Преобразования Лапласа. Таблица

$1 \risingdotseq \frac{1}{p}$	$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}$
$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$	$\sin(\beta t) \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$t^2 \risingdotseq \frac{2}{p_3}$	$\cos(\beta t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}$
$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sinh(\beta t) \risingdotseq \frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
	$\cosh(\beta t) \risingdotseq \frac{p}{p^2-\beta^2}$

Свойства преобразований Лапласа

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда

① $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \risingdotseq a \cdot F(p) + bG(p)$

② $e^{at} \cdot f(t) \risingdotseq F(p-a)$

③ $f(t-a) \risingdotseq e^{-ap} \cdot F(p) \iff e^{-ap} \cdot F(p) \risingdotseq f(t-a)$

④ $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$

$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$

⑤ $t \cdot f(t) = -F'(p)$

Решение типовых заданий

ПЗ 2.1 Найти изображения функций:

I) с помощью свойств преобр-я Лапласа

II) с помощью MAPLE

Задание 1

$$f(t) = 2 - 3t^2 + 4\cos 7t$$

Решение

$$1 \doteq \frac{1}{p} \Rightarrow 2 \doteq 2\cdot\frac{1}{p}$$

$$t^2 \doteq \frac{2!}{p^{2+1}} = \frac{1\cdot 2}{p^3} = \frac{2}{p^3} \Rightarrow 3t^2 \doteq 3\cdot\frac{2}{p^3}$$

$$\cos 7t \doteq \frac{p}{p^2+7^2} = \frac{p}{p^2+49} \Rightarrow 4\cos 7t \doteq 4\cdot\frac{p}{p^2+49}$$

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2+49}$$

Ответ. $\frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2+49}$

Задание 2

$$f(t) = e^{8t}\cdot \sinh(5t)$$

Решение. $\sinh(5t) \doteq \frac{5}{p^2-25} \Rightarrow$ по свойству (2)

$$e^{8t}\cdot \sinh(5t) \doteq F(p-8) = \frac{5}{(p-8)^2-25}$$

Ответ $\frac{5}{p^2-16p+39}$

Задание 3

$f(t) = t \cdot \sin 2t$

Решение.

$\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+2^2} = \dfrac{2}{p^2+4} = F(p) \Longrightarrow$ по св-ву (5)

$t \cdot \sin 2t \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right)' = -\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

$= -\dfrac{2' \cdot (p^2+4) - 2 \cdot (p^2+4)'}{(p^2+4)^2} = -\dfrac{0 \cdot (p^2+4) - 2 \cdot 2p}{(p^2+4)^2} = \dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$

Ответ $\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$

Решение каждой из задач $\underbrace{}_{}$ 1) – 3) с помощью MAPLE выполняется по командам:

```
> restart:
> with(inttrans):
> f(t):= t*sin(2*t);
> F:=laplace(f(t),t,p);
```

Здесь f(t) взято из задания 3

П3 2.2

Найти оригиналы заданных функций

I) с помощью свойств преобразований Лапласа

II) с помощью MAPLE.

Задание 1

$$F(p) = \frac{7}{p-8} - \frac{5}{p+3}$$

Решение

$$\frac{1}{p-8} \doteqdot e^{8t} \Rightarrow \frac{7}{p-8} \doteqdot 7 \cdot e^{8t}$$

$$\frac{1}{p+3} = \frac{1}{p-(-3)} \doteqdot e^{-3t} \Rightarrow \frac{5}{p+3} \doteqdot 5 \cdot e^{-3t}$$

$$f(t) = 7e^{8t} - 5e^{-3t}$$

Ответ $7e^{8t} - 5e^{-3t}$

Задание 2

$$F(p) = \frac{p}{p^2+81} + \frac{17}{p^2-25}$$

Решение

$$\frac{p}{p^2+81} = \frac{p}{p^2+9^2} \doteqdot \cos(9t)$$

$$\frac{17}{p^2-25} = \frac{17}{p^2-5^2} = \frac{17}{5} \cdot \frac{5}{p^2-5^2} \doteqdot \frac{17}{5} \cdot \sinh(5t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \cos 9t + \frac{17}{5} \sinh 5t$$

Ответ $\cos 9t + \frac{17}{5} \sinh 5t$

Задание 3.

$$F(p)=\frac{3}{p^2-4p+20}$$

Решение В знаменателе трехчлен $p^2-4p+20$ имеет дискриминант $D=16-4\cdot 20<0$. В этом случае требуется в трехчлене $p^2-4p+20$ выделить полный квадрат с помощью формул: $(p+a)^2=p^2+2pa+a^2$

$$(p-a)^2=p^2-2pa+a^2.$$

Получим

$$\underline{\underline{p^2-4p}}+20=\underline{\underline{p^2-2\cdot 2p}}+20=$$

$$=\underline{\underline{p^2-2p\cdot 2+2^2-2^2}}+20=(p-2)^2-2^2+20$$

$$=(p-2)^2+16$$

Подставим в заданное $F(p)$:

$$F(p)=\frac{3}{p^2-4p+20}=\frac{3}{(p-2)^2+16}=\frac{3}{(p-2)^2+4^2}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{(p-2)^2+4^2}.$$

$$\frac{4}{p^2+4^2}\doteqdot \sin 4t \Rightarrow \text{по св-ву } (2)$$

$$e^{2t}\cdot\sin 4t\doteqdot\frac{4}{(p-2)^2+4^2}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow F(p)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{(p-2)^2+4^2}\doteqdot\frac{3}{4}\cdot e^{2t}\cdot\sin 4t$$

Ответ. $\frac{3}{4}e^{2t}\cdot \sin 4t.$

Задание 4.

$$F(p)=\frac{11p+28}{p^2+p-20}$$

Решение Дискриминант трехчлена p^2+p-20 равен $D=1^2-4\cdot(-20)=81>0$

Находим корни:

$$p_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a}=\frac{-1-9}{2}=-5\ ;\ p_2=\frac{-1+9}{2}=4.$$

Раскладываем на множители по формуле: $ap^2+bp+c=a(p-p_1)(p-p_2)$.

$$p^2+p-20=1\cdot(p-(-5))(p-4)=(p+5)(p-4)$$

Подставим в функцию $F(p)$ и разложим ее на простейшие слагаемые

$$F(p)=\frac{11p+28}{p^2+p-20}=\frac{11p+28}{(p+5)(p-4)}=\frac{A}{p+5}+\frac{B}{p-4}=$$

$$=\frac{A(p-4)+B(p+5)}{(p+5)(p-4)},$$

Из равенства $\frac{A(p-4)+B(p+5)}{(p+5)\cdot(p-4)}=\frac{11p+28}{(p+5)(p-4}$

получим

$$A(p-4)+B(p+5)=11p+28 \qquad (1)$$

Из равенства (1) найдем A и B

Подставим в него $p = p_1 = -5$:

$$A\cdot(-5-4) + B(-5+5) = 11\cdot(-5)+28$$

$$-9A + 0\cdot B = -27; \quad A = 3$$

Подставим $p = p_2 = 4$:

$$A\cdot(4-4) + B\cdot(4+5) = 11\cdot 4 + 28$$

$$A\cdot 0 + B\cdot 9 = 72;$$

$$9B = 72; \quad B = 8$$

Возвращаемся к $F(p)$:

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p-4} = \frac{3}{p+5} + \frac{8}{p-4}$$

Далее поступаем как в задании 1:

$$F(p) = \frac{3}{p-(-5)} + \frac{8}{p-4} \doteqdot 3e^{-5t} + 8e^{4t}$$

Ответ $3\cdot e^{-5t} + 8\cdot e^{4t}$

Задание 5.

$$F(p) = \frac{p-9}{p^2+4p+13}$$

Решение Дискриминант трехчлена $p^2+4p+13$ отрицательный:

$D = 4^2 - 4\cdot 13 < 0 \implies$ действуем аналогично заданию 3:

$$p^2+4p+13 = p^2+2\cdot 2p+13 = \underline{p^2+2p\cdot 2+2^2}-2^2+13$$
$$=(p+2)^2+9=(p+2)^2+3^2$$

$$F(p)=\frac{p-9}{(p+2)^2+3^2}=\frac{p+2-2-9}{(p+2)^2+3^2}=$$

$$=\frac{p+2-11}{(p+2)^2+3^2}=\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{11}{(p+2)^2+3^2}=$$

$$=\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)+3^2}=$$

$$=\frac{p-(-2)}{(p-(-2))^2+3^2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{(p-(-2))^2+3^2}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^{-2t}\cdot\cos 3t-\frac{11}{3}\cdot e^{-2t}\cdot\sin 3t$$

Ответ. $e^{-2t}\cdot\left(\cos 3t-\frac{11}{3}\sin 3t\right)$

Задание 6

$$\boxed{\begin{aligned}
&F(p)=e^{-3p}\cdot\frac{7}{p^2+64}\\
&\text{Решение. Используем свойство (3).}\\
&\frac{7}{p^2+64}=\frac{7}{p^2+8^2}=\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{p^2+8^2}\risingdotseq\frac{7}{8}\cdot\sin 8t \Longrightarrow\\
&e^{-3p}\cdot\frac{7}{p^2+64}\risingdotseq\frac{7}{8}\cdot\sin 8(t-3)=\frac{7}{8}\sin(8t-24)\\
&\text{Ответ. } \frac{7}{8}\sin(8t-24)
\end{aligned}}$$

Решение каждой из задач 1–6 с помощью MAPLE выполняется командами:

Здесь F(p) взято из задания 6.

```
> restart:
> with(inttrans):
> F(p):=exp(-3*p)*(7/(p^2+64));
> f:=invlaplace(F(p),p,t);
```

ПЗ 2.3 Решить дифференциальное уравнение $y''+a_1y'+a_0y=f(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=c_1$, $y'(0)=c_2$

I) с помощью преобразования Лапласа

II) с помощью MAPLE.

Задание 1

$$y''+4y'-12y=4\cdot e^{5t}, \quad c_1=8, \; c_2=9$$

Решение. Искомое решение обозначим $y(t)$, а его изображение $Y(p)$. То есть

$y(t) \risingdotseq Y(p)$. $\Longrightarrow$ по свойству (4)

$$y'(t) \risingdotseq p\cdot Y(p)-y(0)$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2\cdot Y(p)-p\cdot y(0)-y'(0).$$

Подставим сюда $y(0)=c_1=8$, $y'(0)=c_2=9$.
Получим

$$y \risingdotseq Y, \quad y' \risingdotseq p\cdot Y-8, \quad y'' \risingdotseq p^2 Y-p\cdot 8-9$$

Изобразим правую часть уравнения:

$$4\cdot e^{5t} \risingdotseq 4\cdot\frac{1}{p-5}=\frac{4}{p-5}.$$

В заданное уравнение $y''+4y'-12y=4e^{5t}$ вместо y'', y', y, $4e^{5t}$ подставим их изображения:

$$(p^2\cdot Y-8p-9)+4\cdot(pY-8)-12\cdot Y=\frac{4}{p-5}$$

Из этого уравнения нужно выразить Y:

$$p^2Y-8p-9+4pY-32-12Y=\frac{4}{p-5}$$

$$p^2Y+4pY-12=\frac{4}{p-5}+8p+41;$$

$$Y\cdot(p^2+4p-12)=\frac{4+(8p+41)\cdot(p-5)}{p-5};$$

$$Y\cdot(p^2+4p-12)=\frac{8p^2+p-201}{p-5};$$

$$Y=\frac{8p^2+p-201}{(p-5)(p^2+4p-12)}.$$

Аналогично как в решении задания 4, ПЗ 2.2 трехчлен $p^2+4p-12$ разложим на множители.

$\mathcal{D} = 4^2 - 4\cdot(-12) = 64$; $p_1 = \frac{-4-8}{2} = -6$; $p_2 = \frac{-4+8}{2} = 2$

$p^2 + 4p - 12 = (p - p_1)(p - p_2) = (p+6)(p-2)$

Тогда

$$Y = \frac{8p^2+p-201}{(p-5)(p^2+4p-12)} = \frac{8p^2+p-201}{(p-5)(p+6)(p-2)} =$$

$$= \frac{A}{p-5} + \frac{B}{p+6} + \frac{C}{p-2} =$$

$$= \frac{A(p+6)(p-2) + B(p-5)(p-2) + C(p-5)(p+6)}{(p-5)(p+6)(p-2)}$$

$\Rightarrow$

$A(p+6)(p-2) + B(p-5)(p-2) + C(p-5)(p+6) = 8p^2 + p - 201$

Находим A, B, C подставляя сюда

$p=5$, $p=-6$, $p=2$

$\underline{p=5}$:

$A\cdot(5+6)(5-2) + B(5-5)(5-2) + C(5-5)(5+6) = 8\cdot 5^2 + 5 - 201$

$A\cdot 11\cdot 3 + B\cdot 0 \quad + C\cdot 0 \quad = 8\cdot 25 + 5 - 201$

$33A = 4$; $A = \frac{4}{33}$

$\underline{p=-6}$: $A\cdot 0 + B(-6-5)\cdot(-6-2) + C\cdot 0 = 8\cdot(-6)^2 + (-6) - 201$

$B\cdot(-11)\cdot(-8) = 8\cdot 36 - 6 - 201$; $88B = 81$, $B = \frac{81}{88}$

$\underline{p=2}$: $A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(2-5)\cdot(2+6) = 8\cdot 2^2 + 2 - 201$

$-24\cdot C = -167$; $C = \frac{167}{24}$

Найденные A, B, C подставим в Y:

$$Y = \frac{A}{p-5} + \frac{B}{p+6} + \frac{C}{p-2} = A \cdot \frac{1}{p-5} + B \cdot \frac{1}{p+6} + C \cdot \frac{1}{p-2} =$$

$$= \frac{4}{33} \cdot \frac{1}{p-5} + \frac{81}{88} \cdot \frac{1}{p+6} + \frac{167}{24} \cdot \frac{1}{p-2} \risingdotseq$$

$$\fallingdotseq \frac{4}{33} \cdot e^{5t} + \frac{81}{88} e^{-6t} + \frac{167}{24} e^{2t} = y(t)$$

Ответ

$$y(t) = \frac{4}{33} \cdot e^{5t} + \frac{81}{88} e^{-6t} + \frac{167}{24} e^{2t}$$

Программа для решения задачи на MAPLE:

```
> restart:
> with(inttrans):
> uravn:=diff(y(t),t,t)+4*diff(y(t),t)
          -12*y(t)=4*exp(5*t);
> usl:=y(0)=8, D(y)(0)=9;
> dsolve({uravn, usl}, y(t), method=laplace);
```