Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Основы математического моделирования

Тема1. Основные принципы математического моделирования

Кафедра теоретичской и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

ЛИТЕРАТУРА

1.Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.:Наука, 1987.–320с

2.Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М.:Мир,1985.–272с.

3. Самарский А.А. Математика Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры /А.А. Самарский, А.П. Михайлов – М. Физико-математическая литература. 2005. - 320 с.

4.Трусова П.В. Введение в математическое моделирование / Трусова, П.В – М.: «Логос» 2007. – 440 с.

5. Любарский Г.Я. Математическое моделирование и эксперимент / Г.Я. Любарский [и др.]- Киев : Наукова думка, 1987. – 160 с

6. Русак В.Н. Математическая физика. Мн., «Дизайн-ПРО»,1998

7. Черняк А.А., Черняк Ж.А.,Метельский Ю.М. Математическое программирование. Алгоритмический подход. – Мн.: Вышэйшая школа, 2007.–352с.

8. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. / Т. Шуп – М.: Мир, 1982. – 238 с.

1.1 Определение моделирования. Математическая модель. Классификация математических моделей.

Слово "Модель" происходит от латинского modus (копия, образ, очертание).

Моделирование - это замещение некоторого объекта А другим объектом Б.

Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б - моделью.

Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой.

В основе теории моделирования лежит теория подобия.

При моделировании абсолютное подобие не имеет места и лишь стремится к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.
Абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

Все модели можно разделить на два класса:

- **1. вещественные**
  - **1.натурные**
  - **2.физические**
  - **3.математические**
- **2. идеальные**
  - **1.наглядные**
  - **2. знаковые**
  - **3.математические**

Вещественные натурные модели - это реальные объекты, процессы и системы, над которыми выполняются эксперименты научные, технические и производственные.

Вещественные физические модели - это макеты, муляжи, воспроизводящие физические свойства оригиналов (тепловые, кинематические, динамические, световые гидравлические, электрические модели).

Вещественные математические - это аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические модели

Идеальные наглядные модели - это схемы, карты, чертежи, графики, графы, аналоги, структурные и геометрические модели.

Идеальные знаковые модели - это символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление.

Идеальные математические модели - это аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные модели.

Математическое моделирование *- это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены математической моделью, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.*

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженных в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала.

В общем случае математическая модель реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0,$$

где *X* – вектор входных переменных,

$$X = [x_1, x_{2,} x_3, \ldots, x_N]^t,$$

Y-вектор выходных переменных,

$$Y = [y_1, y_{2,} y_3, \ldots, y_N]^t,$$

Z-вектор внешних воздействий,

$$Z = [z_1, z_{2,} z_3, \ldots, x_N]^t,$$

***t*- координата времени.**

Построение математической модели заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями.

По принципам построения математические модели разделяют на:

1.аналитические;	**2.имитационные.**

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Аналитическая модель разделяется на типы в зависимости **от математической проблемы:**

1. уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные),

2.аппроксимационные задачи (интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование и дифференцирование),

3.задачи оптимизации,

4.стохастические проблемы.

Однако по мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему. Тогда исследователь вынужден использовать имитационное моделирование.

Имитационные модели - это проводимые на ЭВМ вычислительные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем математические модели могут быть:

1. детерминированные	2. стохастические

В детерминированных моделях **предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, поведение системы можно точно определить.**
При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра.

Стохастическая модель **учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.**

По виду входной информации модели разделяются на:

1. непрерывные	2. дискретные

Если информация и параметры являются непрерывными, то модель - непрерывная.

Если информация и параметры - дискретны, то и математическая модель - дискретная.

По поведению моделей во времени они разделяются на:

1. статические,	2. динамические

Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо момент времени.

Динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

По степени соответствия между математической моделью и реальным объектом, процессом или системой математические модели разделяют на:

1. изоморфные (одинаковые по форме)	**2. гомоморфные (разные по форме)**

Модель называется изоморфной, если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие.

Гомоморфной - если существует соответствие лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

1.2 Основные этапы математического моделирования.

Процесс исследования включает следующие основные этапы:

1. **Постановка задачи.**
2. **Построение математической модели.**
3. **Нахождение решения с помощью модели.**
4. **Послемодельный анализ и корректировка полученного результата.**

Построение математической модели требует:

- **выделения рассматриваемого объекта, отбрасывания всего несущественного и выделение всего существенного;**

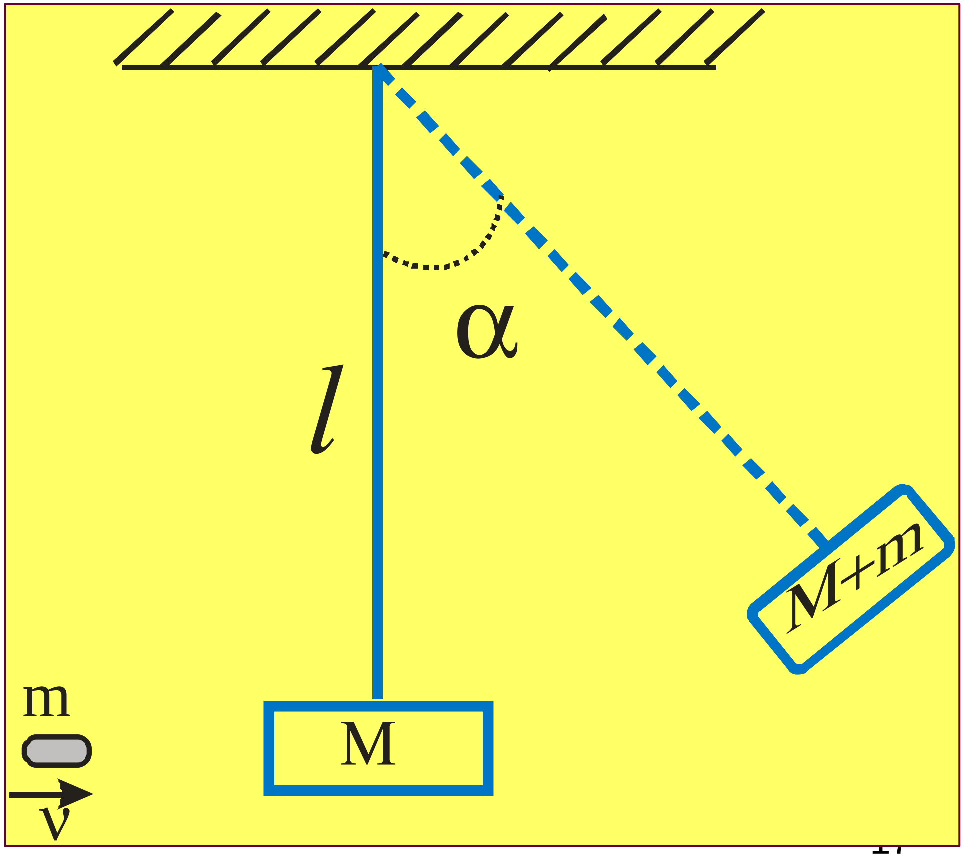
- точного количественного описания ситуации, с тем чтобы это описание можно было перевести на математический язык;
- определение набора параметров, характеризующих как состояние системы, так и возможное управление системой;
- определение зависимости между параметрами состояния и управления;
- определение цели через параметры системы в терминах соответствующей математической модели.

Плохо формализуемые задачи: это задачи, условия которых определены не полностью, не все связи заданы в аналитической форме, при этом формулировка задачи может содержать противоречия, а также не все соглашения о понятии решения могут быть в наличии.

Решению таких (плохо формализуемых) задач предшествуют этапы преобразования их формулировки, уточнений и упрощений.

В качестве примера рассмотрим известный всем закон сохранения энергии.

Пусть требуется определить скорость пули массы *m* , застрявшей в грузе, подвешенного на легком жестком и свободно вращающемся стержне.



Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе "пуля—груз" свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы.

Этот процесс описываются цепочкой равенств

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = (m + M)\frac{V^2}{2} = (m + M)gl(1 - \cos\alpha).$$

Здесь $\frac{m\upsilon^2}{2}$ **- кинетическая энергия пули массы m,**

***M*-масса груза*, V*- скорость системы "пуля—груз" сразу после столкновения, *l -*длина стержня.**

Искомая скорость определяется формулой

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}.$$

Данная модель будет вполне приемлемой, если не учитываемые нами потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, разгон стержня и т.д. невелики.

При более точном рассмотрении, следует отметить, что процессы, происходящие при "слипании" пули и маятника, уже не являются чисто механическими. Поэтому примененный для вычисления величины V закон сохранения механической энергии несправедлив: сохраняется полная, а не механическая энергия системы.

Он дает лишь нижнюю границу для оценки скорости пули (для правильного решения этой простой задачи надо воспользоваться также законом сохранения импульса).