Занятие 2. Интерполирование. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Постановка задачи интерполяции. Пусть некоторая неизвестная функция $f(x)$ задана набором своих значений f_i в точках x_i, $i=\overline{0,n}$. Наиболее распространенным является задание этой функции в виде таблицы 1. ($f_i=f(x_i)$, $x_0<x_1<\ldots<x_n$).

Таблица 1.

x	x_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Требуется построить такую функцию $\varphi(x)$ из некоторого приближающего класса функций, определенных на всем отрезке $[x_0;\ x_n]$, что в точках x_i, называемых ***узлами интерполяции***, построенная функция $\varphi(x)$ должна иметь значения, совпадающие с известными значениями функции f.

Основная цель интерполяции – получить с помощью $\varphi(x)$ удобный алгоритм вычисления приближенных значений $f(x)$ в точках $x^*\in[x_0;\ x_n]$, не являющихся узлами. Такие значения легко вычисляются, если $\varphi(x)$ – алгебраический многочлен

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k. \tag{2.1}$$

Среди алгебраических многочленов вида (2.1) одним из решений задачи интерполяции является ***интерполяционный многочлен Лагранжа***:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \tag{4.2}$$

Здесь x_i – заданные узлы интерполяции, а $f(x_i)$ – заданные значения функции $f(x)$, $i=\overline{0,n}$.

Типовой пример. Зависимость прочности пряжи от влажности задана таблицей

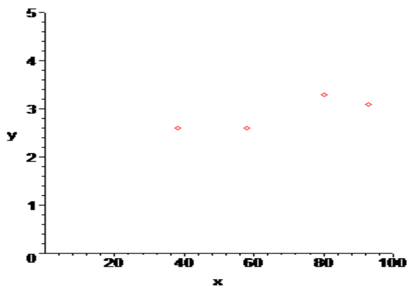
Влажность пряжи, %	x_i	38	58	80	93
Прочность пряжи	$f(x_i)$	2.6	2.6	3.3	3.1

Найти приближенное значение прочности пряжи при влажности x^*=70%, построив интерполяционный многочлен Лагранжа степени n.

Решение.

Для того чтобы определить степень многочлена Лагранжа, изобразим точки $(x_i,f(x_i))$ на плоскости.

```
> restart;
> with(plots); X:=[38,58,80,93]: Y:=[2.6,2.6,3.3,3.1]:
>q1:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..4],x=0..100,y=0..5,style=point,
                                color=red):
 display(q1);
```



$x^*=70\in[58,\ 89]$. Т.к. кривая на отрезке, соединяющем соседние с x^* узлы, похожа на квадратичную параболу, принимаем n=2. Считая точки

```
x₀:=X[2];x₁:=X[3];x₂:=X[4];y₀:=Y[2];y₁:=Y[3];
y₂:=Y[4].
```

Запишем аналитическое выражение для многочлена

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Таким образом,

```
> L:=y0*(x-x1)*(x-x2)/((x0-x1)*(x0-x2))+y1*(x-x0)*(x-x2)/((x1-x0)*(x1-x2))+y2*(x-x0)*(x-x1)/((x2-x0)*(x2-x1));
```

$$L := 0.003376623377\ (x-80)(x-93) - 0.01153846154\ (x-58)(x-93) + 0.006813186813\ (x-58)(x-80)$$

```
> simplify(L);
```

$$-0.001348651350\ x^2 + 0.2179320681\ x - 5.503196810$$

```
> L2:=subs(x=70,L);
```

$$L2 := 3.143656344$$

```
> f1:=L;
```

$$f1 := 0.003376623377\ (x-80)(x-93) - 0.01153846154\ (x-58)(x-93) + 0.006813186813\ (x-58)(x-80)$$

- 2) команда interp(X,Y,x) Полиномиальная аппроксимация функций, заданной четырмя точками

```
> f2:=interp(X,Y,x);
```

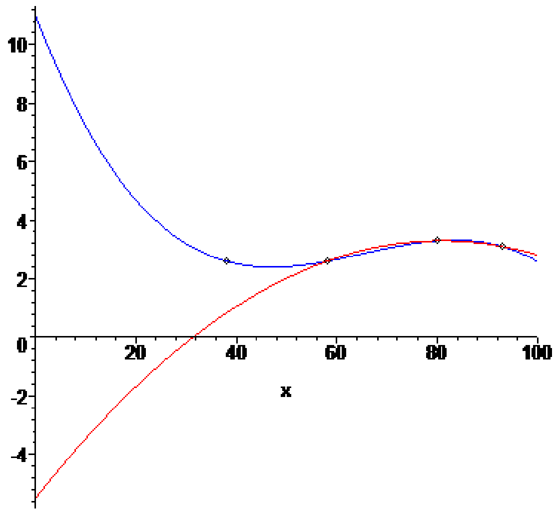
$$f2 := -0.00003829503832\ x^3 + 0.007497502503\ x^2 - 0.4512354316\ x + 11.02187813$$

```
> L3:=subs(x=70,f2);
```

Сравниваем L2,L3.

Для наглядности можно построить график

```
> q1:=plot(f1(x),x=0..100,color=red):
>
q2:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..4],x=0..100,style=point,color=black):
> q3:=plot(f2(x),x=0..100,color=blue):
> display(q1,q2,q3);
```



> Задания для самостоятельного решения.

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа степени *n* и выполнить сравнительный анализ с результатами полученными используя команду **interp**

2.1 Зависимость повреждения ткани от длины стежка

Длина стежка, мм	x_i	0.5	1	1.5	2.0	x^*=1.2
Повреждение, %	$f(x_i)$	30	32.5	34.2	35.8	

2.2 Зависимость натяжения нити от скорости сматывания пряжи

Скорость сматывания, м/с	x_i	1	5	10	15	x^*=8
Натяжение нити, кН	$f(x_i)$	0.52	0.8	2.98	16.7	

2.3 Зависимость угла перекоса между нитями ткани от усилия в прессовании

Усилие, Н	x_i	4	8	12	16	x^*=10
Угол перекоса между нитями ткани	$f(x_i)$	9.1	13	16.1	17.1	

2.4 Зависимость угла перекоса между нитями ткани от ширины образца в прессовании

Ширина образца, мм	x_i	25	50	75	100	x^*=80
Угол перекоса между нитями ткани	$f(x_i)$	33.6	25.6	21	19.4	

2.5 Изменение поверхностной плотности нетканого полотна при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	15	x^*=10
Масса образца, г	$f(x_i)$	12.23	13.06	13.35	13.68	13.59	13.63	

2.6 Изменение прочности трикотажного полотна при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	15	x^*=5
Прочность по вертикали	$f(x_i)$	62.5	41.5	46	43.6	46.7	46.8	

2.7 Изменение прочности трикотажного полотна при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	15	x^*=10
Прочность по горизонтали	$f(x_i)$	11.2	11.9	13.2	12	11.8	12.3	

2.8 Изменение прочности трикотажного полотна при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	x^*=8
Прочность по диагонали	$f(x_i)$	56.5	63.1	65.1	64.4	58.9	

2.9 Изменение прочности ткани при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	15	x^*=10
Прочность по основе	$f(x_i)$	56.5	63.1	65.1	64.4	58.9	62.3	

2.10 Изменение прочности ткани при многократных стирках

Количество стирок	x_i	0	3	6	9	12	15	x^*=10
Прочность по утку	$f(x_i)$	76.2	67.7	70.8	65.2	71	69.2	