Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема7. «Численное интегрирование.»

Кафедра теоретичской и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

Не для всякой непрерывной функции ее первообразная вычисляется через элементарные функции.

В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона – Лейбница затруднительно, и применяются различные методы приближенного вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования состоит в вычислении приближенного значения интеграла

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx$$

где f- заданная функция.

7.1 Формула прямоугольников.

Пусть на отрезке $[a,b]$ **задана непрерывная функция** $y = f(x).$

Требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

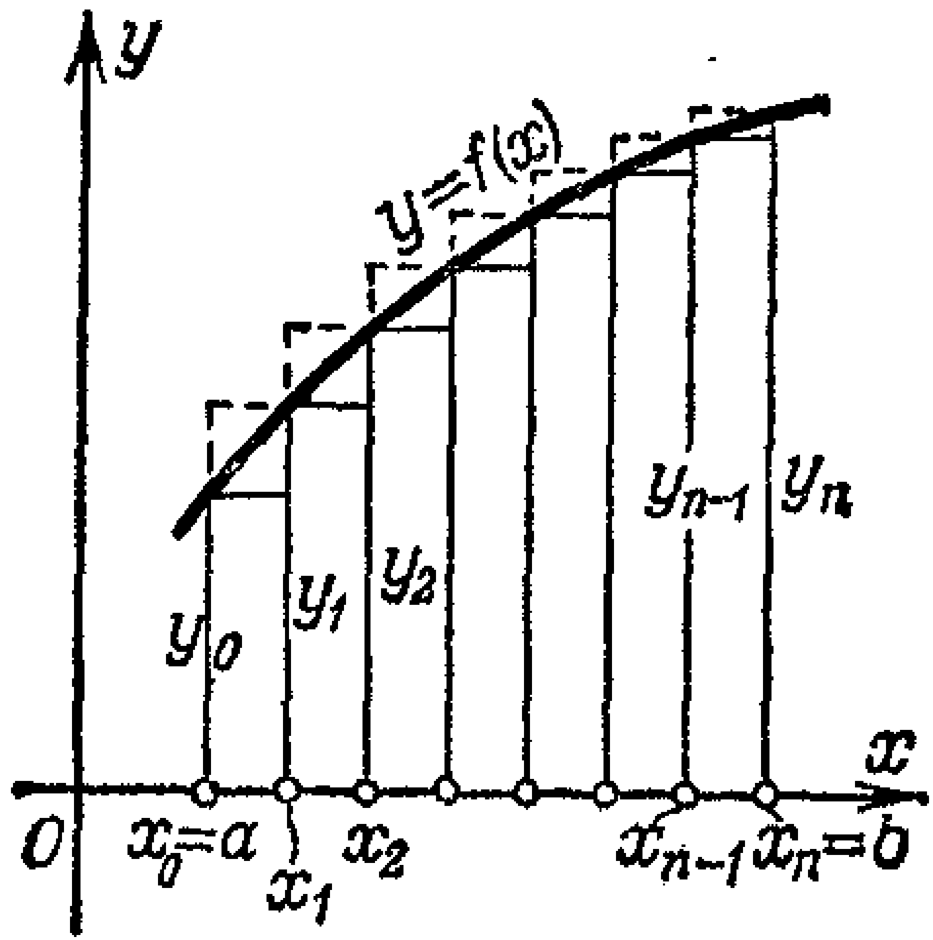
Разделим отрезок $[a,b]$ **точками**

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

на *n* равных частей длины Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Обозначим через $y_0, y_1, \dots, y_n$ **значения функции** $f(x)$



в точках

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,$

т.е.

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),$
$\dots y_n = f(x_n).$

Составим суммы:

$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \ldots + y_{n-1} \Delta x$$

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \ldots + y_n \Delta x$$

Каждая из этих сумм является интегральной сумой для

$f(x)$ **на отрезке** $[a, b]$

и поэтому приближенно выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \quad (7.1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \quad (7.2)$$

Это и есть квадратурная *формула прямоугольников.*

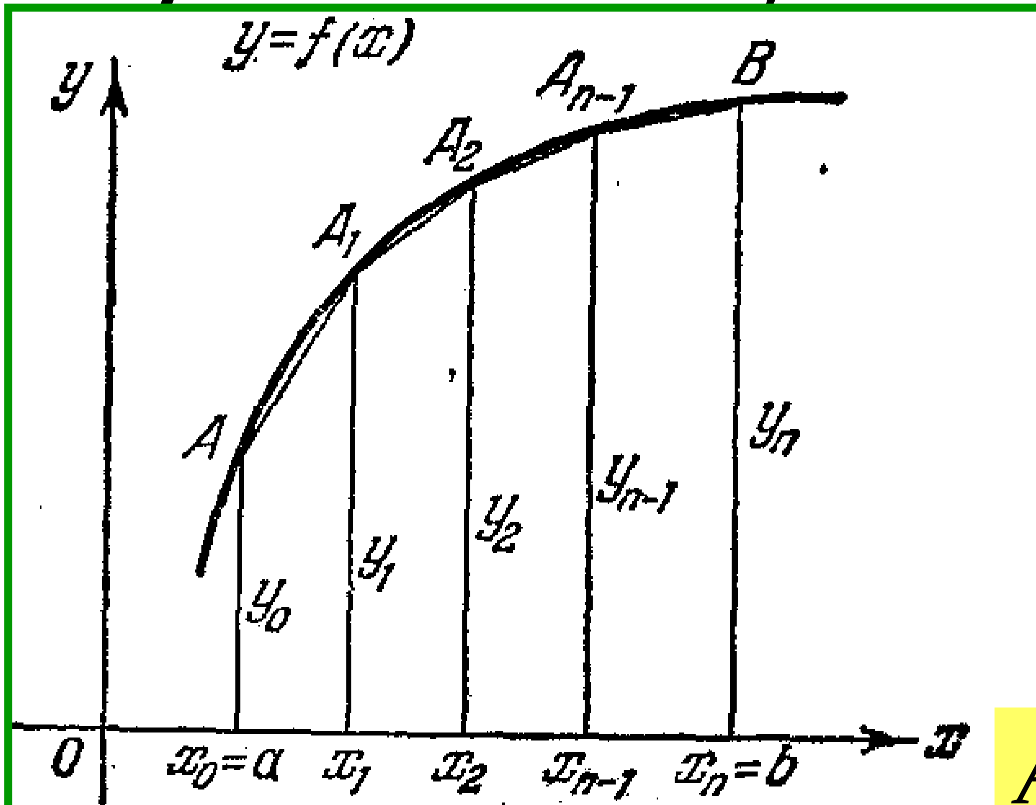
Если $f(x)$ **- положительная и возрастающая функция, то формула (4.1) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула (4.2) - площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников.**

Ошибка, совершаемая при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число *n*, т.е. чем меньше шаг деления

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

7.2 Формула трапеций.

Мы получим более точное значение определенного интеграла, если данную кривую заменить не ступенчатой линией, а вписанной ломаной.



Тогда площадь криволинейной трапеции *aABb* замениться суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами

$$AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B.$$

Так как площадь первой из этих трапеций равна

$\dfrac{y_0 + y_1}{2}\Delta x,$ площадь второй равна $\dfrac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$ и т.д., то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x \right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right) \quad (7.3)$$

Эта и есть квадратурная *формула трапеций.*

Число *n* выбирается произвольно.

Чем больше будет это число и чем меньше, следовательно, будет шаг Δx, тем с большей точностью сумма, написанная в правой части приближенного равенства (4.3), будет давать значение интеграла.

7.3 Формула парабол (формула Симпсона).

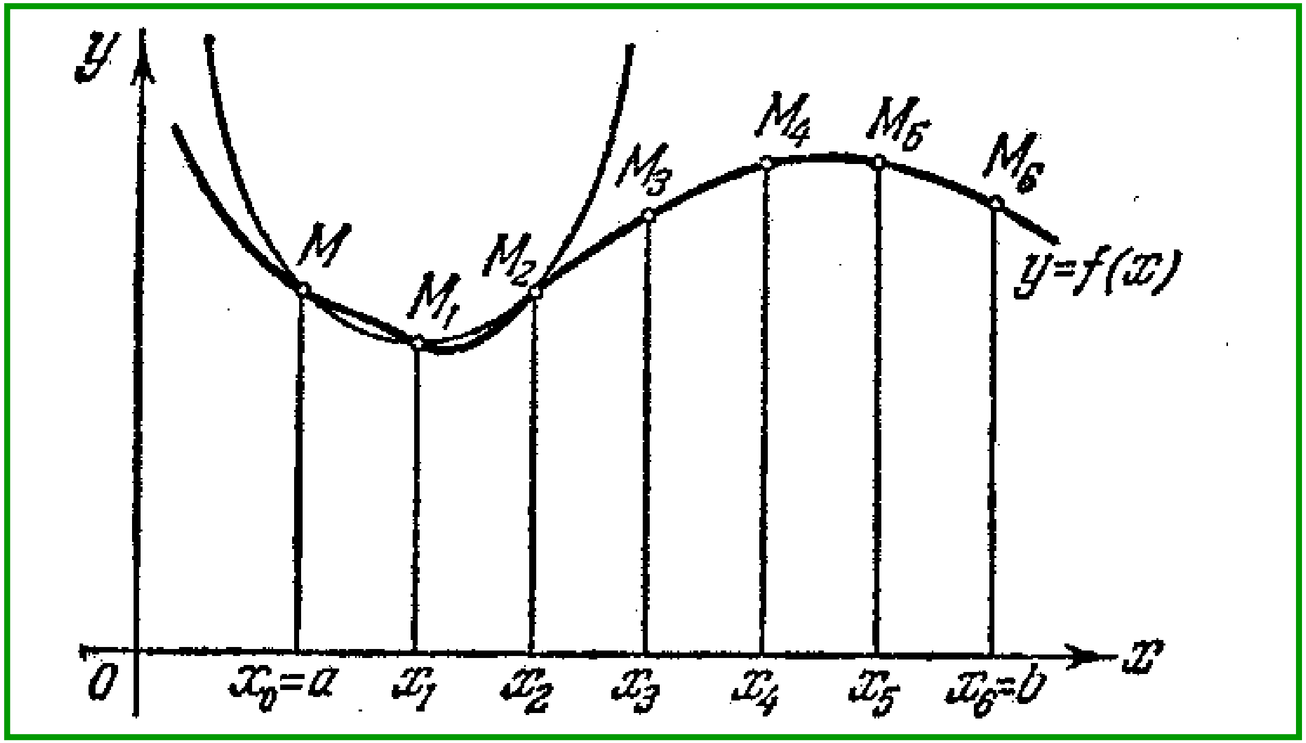
Разделим отрезок $[a, b]$ на четное число равных частей $n = 2m.$

Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и ограниченной заданной кривой

$$y = f(x),$$

заменим площадью такой криволинейной трапеции, которая ограничена параболой второй степени, проходящей через три точки:

$$M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$$

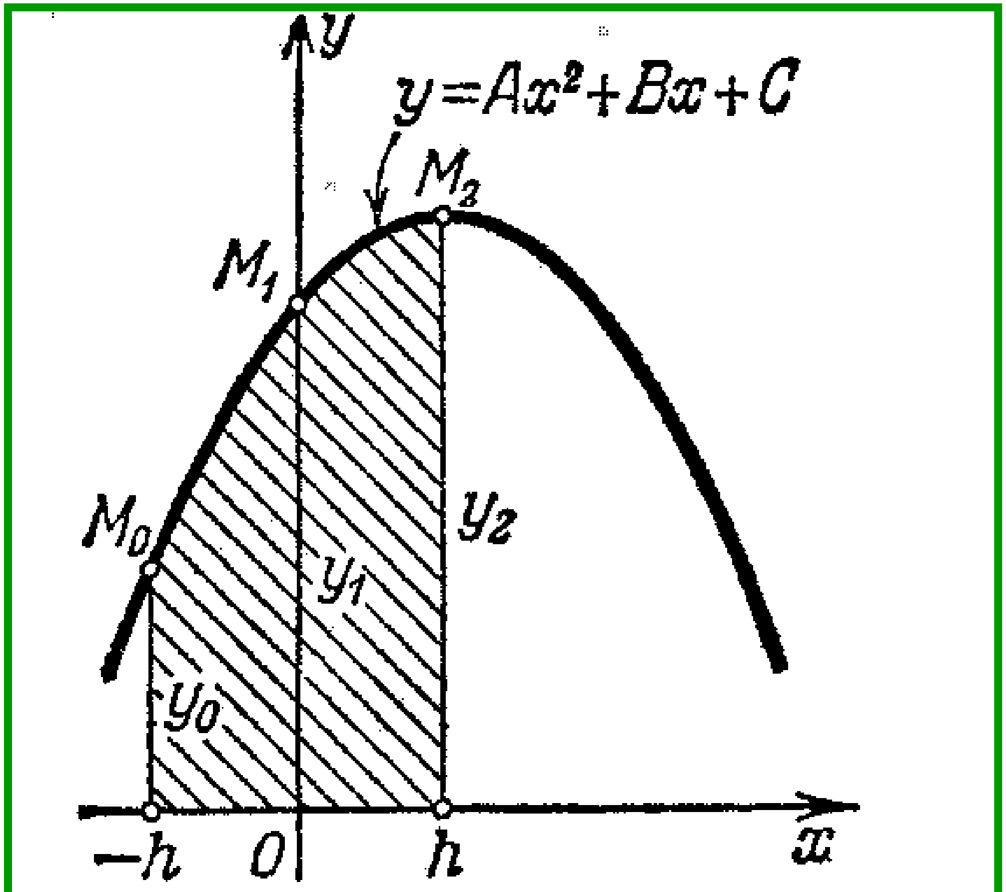


и имеющей ось, параллельную оси Oy.

Такую криволинейную трапецию, будем называть *параболической* трапецией.

Уравнение параболы с осью, параллельной оси Оу, имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$



Коэффициенты A,B,C однозначно определяются из условия, что парабола проходит через три заданные точки.

Аналогичные параболы строим и для других пар отрезков.

Сумма площадей параболических трапеций и даст приближенное значение интеграла.

Теорема. **Если криволинейная трапеция ограничена параболой**

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

осью Ох и двумя ординатами, расстояние между которыми равно *2h*, то ее площадь равна

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (7.4)$$

где y_0 **и** y_2 **- крайние ординаты, а** y_1 **- ордината кривой в середине отрезка.**

Пользуясь формулой (7.4) , мы можем написать следующие приближенные равенства

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Складывая левые и правые части, получим слева искомый интервал, справа его приближенное значение

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} +$$
$$+2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}))$$

Это и есть *формула Симпсона*.

Разность между левой и правой частью квадратурной формулы обозначим через $R_N(f)$

и будем называть остаточным членом квадратурной формулы.

Если функция имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка f', **то остаточный член формулы прямоугольников можно вычислить используя следующее выражение**

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_1(b-a)^2}{4n}$$

, где

$$M_1 = \max_{[a,b]} \left|f'(x)\right| \quad (7.6)$$

Для класса функций имеющих ограниченную вторую производную $\left|f''(x)\right| \le M_2$ **на** $[a,b]$,

имеет место оценка

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad (7.7)$$

верная для прямоугольников и трапеций.

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова.

Но если функция достаточно гладкая, то ошибки приближения по формуле Симпсона при больших *N* значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников.

Если функция $f(x)$ **имеет непрерывную вторую производную удовлетворяющую неравенству**

$|f''(x)| \le M_2,$ **а третью не имеет или мы не можем почему либо оценить, то ошибка приближения по формуле Симпсона**

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{81m^2}. \quad (7.8)$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную удовлетворяющую неравенству

$$\left| f^{(4)}(x) \right| \le M_4,$$

то в этом случае рекомендуется применять формулу Симпсона.

При этом ошибка приближения будет

$$\left| R_n(f) \right| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{2880 m^4}. \quad (7.9)$$

Если нахождение производной четвертого порядка затруднительно, то ошибку приближения по формуле Симпсона можно находить используя правило Рунге.

Выберем $n = 4k$, **т.е.** $n/2$ **- четное.**

Вычисляют приближенное значение интеграла J_k

по формуле Симпсона с шагом $h = \dfrac{b-a}{4k}$

и с удвоенным шагом $2h$ J_{2h}.

При этом ошибка приближения будет

$$\left|R_h(f)\right| \approx \frac{J_h - J_{2h}}{15} \quad (7.10)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$

Решение. **Данный интеграл не вычисляется в элементарных функциях.**

Вычислим этот интеграл приближенно, разделив отрезок $[0,1]$ на десять равных частей, используя различные квадратурные формулы.

Обозначим точки деления $[0,1]$ через

$$x_0 = 0, x_1 = 0.1, \ldots, x_{10} = 1.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

```
> restart;
> y:=(x)->sqrt(1+x^4):
> x0:=0; x1:=0.1; x2:=0.2; x3:=0.3; x4:=0.4;
x5:=0.5; x6:=0.6; x7:=0.7; x8:=0.8; x9:=0.9; x10:=1;
> y0:=y(x0); y1:=y(x1); y2:=y(x2); y3:=y(x3);
y4:=y(x4); y5:=y(x5); y6:=y(x6); y7:=y(x7);
y8:=y(x8); y9:=y(x9); y10:=y(x10);
```

Согласно квадратурной формуле трапеций (7.3)

```
> n:=10;a:=0;b:=1;
>Jtrap:=simplify((b-a)*((y0+y10)/2+
y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9)/n);
```

Погрешность формулы трапеций определим исходя из факта существования второй непрерывной производной.

```
> Y2:=diff(y(x),x$2);
> simplify(Y2);
```

Вычисляем значения второй производной в точках

$x_0, \ldots, x_{10}$ и находим наибольшее

```
>g:=subs(x=0,Y2);
```

```
>g1:=subs(x=0.1,Y2); g2:=subs(x=0.2,Y2);
g3:=subs(x=0.3,Y2); g4:=subs(x=0.4,Y2);
g5:=subs(x=0.5,Y2); g6:=subs(x=0.6,Y2);
g7:=subs(x=0.7,Y2); g8:=subs(x=0.8,Y2);
g9:=subs(x=0.9,Y2); g10:=subs(x=1,Y2);
```

Остаточный член формулы трапеций

$$\left|R_N(f)\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad (7.7)$$

```
>M2:=g10;
```

$$M2 := 2\sqrt{2}$$

```
> Rtrap:=M2*(b-a)^(3)/(12*n^2);
> evalf(Rtrap);
```

Поэтому

$$J = 1.0906 \pm 0.0024$$

По формуле Симпсона

```
>b:=1;a:=0;n:=10;m:=n/2;
```

```
> JSimp:=simplify((b-a)*
(y0+y10+2*(y2+y4+y6+y8)+
4*(y1+y3+y5+y7+y9))/(6*m));
```

$$JSimp := 1.089429384$$

Остаточный член можно определить учитывая, что

$f(x)$ **имеет непрерывную производную четвертого порядка**

```
>RS4:=diff(y(x),x$4);
> simplify(RS4);
```

$$RS4 = \frac{12(5x^8 - 14x^4 + 1)}{(1 + x^4)^{7/2}}$$

```
>R0:=subs(x=x0,RS4);R1:=subs(x=x1,RS4);
R2:=subs(x=x2,RS4);R3:=subs(x=x3,RS4);
R4:=subs(x=x4,RS4);R5:=subs(x=x5,RS4);
R6:=subs(x=x6,RS4);
R7:=subs(x=x7,RS4);R8:=subs(x=x8,RS4);
R9:=subs(x=x9,RS4);R10:=subs(x=x10,RS4);
> M4:=abs(R8);
```

$$M4 := 14.05766554$$

```
> RSIMP:=M4/(2880*m^4);
```

$$RSIMP := 0.7809814188\ 10^{-5}$$

Таким образом $J = 1.08949 \pm 0.00001$

Для вычисления неопределенных и определенных интегралов Maple предоставляет следующие функции:

>int(f,x); int(f,x=a..b);

>Int(f,x); Int(f,x=a..b).

Здесь *f*-подынтегральная функция, *x*-переменная, по которой выполняются вычисления,

***a* и *b* – нижний и верхний пределы интегрирования. Команда Int выдает на экран интеграл в виде математической формулы.**

7.4 Метод Монте-Карло.

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем:

требуется найти значение a **некоторой изучаемой величины.**

Для этого выбирают такую случайную величину X, **математическое ожидание которой равно** a

$$M(X)=a.$$

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$ **и принимают** $\bar{x}$

в качестве оценки (приближённого значения) a^*

искомого числа a

$$a \approx a^* = \bar{x}$$

Поскольку метод Монте-Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют методом статистических испытаний.

Требуется найти оценку J_1^*

определённого интеграла

$$J = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Рассмотрим случайную величину *X*, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a,b)

с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при a} < x \le b \\ 0 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x)dx=(b-a)\cdot M[\varphi(x)]$$

Заменив математическое ожидание $M[\varphi(x)]$

его оценкой – выборочной средней, получим оценку

J_1^* **искомого интеграла**

$$J_1^* = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n} \quad (7.11)$$

где ***n*** **– число испытаний;** x_i **-возможные значения случайной величины** ***X*****, распределённой равномерно в интервале интегрирования** (a,b).

Для того, что бы найти x_i **воспользуемся следующим правилом.**

Правило: Для того чтобы найти возможное значение x_i непрерывной случайной величины *X*, ее плотность вероятности $f(x)$,

надо выбрать случайное число r_i

и решить относительно x_i уравнение

$$\int_a^{x_i} f(x)dx = r_i,$$

где *a* – наименьшее конечное возможное значение *X*.

Действительно, для равномерно распределенной величины

$$\int_a^{x_i} \frac{1}{b-a} dx = r_i.$$

Или $$\frac{x_i - a}{b - a} = r_i.$$

Решая полученное уравнение относительно x_i,

получим $$x_i = a + (b - a) r_i,$$

где r_i **-случайное число.**

Задача. Найти оценку определенного интеграла

$$J = \int_1^3 (x+1)\,dx$$

Решение.

Используем формулу

$$J_1^* = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)}{n}$$

По условию $a = 1, b = 3,$ $\varphi(x) = x + 1$

Пусть для простоты вычислений $n = 10.$

$$J_1^* = (3-1)\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10} = 2\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10}$$

где возможные значения x_i

можно найти по формуле $x_i = a + (b-a)r_i = 1 + 2r_i$

Равномерно распределенные случайные числа можно взять из таблицы Приложения 9 (В.Е.Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика», М. «Высшая школа»,1977).

Вычисления для десяти значений приведены в таблице

Номер i	r_i	$x_i = 1 + 2r_i$	$\varphi(x_i) = x_i + 1$
1	0.100	1.200	2.200
2	0.973	2.946	3.946
3	0.253	1.506	2.506
4	0.376	1.752	2.752
5	0.520	2.040	3.040
6	0.135	1.270	2.270
7	0.863	2.726	3.726
8	0.467	1.934	2.934
9	0.354	1.708	2.708
10	0.876	2.752	3.752

Из таблицы находим $\sum \varphi(x_i) = 29.834$

Искомая оценка $J_1^* = 5.967$

Найдем абсолютную погрешность. Поскольку

$$J = \int_1^3 (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_1^3 = 8 - 2 = 6$$ **, то**

$$\left| J - J_1^* \right| = 6 - 5.967 = 0.033.$$