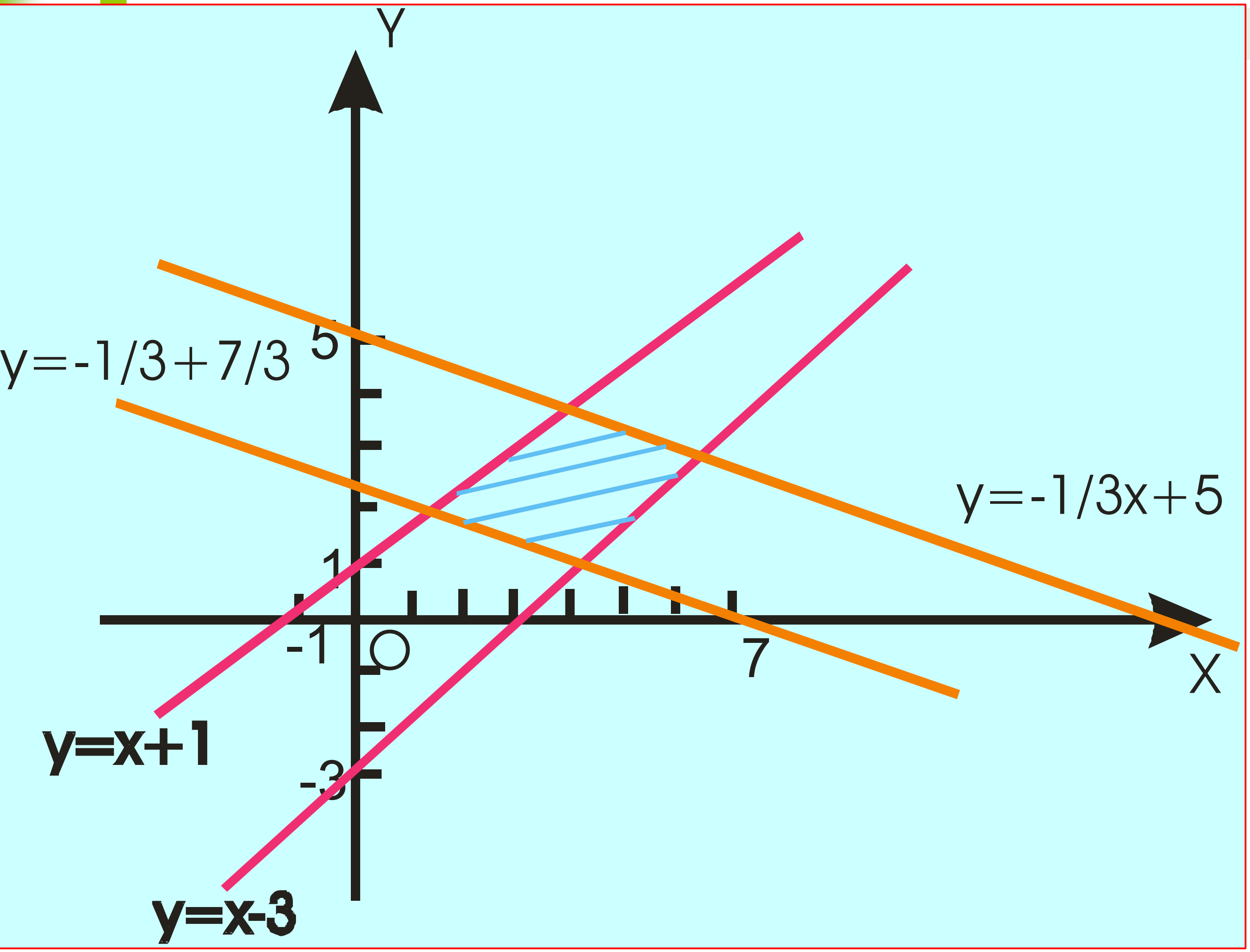
$$\iint_D (y - x)dxdy,$$

по области *D* в плоскости *OXY* ограниченной прямыми:

$$y = x + 1, \qquad y = x - 3,$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \qquad y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

Решение. Построим область *D*



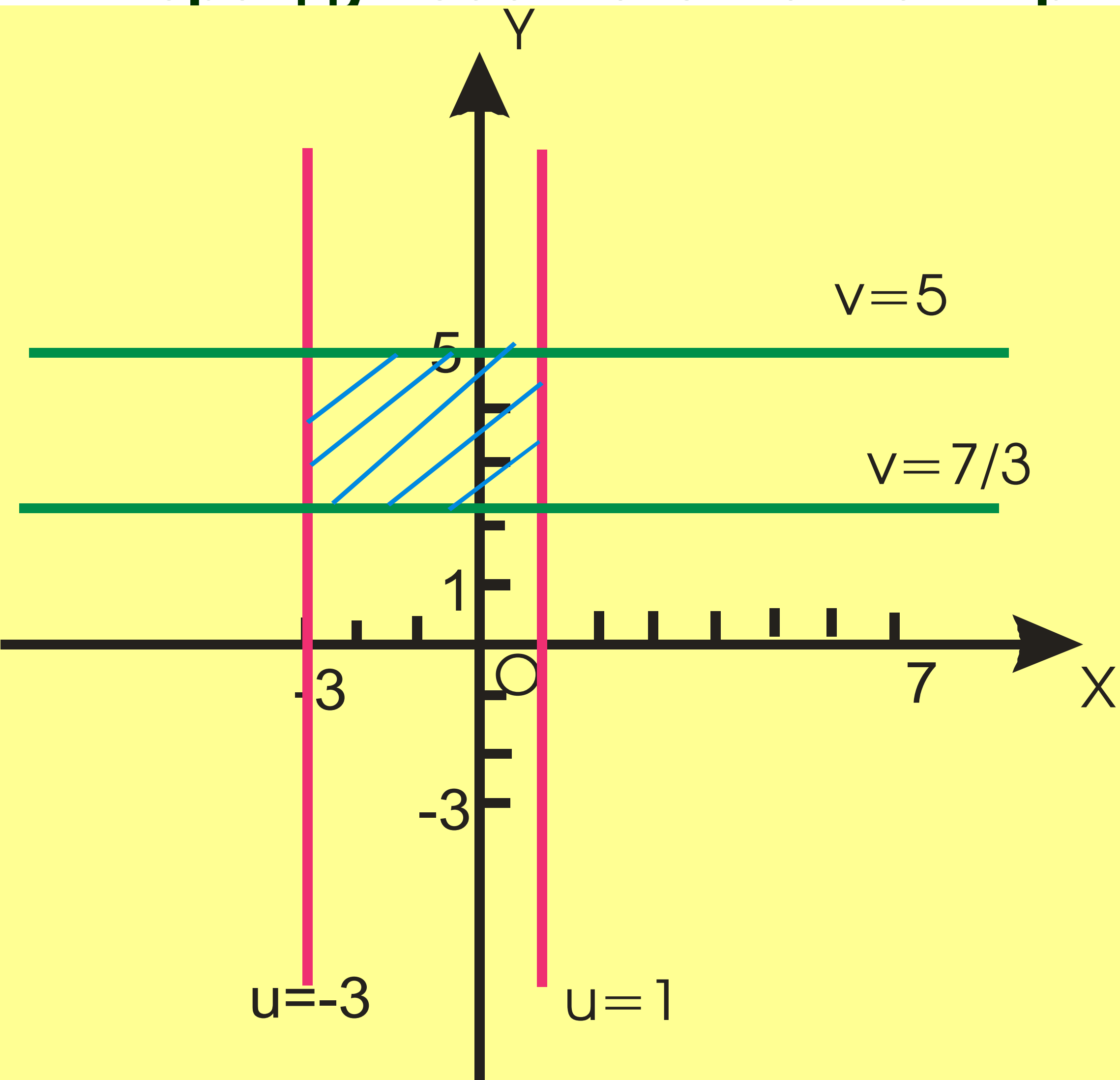
Положим

$$u = y - x,$$

$$\upsilon = y + \frac{1}{3}x.$$

Тогда прямые $y = x + 1, \ \ y = x - 3$

перейдут соответственно в прямые $u = 1, \ \ u = -3,$



а прямые

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5,$$

перейдут в прямые

$$\upsilon = \frac{7}{3}, \ \ \upsilon = 5.$$

Вычислим Якобиан, для этого выразим *x* и *y* через

$$u \text{ и } \upsilon.$$

$$\begin{cases} u = y - x \\ \upsilon = y + \dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на *(-1)* и сложим

$$\frac{1}{3}x + x = -u + \upsilon$$

$$\frac{4}{3}x = -u + \upsilon,$$

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}\upsilon.$$

Подставим полученное значение в первое уравнение системы и найдем *y*

$$y = u + x = u - \frac{3}{4}u + \frac{3}{4}\upsilon = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}\upsilon$$

Запишем выражение для Якобиана

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial \upsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}.$$

Т.к. $$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\partial x}{\partial \upsilon} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial y}{\partial \upsilon} = \frac{3}{4},$$

то $$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

$$|I| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Вычислим интеграл, используя выражение (11.4)

$$\iint_D (y-x)dxdy = \int_{7/3}^{5}\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}\upsilon+\frac{3}{4}u-\frac{3}{4}\upsilon\right)\cdot\frac{3}{4}dud\upsilon =$$

$$\frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}d\upsilon\int_{-3}^{1}udu = \frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}d\upsilon\frac{u^2}{2}\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}d\upsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right) =$$

$$= -3\int_{7/3}^{5}d\upsilon = -3\upsilon\Big|_{7/3}^{5} = -3\left(5-\frac{7}{3}\right) = -8.$$

11.4 Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Произведем замену декартовых координат *x,y* полярными координатами ρ, φ

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

т.е. в качестве переменных u и υ,

у нас выступают $\rho, \varphi.$

Чтобы применить выражение (11.4), нужно вычислить Якобиан:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

$$|I|=\rho.$$

Формула замены переменных (11.4) принимает вид

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi \quad (11.5)$$

Замечания

1. Переход к полярным координатам полезен тогда, когда подынтегральная функция имеет вид

$f(x^2+y^2)$ **или когда область интегрирования *D* является кругом, кольцом или частью таковых.**

2. Представление двойных интегралов в виде повторных приводит к разным пределам интегрирования в зависимости от того, где находится полюс полярной системы координат: вне, внутри или на границе области.

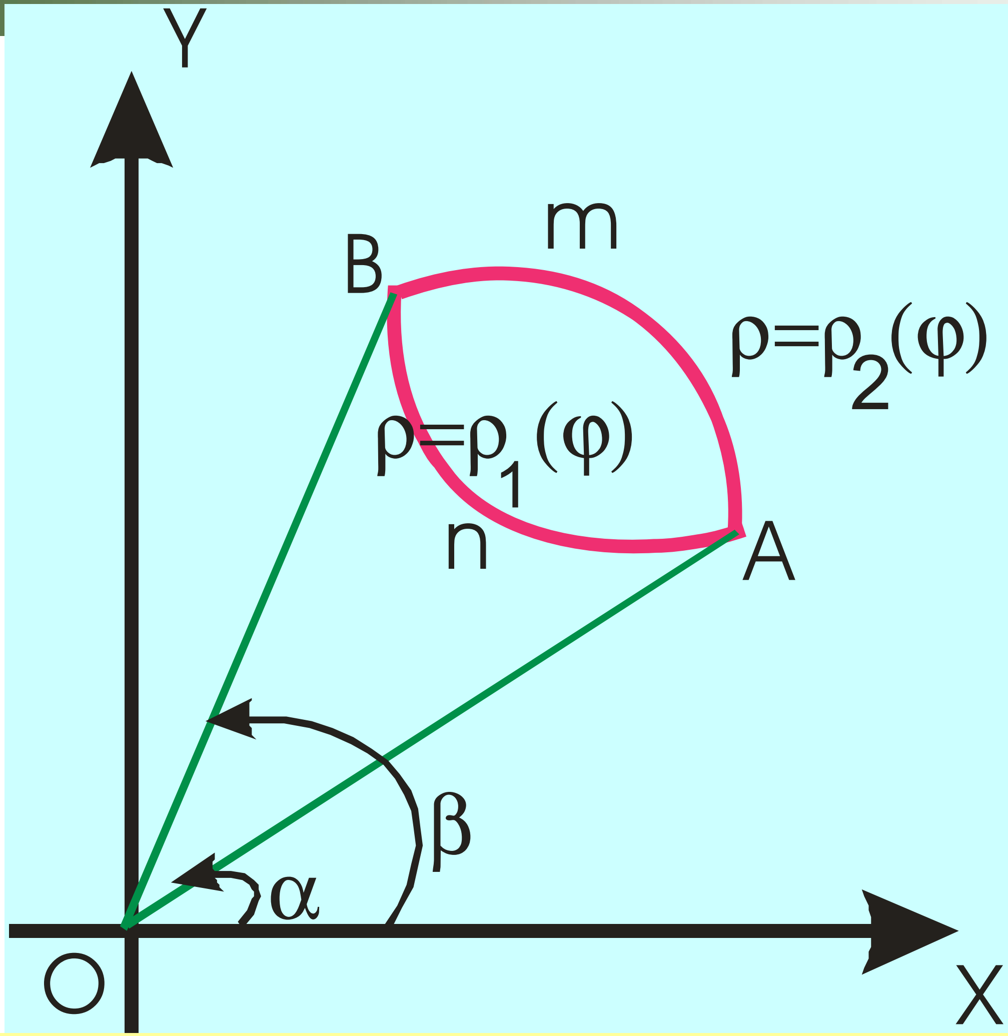
а) Если полюс полярной системы координат находится вне области, ограниченной лучами

$$\varphi = \alpha, \varphi = \beta, \quad \alpha < \beta$$

и линиями *AmB*, *AnB*, их уравнения соответственно

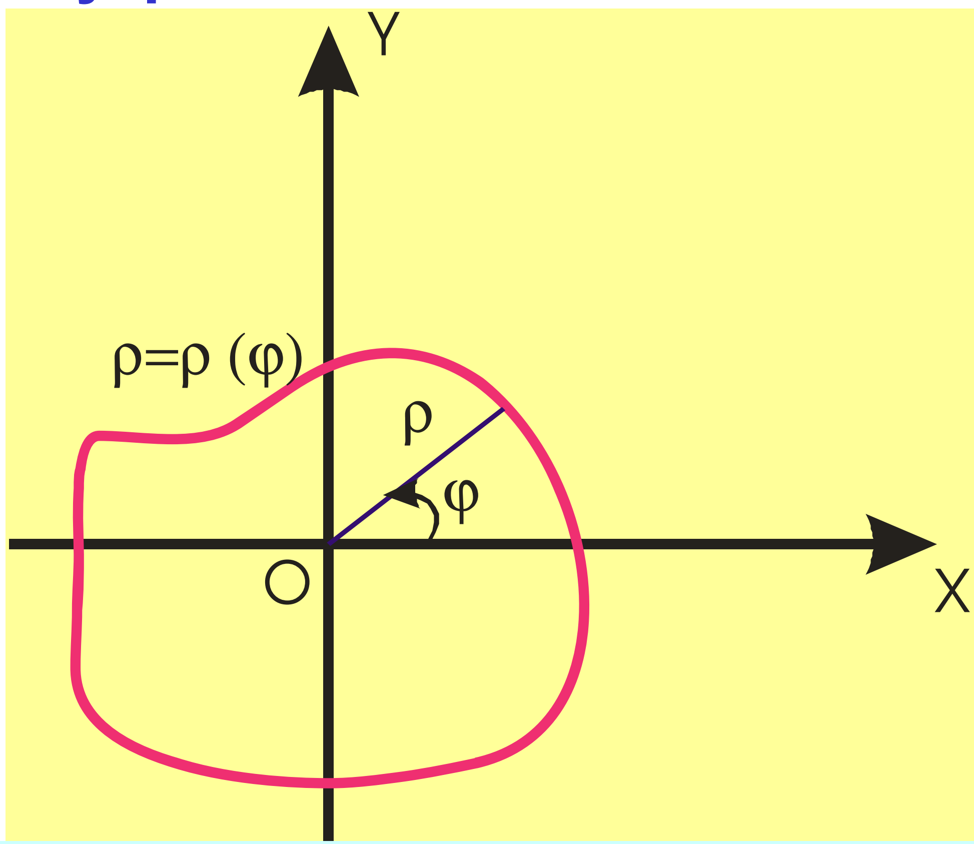
$$\rho = \rho_1(\varphi), \quad \rho = \rho_2(\varphi), \quad \rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi),$$

то как видно из рисунка



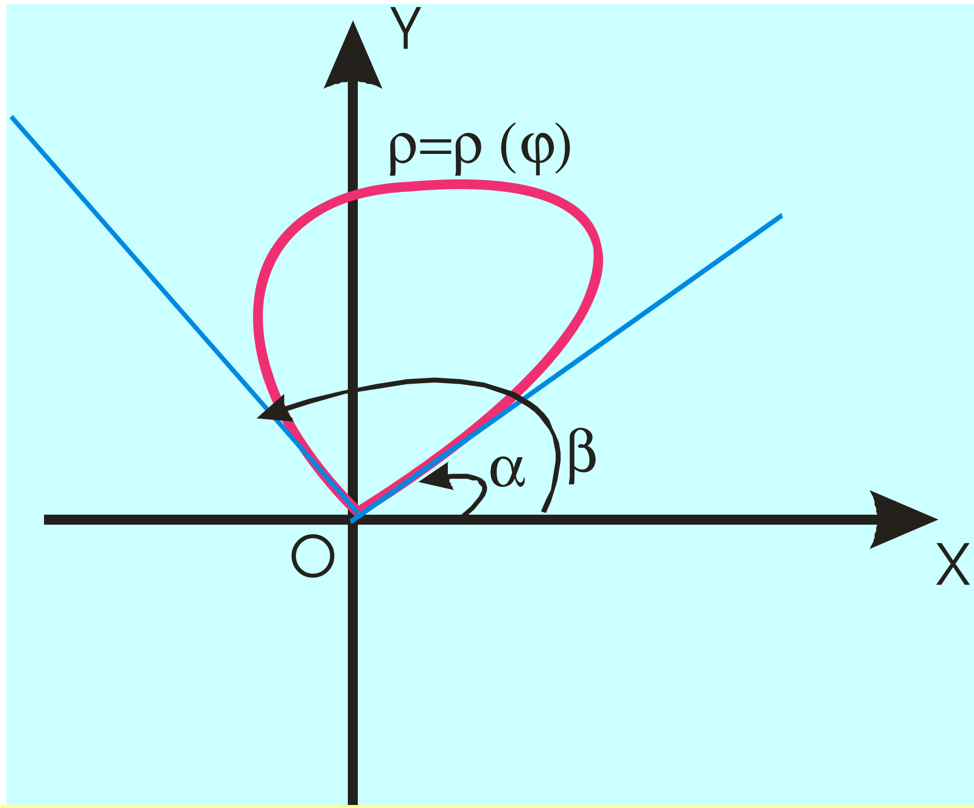
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho \quad (11.6)$$

б)Если полюс полярной системы координат находится внутри области *D*



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho \qquad (11.7)$$

в) Если полюс полярной системы координат находится на границе области

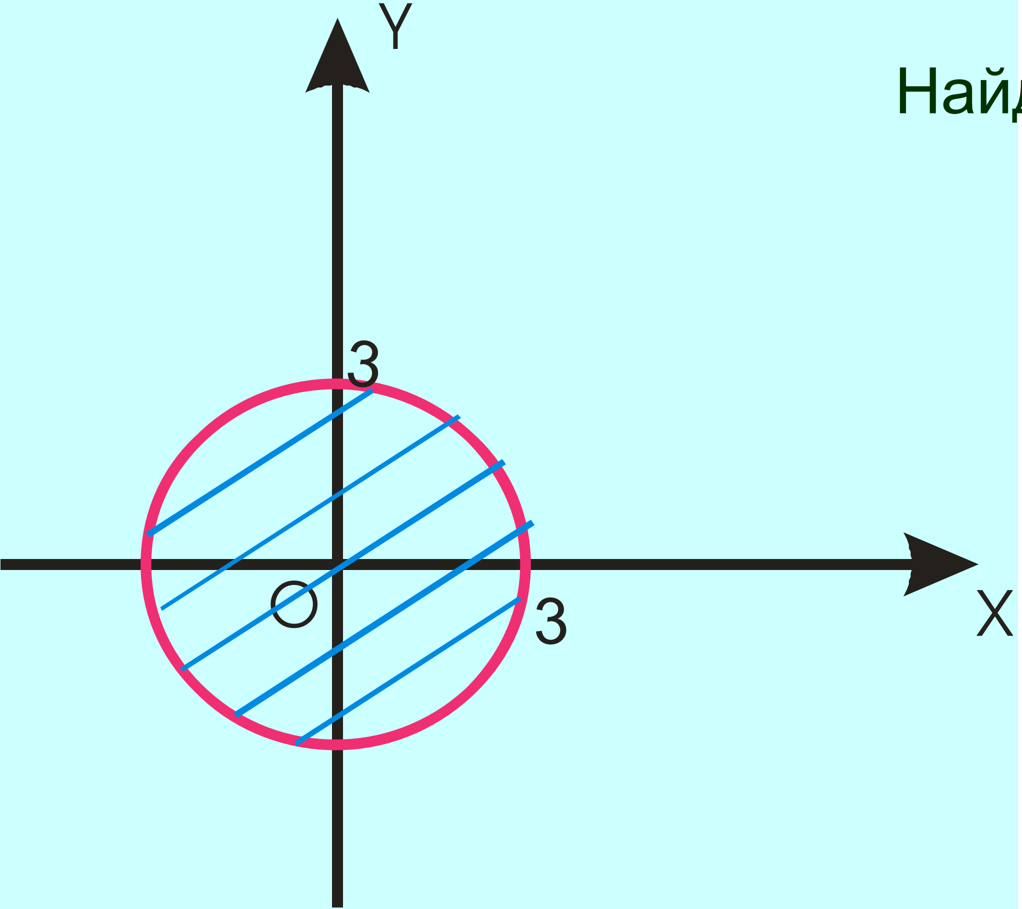


$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho \quad (11.8)$$

Пример: **Вычислить двойной интеграл по области D**

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dxdy, \qquad D: x^2 + y^2 \le 9,$$

Решение.



Найдем границы изменения угла

$$\varphi \quad \text{и} \quad \rho$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$x^2 + y^2 \le 9,$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le 9,$$

$$\rho^2 \le 9, \qquad 0 \le \rho \le 3,$$

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{9-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin\varphi}\,\rho d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9-\rho^2)^{1/2} d(9-\rho^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(9-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi(0-3^3) = 9\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 9\cdot 2\pi = 18\pi.$$

11.5 Приложения двойного интеграла

1) Объем цилиндрического тела находится по формуле:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy, \quad (11.9)$$

где $z = f(x, y)$ - уравнение поверхности ограничивающий тело сверху.

2) Площадь плоской фигуры.

Если положить в формуле (11.9) $f(x, y) = 1,$

то цилиндрическое тело превратится в прямой цилиндр, высотой $H = 1,$ $V = S \cdot H = S.$

Таким образом, объем такого цилиндра, будет равен площади основания *S* или области *D*

$$S = \iint\limits_{D} dxdy \qquad (11.10)$$

В полярной системе координат формула примет вид:

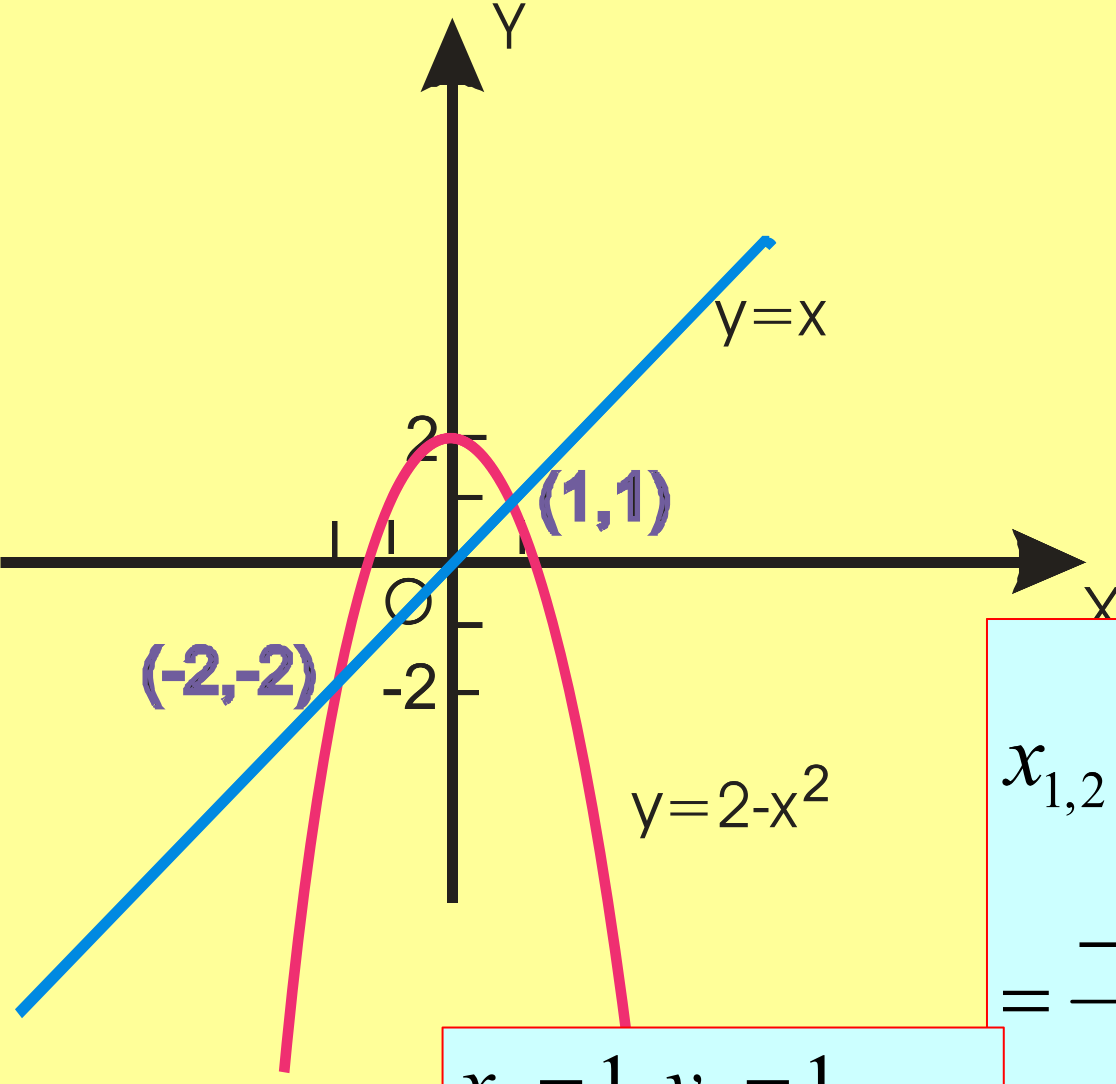
$$S = \iint\limits_{D'} \rho d\rho d\varphi \qquad (11.11)$$

Пример.

Вычислить площадь области ограниченной кривыми:

$$y = 2 - x^2, \qquad y = x.$$

Решение.



$$x = 2 - x^2,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{2},$$

$$x_1 = 1, y_1 = 1,$$

$$x_2 = -2, y_2 = -2,$$

$A(-2,-2),$

$B(1,1),$

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_{-2}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\int_{-2}^{1}dx\,y\Big|_{x}^{2-x^2}=$$

$$=\int_{-2}^{1}dx(2-x^2-x)=2\int_{-2}^{1}dx-\int_{-2}^{1}x^2dx-\int_{-2}^{1}xdx=$$

$$=2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=2(1+2)-\frac{1}{3}(1^3-(-2)^3)-\frac{1}{2}(1^2-(-2)^2)=$$

$$6-3+\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

3) Масса плоской фигуры.

Массу тонкой пластины *D*, если ее поверхностная плотность, является непрерывной функцией координат $\gamma=\gamma(x,y)$ **можно найти по формуле**

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy \quad (11.12)$$

4) Координаты центра тяжести плоской фигуры.

Пусть дана система *N* материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n,$ тогда координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad (11.13)$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры можно найти по формулам

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \qquad (11.14)$$

Если поверхностная плотность $\gamma(x, y) \neq 1,$

тогда (11.15) примет вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y) x dx dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y) dx dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y) y dx dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y) dx dy}. \qquad (11.6)$$