Министерство образования Республики Беларусь
УО «Витебский государственный технологический университет»

Жозе́ф Луи́ Лагра́нж

Тема 2 «Производная функции.»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

2.1 Производная функции ее геометрический и механический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ определенна в некотором промежутке.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное) приращение Δx

Тогда функция y получит некоторое приращение Δy :

при значении аргумента x будем иметь $y = f(x)$,

при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Найдем приращение функции Δy

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0.$

Если этот предел существует,то его называют производной данной функции и обозначают $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Определение: Производной данной функции $y = f(x)$

по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента $\Delta x,$ если приращение аргумента стремится к нулю.

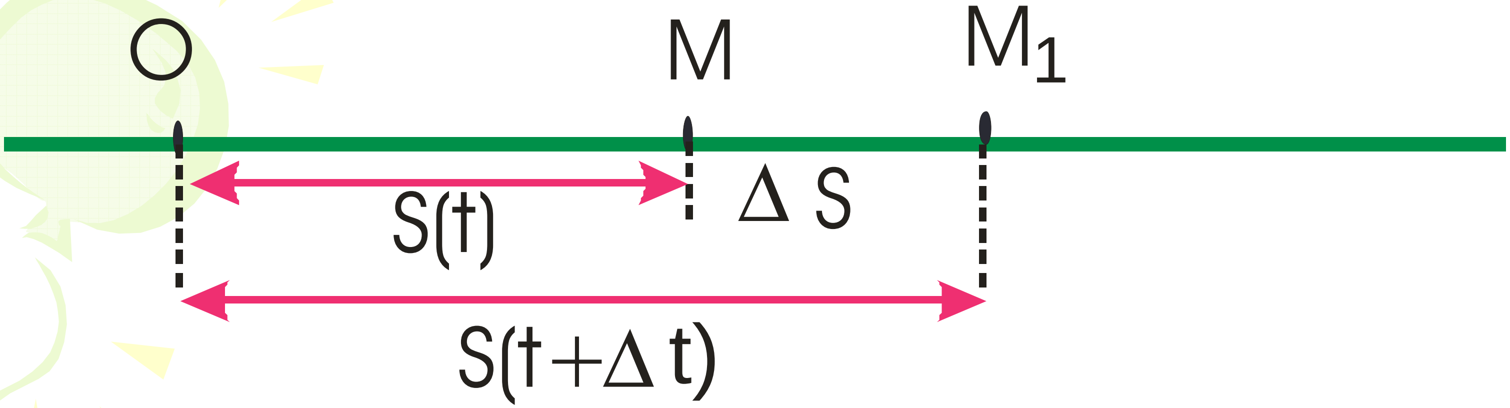
Для производной употребляются и другие обозначения

$$y', y'_x, \frac{dy}{dx}$$

Дадим ***механический смысл производной.***

Пусть материальная точка М движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени ***t*** соответствует определенное расстояние ***OM=S*** до некоторой фиксированной точки ***O.*** Это расстояние зависит от истекшего времени ***t***, т.е. ***S=S(t).*** Это равенство называют **законом движения точки.**

Требуется найти скорость движения.



Если в некоторый момент времени *t* точка занимает положение *М*, а в момент времени $t+\Delta t$ **займет положение** M_1, **где** $OM_1 = S + \Delta S$,

Δt **-приращение времени,** ΔS **-приращение расстояния, то**

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ **выражает средню скорость движения точки за время** Δt

$$\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени

$$\Delta t$$

называется скоростью движения точки в данный момент времени или мгновенной скоростью

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Это равенство можно записать в виде

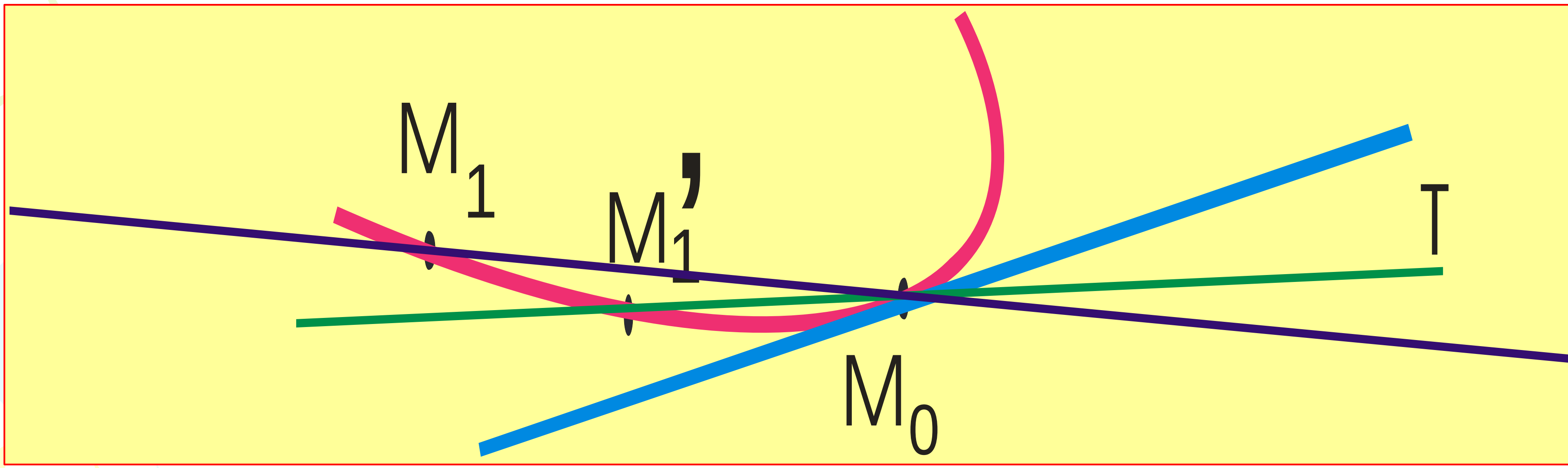
$$V = S'_t$$

Механический смысл производной: ***скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути по времени.***

Рассмотрим геометрическое толкование производной.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0.

Возьмем на кривой точку M_1 **и проведем секущую** M_0M_1



Если точка M_1 **неограниченно приближается к точке** M_0,

то секущая M_0M_1 **занимает различные положения**

M_0M_1', M_0M_1'', ...и т.д.

Если при неограниченном приближении точки M_1 по кривой к точке M_0, с любой стороны, секущая стремиться занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется **касательной к точке** M_0.

Пусть задана функция $y = f(x)$.

Возьмем точку $M_0(x, y)$.

Дадим аргументу *x* приращение Δx.

Новому значению аргумента $x + \Delta x$

соответствует значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

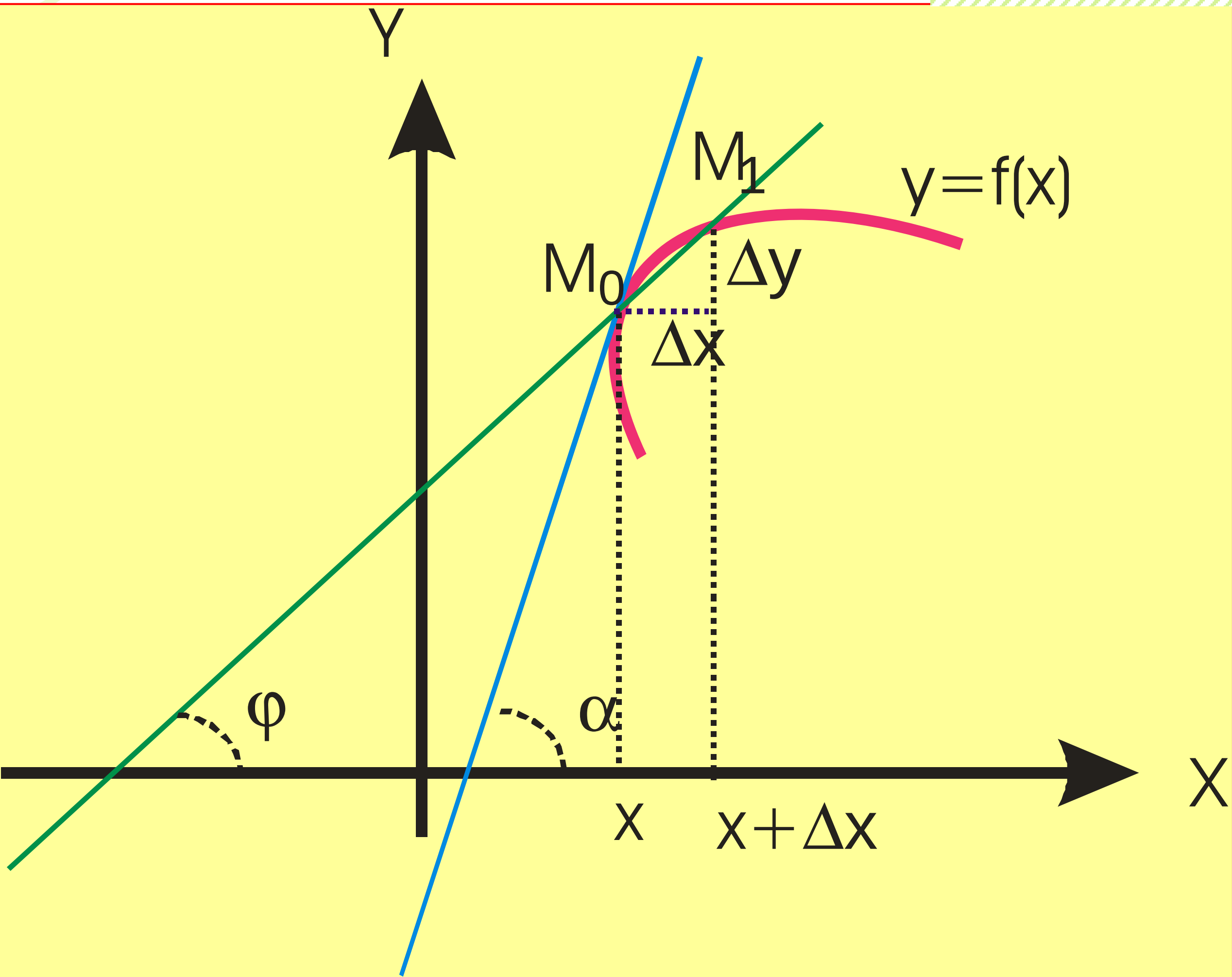
Соответствующей ему точкой кривой будет точка

$$M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Проведем секущую M_0M_1 и обозначим через угол φ,

угол образованный секущей с положительным направлением оси *Ox.* Из рисунка видно, что

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Если $\Delta x \to 0,$ **то точка** M_1 **будет перемещаться вдоль кривой приближаясь к точке** M_0

Секущая M_0M_1 **будет поварачиваться вокруг точки** M_0

и угол φ **при** $\Delta x \to 0$ **будет стремиться к некоторому пределу** α.

Прямая проходящая через точку M_0 **и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой касательной. Ее угловой коэффициент**

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Следовательно

$$tg\alpha = f'(x)$$

т.е. значение производной $f'(x)$ **при данном значении аргумента** ***x*** **равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси** ***Ox*** **касательной к графику функции** $f(x)$ **в соответствующей точке** $M_0(x, y)$.

Пример: **Найти тангенсы углов наклона касательной к кривой** $y = x^2$ **в точках** $M_1(1/2, 1/4), M_2(-1, 1).$

Решение:

$$tg\alpha_1 = y'_{|x=1/2} = 2x\Big|_{x=1/2} = 1,$$

$$tg\alpha_2 = y'_{|x=-1} = 2x\Big|_{x=-1} = -2.$$

2.2 Основные правила дифференцирования.

Теорема 1: **Если функция** $y = f(x)$ **дифференцируема в точке** $x = x_0$, **то она будет и непрерывна в этой точке.**

Доказательство:

Т.к. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, **то согласно теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции, можно записать:**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ **бесконечно малая функция, т.е.**

$$\lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$$

Тогда $$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

(**функция называется непрерывной, если** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$**).**

Переходя к пределу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x)\Delta x =$$

$$= f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Мы получили $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$ **т.е. функция непрерывна в точке** x_0.

что и требовалось доказать.

Теорема 2:

Производная постоянной равна нулю, т.е. *y=c*, где *c=const*:

$$y' = c' = 0$$

Доказательство:

Запись *y=c* означает, что если мы меняем значение *x*, то значение функции остаётся неизменной:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3: Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. если

$$y = c \cdot u(x),$$

где *c=const:*

$$y' = c \cdot u'(x)$$

Доказательство:

Запишем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = cu'(x)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4: Производная суммы (разности) двух и более функций равна сумме (разности) производных, т.е.

$$(u(x) \pm \upsilon(x))' = u'(x) \pm \upsilon'(x)$$

Доказательство:

Для определённости будем брать знак “+”. Пусть

$$y = u(x) + \upsilon(x).$$

$$y' = (u(x) + \upsilon(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + \upsilon(x+\Delta x) - (u(x) + \upsilon(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\upsilon(x+\Delta x) - \upsilon(x)}{\Delta x} = u'(x) + \upsilon'(x)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5:

Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго сомножителя:

$$(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'.$$

Доказательство:

Пусть $y = u(x) \cdot \upsilon(x).$ **Тогда** $y' = (u(x) \cdot \upsilon(x))' =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot \upsilon(x+\Delta x) - u(x) \cdot \upsilon(x)}{\Delta x},$$

Так как $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x),$ **то**

$$u(x+\Delta x) = \Delta u + u(x)$$ **и**

$$\upsilon(x+\Delta x) = \Delta \upsilon + \upsilon(x)$$

С учетом последнего, можно записать

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u + u(x))(\Delta \upsilon + \upsilon(x)) - u(x)\upsilon(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta \upsilon + u(x)\Delta \upsilon + \upsilon(x)\Delta u + u(x)\upsilon(x) - u(x)\upsilon(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \upsilon(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)\upsilon(x) + u(x)\upsilon'(x).$$

При выводе учитывалось, что функции $u(x)$ **и** $\upsilon(x)$, **являются дифференцируемыми, а тогда согласно первой теореме они непрерывны и если функция** $u(x)$

непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0, \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta \upsilon = 0.$

что и требовалось доказать.

Теорема 6: Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$

при условии, что знаменатель не обращается в нуль, определяется по формуле:

$$\left(\frac{u(x)}{\upsilon(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot\upsilon(x) - u(x)\cdot\upsilon'(x)}{\upsilon^2(x)}$$

2.3 Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, **а** $u = \varphi(x)$, **тогда** $y = f(\varphi(x))$

называется сложной функцией с промежуточным аргументом *u* и независимым аргументом х.

Теорема: Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке *x*, т.е. u'_x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке *x*, которая определяется по формуле

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

(т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу *u* на производную промежуточного аргумента по *x*).

2.4 Таблица производных основных элементарных функций

$$1.\ (u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} u'$$

$$2.\ (a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$$

$$3.\ (e^{u})' = e^{u} \cdot u'$$

$$4.\ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5.\ (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$$

$$6.\ (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7.\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8.\ (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$9.\ (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

12. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}u'$

11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

Пример 1. **Найти производную функции** $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1.$

Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - 3(x^3)' + 2(x)' - (1)' =$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + 2$$

Пример 2.

Найти производную функции $y = \dfrac{2x^3}{tgx}$

Решение:

Для решения воспользуемся теоремой 6.

$$y' = 2\frac{(x^3)'tgx - x^3(tgx)'}{(tgx)^2} = 2\frac{3x^2tgx - x^3\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(tgx)^2}.$$

Пример 3.

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Решение:

$$y' = \left(\sin(3x-5)\right)' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = 3\cos(3x-5)$$

Пример 4.

Найти производную функции $y = (3-2x)^5$

Решение:

Так как $y = u^5, u = 3-2x,$ **то**

$$y' = 5(3-2x)^4 \cdot (3-2x)' =$$

$$= 5(3-2x)^4 \cdot (-2) = -10(3-2x)^4.$$

2.5 Дифференцирование неявных и параметрических заданных функций

Если функция задана уравнением $y = f(x)$ **разрешенным относительно y, то говорят, что функция** **задана в явном виде.**

Если функция задана в виде $F(x, y) = 0,$

т.е. уравнение не разрешено относительно *y*, то говорят о **неявном задании функции.**

Всякую явно заданную функцию можно задать в неявном виде, т.е.

$$y - f(x) = 0.$$

Если функция задана неявно, то не всегда возможно или легко задать её в явном виде.

Пример: $x + y + \cos y + 5 = 0$

Если функция задана неявно, то для нахождения производной $y'(x)$ совсем не обязательно решать уравнение относительно y, достаточно продифференцировать это уравнение по *x*, при этом необходимо помнить, что *y* является функцией *x*: $y = y(x)$

и полученное уравнение решить относительно $y'.$

Пример:

Найти производную функции *y*, заданную уравнением:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

Решение:

Дифференцируем равенство по *x*

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3(y + xy') = 0$$

$$3x^2 - 3y + y'(3y^2 - 3x) = 0$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Теорема: Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке у, имеет производную $\varphi'(y)$ отличную от нуля, то в соответствующей точке *x* функция $y = f(x)$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Пусть функция задана параметрически в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

где *t*-вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (2.2) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}$$

Функцию $y = f(x),$ определяемую параметрически

уравнениями можно рассматривать как сложную функцию

$$y = y(t), t = \varphi(x)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_t t'_x,$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (2.3)$$

Пример: **Найти** y', **если** $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

Решение:

Находим $\begin{cases} x'_t = \cos 2t \cdot (2t)' = 2\cos 2t \\ y'_t = 2\cos t \cdot (\cos t)' = -2\cos t \sin t \end{cases}$

Учитывая (2.3) получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\cos t \sin t}{2\cos 2t} = -\frac{\sin 2t}{2\cos 2t} = -\frac{1}{2} tg 2t.$$

2.6 Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной удобно вначале функцию прологарифмировать, а уже потом продифференцировать, такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

Существуют функции, производные которых можно найти только логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция

$$y = u^{\upsilon}, \quad u = u(x), \quad \upsilon = \upsilon(x).$$

Прологарифмируем данную функцию

$$\ln y = \ln u^{\upsilon} = \upsilon \ln u$$

Теперь выполним дифференцирование

$$(\ln y)' = \upsilon' \ln u + \upsilon \frac{1}{u} u'$$

$$\frac{1}{y} y' = \upsilon' \ln u + \upsilon \frac{1}{u} u'$$

Выразим y'

$$y' = y\left(\upsilon' \ln u + \upsilon \frac{1}{u} u'\right),$$ **или** $$y' = u^{\upsilon}\left(\upsilon' \ln u + \upsilon \frac{1}{u} u'\right)$$

Таким образом $$(u^{\upsilon})' = u^{\upsilon} \ln u \cdot \upsilon' + \upsilon u^{\upsilon-1} u'$$

Производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии, что *u=const*, и производной степенной функции при условии, что

υ ***=const.***

Пример: **Найти производную функции** $y = (\sin x)^{x^2}$

Решение: **Логарифмируя данную функцию, получаем**

$$\ln y = x^2 \cdot \ln \sin x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по *x*

$$y = u'(x) \cdot \upsilon(x) + u(x) \cdot \upsilon'(x).$$

$$(\ln y)' = (x^2)' \ln \sin x + x^2 (\ln \sin x)'$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{(\sin x)'}{\sin x}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Далее

$$y' = y(2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}).$$

Окончательно имеем:

$$y' = (\sin x)^{x^2} (2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x})$$

2.7 Производные высших порядков

Дана функция $y = f(x)$. **Производная** $y' = f'(x)$ **является также функцией от** x **и называется производной первого порядка.**

Производная от производной первого порядка, называется производной второго порядка и обозначается

$$(y')' = y''$$ (или $$f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \frac{dy'}{dx}).$$

Производную от производной второго порядка, если она существует называется производной третьего порядка и обозначается

$$(y'')' = y'''$$

Производную от производной *(n-1)* порядка, называют производной n*-ого* порядка

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

Производные порядка выше первого, называются производными высших порядков.

Начиная с производной четвёртого порядка, производные обозначаются римскими цифрами или числами в скобках.

Производная пятого порядка $y^{V}, y^{(5)}$

Пример: **Найти четвертую производную функции**

$$y = x^7 + x^5 + x^3 - x + \cos x$$

Решение:

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы функций, последовательно получаем

$$y' = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 1 - \sin x,$$

$$y'' = 42x^5 + 20x^3 + 6x - \cos x,$$

$$y''' = 210x^4 + 60x^2 + 6 + \sin x$$

$$y^{(4)} = 840x^3 + 120x + \cos x$$

Рассмотрим ***механический смысл производной второго порядка***.

Пусть материальная точка *М,* движется прямолинейно по закону

$$S = f(t)$$

Согласно механическому смыслу первой производной, скорость в данный момент времени равна производной от пути по времени

$$V = S_t'.$$

Пусть в некоторый момент времени t, скорость точки равна $V(t)$

а в момент времени $t + \Delta t$ **-** $V(t + \Delta t)$**, т.е. за время**

$\Delta t,$ **скорость получит приращение равное**

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$$

Известно, что $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ определяет среднее ускорение.

Перейдём к пределу при $\Delta t \to 0,$

мы получим ускорение в данный момент времени, т.е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Учитывая определение производной можно записать

$$a = V_t' = (S_t')_t' = S_t'',$$

таким образом **ускорение** - это первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно $F(x, y) = 0.$

Продифференцировав это уравнение по *x* и разрешив полученное уравнение относительно $y',$

найдем производную первого порядка.

Продифференцировав по *x* первую производную, получим вторую производную от неявной функции.

В нее войдут $x, y, y'.$

Подставив уже найденное значение y'

в выражение второй производной, выразим

y'' через *x и y.*

Аналогично поступим для нахождения производной третьего порядка.

Пример:

Найти вторую производную функции *y*, заданную уравнением:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Решение:

Первую производную мы нашли в вопросе 2.5 $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}.$

Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(y - x^2)'(y^2 - x) - (y - x^2)(y^2 - x)'}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}.$$

Далее подставим значение y' **и выполним преобразования.**

$$y'' = \frac{\left(\dfrac{y-x^2}{y^2-x} - 2x\right)\left(y^2-x\right) - (y-x^2)\left(2y\dfrac{y-x^2}{y^2-x} - 1\right)}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{y-x^2-2xy^2+2x^2}{y^2-x}\right)\left(y^2-x\right) - (y-x^2)\left(\dfrac{2y(y-x^2)-y^2+x}{y^2-x}\right)}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{y-2xy^2+x^2}{(y^2-x)^2} - \frac{(y-x^2)\left(\dfrac{2y^2-2yx^2-y^2+x}{y^2-x}\right)}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{y - 2xy^2 + x^2}{(y^2 - x)^2} - \frac{(y - x^2)(y^2 - 2yx^2 + x)}{(y^2 - x)^3}.$$

Пусть функция задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Первая производная находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Найдем вторую производную

$$y_{xx}'' = (y_x')_x' = (y_x')_t' \cdot t_x',$$ **т.к.** $$t_x' = \frac{1}{x_t'}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = (y''_x)'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Пример:

Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt.$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-ctgt)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$