Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема9. «Дифференциальные уравнения»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

9.1 Определения. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1: **Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, искомую функцию** $y = f(x)$

и её производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Если искомая функция $y = f(x)$,

есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***.

Определение 2: Порядком дифференциального уравнения, называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Пример:

$$y''' - 3y'' - 2y = 0$$

- будет дифференциальным уравнением третьего порядка.

Определение 3: **Решением или интегралом дифференциального уравнения называется функция** $y = f(x)$, **которая будучи подставлена в дифференциальное уравнение превращает его в тождество.**

Определение 4: **Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида**

$$F(x, y, y') = 0$$

Если это уравнение можно решить относительно первой производной, то его можно записать в виде:

$$y' = f(x, y)$$

Определение 5: **Общим решением дифференциального уравнения первого порядка, называется функция**

$$y = \varphi(x, c),$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

1)Функция удовлетворяет дифференцируемому уравнению при любом конкретном значении постоянного ***c*****,**

2)Каково бы не было начальное условие

$$x = x_0, y = y_0,$$

всегда можно найти такое значение $c = c_0,$ **что функция**

$$y = \varphi(x, c_0)$$

удовлетворяет данному начальному условию.

Функция $y = \varphi(x, c_0)$ **называется частным решением дифференциального уравнения.**

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т.е. $\phi(x, y, c) = 0,$

то такое решение называется ***общим интегралом дифференциального уравнения.***

Решение $\phi(x, y, c_0) = 0$ **называется частным интегралом дифференциального уравнения.**

Теорема ***(о существовании и единственности решения дифференциального уравнения):***

Если в уравнении $y' = f(x, y)$

функция и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

непрерывны в некоторой области D на плоскости Оху, содержащей некоторую точку (x_0, y_0)

то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$

удовлетворяющее условию: при $x = x_0, y = y_0$

9.2 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка, является уравнение вида:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (9.1)$$

В этом уравнении одно слагаемое зависит только от *x*, а другое от *y*. Уравнение вида (9.1) называется *уравнением с разделенными переменными.* Проинтегрировав это уравнение получим:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$$

Пример:

Найти общий интеграл уравнения: $xdx + ydy = 0.$

Решение

Данное уравнение есть уравнение с разделенными переменными

$$\int xdx + \int ydy = c, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c,$$

$$x^2 + y^2 = 2c,$$

$$2c = C_1^2,$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = C_1^2.}$$

Это уравнение семейства концентрических окружностей, с центром в начале координат и радиусом C_1

Уравнение вида:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (9.2)$$

называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

Уравнение (9.2) легко сводится к уравнению (9.1) путем по членного деления на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0.$

Получаем
$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Далее решение сводится к интегрированию левой и правой части:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = c$$

Пример:

Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

Решение:

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$dy = -\frac{y}{x}dx, \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + c,$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c_1, \qquad \ln|y| = \ln\left|\frac{c_1}{x}\right|,$$

$$|y| = \left|\frac{c_1}{x}\right|.$$

Примечание: **Уравнение** $y' = f_1(x) f_2(y)$ **также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить**

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \qquad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx,$$

получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + c.$$

9.3 Однородные дифференциальные уравнения

Определение 1. Функция $f(x, y)$,

называется однородной функцией *n-ого* измерения относительно переменных *x* и *y*, если при любом λ **справедливо тождество**

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \qquad (9.3)$$

Пример: **Функция** $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

- однородная функция первого измерения, т. к.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} =$$

$$= \sqrt[3]{\lambda^3 (x^3 + y^3)} = \lambda f(x, y).$$

Определение 2. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (9.4)$$

называется однородным относительно *x* и *y*, если функция

$$f(x, y)$$

есть однородная функция нулевого измерения.

Однородное уравнение решают при помощи подстановки

$$\boxed{\frac{y}{x} = u, \qquad y = xu}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}, \qquad f(x, y) = u + \frac{xdu}{dx},$$

$$f(x, xu) = u + \frac{xdu}{dx}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Найдя его общее решение необходимо заменить ***u*** **на**

$$\frac{y}{x}.$$

Пример: Найти общий интеграл уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2},$$

Решение

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Проверяем, является ли данная функция однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} = \lambda^0 f(x, y)$$

Является, значит мы имеем дело с однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Делаем замену $\dfrac{y}{x} = u, y = xu,$

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}.$$

Т.к. по условию

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}, \qquad u + \frac{xdu}{dx} = \frac{x \cdot xu}{x^2 - x^2u^2},$$

$$u + \frac{xdu}{dx} = \frac{u}{1-u^2}, \qquad \frac{xdu}{dx} = \frac{u}{1-u^2} - u,$$

$$\frac{xdu}{dx} = \frac{u - u + u^3}{1 - u^2}, \qquad \frac{xdu}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2},$$

$$xdu = \frac{u^3}{1 - u^2} dx, \qquad \frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{dx}{x} + c,$$

$$\int u^{-3} du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + c,$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln c_1,$$

$$\frac{1}{-2u^2} = \ln|c_1 x u|,$$

$$\boxed{\frac{x^2}{-2y^2} = \ln|c_1 y|.}$$

9.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение: **Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.**

Линейное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = g(x), \qquad (9.5)$$

где $p(x), g(x)$ **заданные функции, в частности постоянные.**

а)Метод Бернулли.

Решение уравнения (9.5) будем искать в виде произведения двух других функций, т.е. с помощью подстановки

$$y = u(x)\cdot\upsilon(x),$$

где

$$u = u(x), \upsilon = \upsilon(x).$$

Тогда

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon'$$

Подставляем y' **и** y **в (9.5), получаем**

$$u'\upsilon + u\upsilon' + p(x)u\upsilon = g(x),$$

$$u'\upsilon + u(\upsilon' + \upsilon p(x)) = g(x), \qquad (9.6)$$

Подберем функцию $\upsilon = \upsilon(x)$ **так, чтобы выражение в скобках было равно нулю**

$$\upsilon' + \upsilon p(x) = 0,$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon p(x) = 0, \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -p(x)dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int p(x)dx + \ln c$$

Положим *c=1*

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int p(x)dx, \qquad \ln \upsilon = -\int p(x)dx.$$

Отсюда

$$\upsilon = e^{-\int p(x)dx} \qquad (9.7)$$

Подставляя (9.7) в (9.6) получаем

$$u' e^{-\int p(x)dx} = g(x), \qquad \frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

$$du = g(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$\int du = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

$$u = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c. \quad (9.8)$$

Возвращаясь к переменной *y*, получаем решение

$$y = u \cdot \upsilon = (\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c) \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (9.9)$$

Пример: **Проинтегрировать уравнение**

$$y' + 2xy = 2x.$$

Решение

Полагаем $y = u \cdot \upsilon$

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon'$$

Подставим y' **и** y **в уравнение**

$$u'\upsilon + u\upsilon' + 2xu\upsilon = 2x$$

$$u'\upsilon + u(\upsilon' + 2x\upsilon) = 2x, \qquad (9.10)$$

Приравняем скобку к нулю

$$\upsilon' + 2x\upsilon = 0$$

Решаем полученное уравнение

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -2x\upsilon, \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2xdx, \qquad \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2\int xdx,$$

$$\ln\upsilon = -2\frac{x^2}{2}, \qquad \ln\upsilon = -x^2,$$

$$\upsilon = e^{-x^2} \qquad (9.11)$$

Подставим (9.11) в (9.10)

$$u'e^{-x^2} = 2x, \qquad \frac{du}{dx}e^{-x^2} = 2x,$$

$$du = 2xe^{x^2}dx, \qquad \int du = 2\int xe^{x^2}dx + c,$$

$$u = 2\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 + c, \qquad u = e^{x^2} + c,$$

$$y = uv = (e^{x^2} + c)e^{-x^2} = 1 + ce^{-x^2}. \quad (9.12)$$

б)Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Пусть дано линейное уравнение вида (9.5)

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части

$$y' + p(x)y = 0.$$

Оно называется ***линейным однородным уравнением.***

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y, \qquad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln|c|, \qquad \ln|y| - \ln|c| = -\int p(x)dx,$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)dx, \quad \frac{y}{c} = \pm e^{-\int p(x)dx}, \quad y = \pm c e^{-\int p(x)dx}$$

Пусть $C = \pm c,$ **тогда**

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что произвольную постоянную в полученном уравнении заменяют функцией *C(x)*. Решение уравнения (9.5) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (9.13)$$

Находим производную

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-\int p(x)dx\right)'$$

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (9.14)$$

Подставим (9.13) и (9.14) в (9.5)

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$$

Второе и третье слагаемые уничтожаются, и уравнение примет вид

$$\boxed{C'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)}$$

Следовательно

$$\frac{dC(x)}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx}, \quad dC(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Интегрируя, находим $\int dC(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1,$

$$C(x) = \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + c_1$$

Подставляя выражение *C(x)* в равенство (9.13) получим общее решение уравнения

$$y = C(x) e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= \left(\int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + c_1\right) e^{-\int p(x)dx} \qquad (9.15)$$

Сравнивая формулы (9.15) и (9.9)видим, что оба метода дают действительно одинаковый результат.

Пример: **Решить уравнение** $y' + 2xy = 2x$ **методом Лагранжа.**

Решение. **Решаем однородное уравнение**

$$y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy, \qquad \frac{dy}{y} = -2xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln c, \qquad \ln|y| = -2\frac{x^2}{2} + \ln|c|,$$

$$\ln|y| - \ln|c| = -x^2, \qquad \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2,$$

$$y = ce^{-x^2}$$

Заменяем $c = c(x)$ **и ищем решение исходного уравнения.**

$$y = c(x)e^{-x^2}, \qquad (9.16)$$

$$y' = c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x)$$

Подставляем y **и** y' **в уравнение**

$$c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = 2x,$$

$$c'(x)e^{-x^2} = 2x, \qquad \frac{dc(x)}{dx}e^{-x^2} = 2x,$$

$$dc(x) = 2xe^{x^2}dx, \quad \int dc(x) = \int 2xe^{x^2}dx + c_1,$$

$$c(x) = e^{x^2} + c_1.$$

Подставим *c(x)* в (9.16)

$$y = (e^{x^2} + c)e^{-x^2} = 1 + ce^{-x^2}.$$

9.5 Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)y^n$, (9.17)

где $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$

называется **уравнением Бернулли.**

Покажем, что его можно свести к линейному.

Разделим уравнение (9.17) на y^n, **получим**

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = g(x) \quad (9.18)$$

Обозначим $y^{-n+1} = z,$ **тогда**

$$z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y',$$

$$y^{-n}y' = \frac{1}{-n+1}z'$$

Уравнение (9.18) принимает вид

$$\frac{1}{-n+1}z' + p(x)z = g(x)$$

Последнее уравнение является линейным относительно *z*. Его решение хорошо известно.

9.6 Дифференциальные уравнения высших порядков(основные понятия)

Дифференциальные уравнения порядка выше первого, называются дифференциальными уравнениями высшего порядка.

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случаи записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (9.20)$$

или

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (9.21)$$

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка, называется функция

$$y = \varphi(x, c_1, c_2),$$

где c_1, c_2 **произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:**

1. Функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ **является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения** c_1 **и** c_2,

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

существуют единственные значения постоянных

$c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0,$ **такие что** функция $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$

является решением уравнения (9.21) и удовлетворяет начальным условиям.

Функция $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ называется частным решением уравнения.

Решения записанные в виде $\phi(x_1, y_1, c_1, c_2) = 0,$

$$\phi(x_1, y_1, c_1^0, c_2^0) = 0,$$

называются общим и частным интегралом соответственно.

Аналогичные понятия и определения имеют место для дифференциального уравнения n-порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ, удовлетворяющего начальным условиям называется задачей Коши.

9.7 Уравнения допускающие понижение порядка

1. Пусть данное уравнение вида

$$y'' = f(x) \qquad (9.22)$$

Т.к $$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx},$$

то уравнение (22) можно записать в виде

$$\boxed{\frac{dy'}{dx} = f(x)}$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$dy' = f(x)dx, \qquad \int dy' = \int f(x)dx + c_1,$$

$$y' = \varphi_1(x) + c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + c_1, \qquad dy = (\varphi_1(x) + c_1)dx.$$

Интегрируя получим

$$\int dy = \int (\varphi_1(x) + c_1)dx + c_2,$$

$$y = \int \varphi_1(x)dx + \int c_1 dx + c_2 = \int \varphi_1(x)dx + c_1 x + c_2.$$

Пример: **Найти общее решение ДУ**

$$y^{\mathrm{IV}} = \sin 2x.$$

Решение

$$\frac{dy'''}{dx} = \sin 2x, \qquad dy''' = \sin 2x dx,$$

$$\int dy''' = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) + c_1,$$

$$y''' = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$\frac{dy''}{dx} = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1, \qquad dy'' = (-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1)dx,$$

$$\int dy'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) + \int c_1 dx + c_2,$$

$$y'' = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

$$dy' = (-\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2)dx,$$

$$\int dy' = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) + c_1\int x dx + c_2\int dx + c_3$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$dy = \left(\frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)dx,$$

$$\int dy = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) + c_1\frac{1}{2}\int x^2 dx + c_2\int x dx + c_3\int dx + c_4,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

2. Пусть дано уравнение вида:

$$y'' = f(x, y') \qquad (9.23)$$

Т.е. оно не содержит явно искомую функцию *y*. В этом случаи используется подстановка:

$$y' = p, \qquad p = p(x)$$

$$y'' = p'.$$

Уравнение (9.23) принимает вид

$$p' = f(x, p)$$

Это уравнение первого порядка. Проинтегрировав уравнение, получим

$p = \varphi(x, c_1)$. **Заменяя функцию *p* на** y'

получаем $y' = \varphi(x, c_1)$.

Для отыскания *y* достаточно проинтегрировать последнее уравнение.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1), \qquad dy = \varphi(x, c_1)dx,$$

$$\int dy = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2,$$

$$y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2,$$

Частным случаем уравнения (9.23) является уравнение вида

$$y'' = f(y') \qquad (9.4)$$

Оно решается при помощи такой же подстановки:

$$y' = p, \qquad p = p(x), \; y'' = p'$$

Получаем уравнение $$p' = f(p)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример: **Решить уравнение** $$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

Решение

Уравнение не содержит *y*, поэтому относится к уравнению второго типа.

Полагаем $y' = p, \qquad p = p(x), \; y'' = p'$

Тогда уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ **примет вид:**

$$p' - \frac{p}{x} = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + \ln|c_1|,$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|, \qquad \ln|p| = \ln|x \cdot c_1|,$$

$$p = xc_1.$$

Возвратимся к исходной переменной

$$y' = xc_1, \qquad \frac{dy}{dx} = xc_1, \qquad dy = xc_1 dx,$$

$$\int dy = c_1 \int xdx + c_2,$$

$$y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2.$$

3. Уравнение вида $$y'' = f(y, y') \qquad (9.25)$$

не содержит явным образом независимого переменного *x*.

Для его решения снова положим $$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

но теперь мы будем считать *p* функцией от *y*. Тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Подставляя y' **и** y'' **в (9.25) получим уравнение**

первого порядка относительно вспомогательной функции *p*

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

Интегрируя его, найдем *p* как функцию от *y* и произвольного постоянного c_1

$$p = \varphi(y, c_1).$$

Заменяя функцию *p(y)* на y', **получаем**

$$y' = \varphi(y, c_1)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющими переменными.

Частным случаем уравнения (9.25) является уравнение вида

$$y'' = f(y).$$

Оно решается при помощи аналогичной подстановки.

Пример: **Найти частное решение уравнения**

$$y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

Решение **Это уравнение третьего типа.**

$$y' = p, \quad p = p(y),$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Получаем

$$p\frac{dp}{dy}-p^2+p(y-1)=0, \qquad \frac{dp}{dy}-p=1-y,$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем его решать методом Бернулли. Полагаем

$$p=u(y)\cdot\upsilon(y), \qquad p'=u'\upsilon+u\upsilon',$$

$$u'\upsilon+u\upsilon'-u\upsilon=1-y,$$

$$u'\upsilon+u(\upsilon'-\upsilon)=1-y \qquad (9.26)$$

Приравняем скобку к нулю

$$\upsilon' - \upsilon = 0,$$

$$\frac{d\upsilon}{dy} = \upsilon, \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = dy, \quad \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int dy,$$

$$\ln|\upsilon| = y, \qquad \boxed{\upsilon = e^{y}}$$

Подставим υ **в (9.26):** $\quad u'e^{y} = 1 - y,$

$$\frac{du}{dy} = (1-y)e^{-y}, \qquad du = (1-y)e^{-y}dy,$$

$$\int du = \int (1-y)e^{-y}dy + c_1,$$

$$u = \int (1-y)e^{-y}dy + c_1 = \begin{bmatrix} U = 1-y \\ dU = -dy \\ dV = e^{-y}dy \\ V = -\int e^{-y}d(-y) = -e^{-y} \end{bmatrix} =$$

$$= (1-y)(-e^{-y}) - \int e^{-y}dy = -(1-y)e^{-y} + e^{-y} + c_1 =$$

$$= ye^{-y} + c_1.$$

Так как $p = u \cdot \upsilon,$ **то**

$$p = (ye^{-y} + c_1)e^y,$$

$$y' = y + c_1 e^y$$

Далее для решения задачи лучше воспользоваться начальными условиями

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$

$$2 = 2 + c_1 e^2, \quad c_1 e^2 = 0, \quad c_1 = 0,$$

Уравнение в этом случаи примет вид:

$$y' = y, \qquad \frac{dy}{dx} = y, \qquad \frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + \ln c_2,$$

$$\ln|y| = x + \ln c_2, \qquad \left|\frac{y}{c_2}\right| = e^x, \qquad y = c_2 e^x$$

Постоянная c_2 определяется из начальных условий:

$$2 = c_2 e^0, \qquad c_2 = 2, \qquad \boxed{y = 2e^x.}$$

9.8 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение 1: Дифференциальное уравнение n-порядка называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции *y* и ее производных $y', y'', \ldots,$ т.е. имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad (9.27)$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ заданные функции от *x* или постоянные.

Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)** или уравнением с правой частью.

Если $f(x) = 0,$ **то уравнение называется** **линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) или уравнением без правой части.**

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (9.28)$$

Теорема 1: **Если** y_1 и y_2 **два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка, то** $y_1 + y_2,$ **также будет являться решением этого уравнения.**

Теорема 2:

Если y_1 **является решением уравнения (9.28), то** $c \cdot y_1,$ **где *c=cons* является также решением уравнения (9.28).**

Определение 2. Функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ называются **линейно независимыми** на интервале (a,b), если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \quad (9.29)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля, то функции y_1 и y_2 называются линейно зависимыми.

Очевидно, что функции линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е.

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda = const$$

Пример: Пусть дано уравнение: $y'' - y' = 0.$

Легко показать, что функции $e^x, e^{-x}, 3e^x$

являются решениями этого уравнения.

При этом функции e^x, e^{-x} линейно независимы, т.к.

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const$$

Функции $e^x, 3e^x$ **линейно зависимы, т.к.**

$$\frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = const$$

Определение 3: **Пусть** y_1 и y_2 **являются функциями от x:**

$$y_1 = y_1(x), \qquad y_2 = y_2(x),$$

тогда определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом данных функций.

Теорема 3: **Если функции** y_1 и y_2,

линейно зависимы на отрезке $[a,b]$,

то определитель Вронского на этом отрезке равен нулю.

Если же решения y_1 и y_2, **линейно независимы на отрезке** $[a,b]$, **то определитель Вронского составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.**

Действительно, если y_1 и y_2 **линейно зависимы:**

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda = const, \qquad y_1 = \lambda y_2 \text{ и } y_1' = \lambda y_2'$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Совокупность любых двух линейно независимых частных решений y_1 и y_2 **ЛОДУ второго порядка**

определяет фундаментальную систему решений этого уравнения.

Теорема 4: **Если** y_1 и y_2 **- два линейно независимых решения уравнения (9.28), то**

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (9.30)$$

где $c_1, c_2 = const,$ **есть его общее решение.**

9.9 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (9.31)$$

где *p,q* постоянные действительные числа.

Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$

где *k-const,* тогда

$$y' = ke^{kx}, \qquad\qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

Подставляя полученные значения производных в уравнение (9.31), находим

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0,$ **то значит**

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0, \qquad (9.32)}$$

Уравнение (9.32) называют характеристическим уравнением.

Оно имеет два корня

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (9.33)$$

Возможны три случая:

Случай 1. **Корни уравнения (9.32) действительные и различные**

$$D > 0, \qquad \frac{p^2}{4} - q > 0,$$

$$k_1 \neq k_2.$$

В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения будут линейно независимы, т.к.

$$\frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$$

Следовательно общее решение уравнения (9.31) имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.}$$

Пример: **Решить уравнение** $y'' + y' - 2y = 0.$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Решаем его

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

$$k_1 = 1,\ k_2 = -2.$$

Тогда

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x} = e^{-2x}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}.$$

Случай 2. **Корни характеристического уравнения действительные и равные**

$$D = 0, \qquad k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

В этом случае одно частное решение имеет вид

$$y_1 = e^{kx}$$

Второе частное решение будем искать в виде

$$y_2 = u(x)e^{kx},$$

где *u(x)*-неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2' = u'(x)e^{kx} + u(x)ke^{kx} = e^{kx}(u'(x) + ku(x)),$$

$$y_2'' = e^{kx}k(u'(x) + ku(x)) + e^{kx}(u''(x) + ku'(x)) =$$

$$= e^{kx}(u''(x) + 2ku'(x) + u(x)k^2).$$

Подставляя полученные выражения в (9.31) получаем

$$e^{kx}(u''(x)+2ku'(x)+u(x)k^2)+$$

$$+pe^{kx}(u'(x)+ku(x))+qe^{kx}=0.$$

$$u''(x)+u'(x)(p+2k)+u(x)(k^2+pk+q)=0$$

Т.к. k является корнем характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0.$$

Кроме того

$k=k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$, **то**

$$p+2k=0,$$

Мы получим дифференциальное уравнение:

$$u''(x) = 0.$$

Решаем его

$$\frac{du'(x)}{dx} = 0, \qquad du'(x) = 0,$$

$$\int du'(x) = A, \qquad A = const,$$

$$u'(x) = A, \qquad \frac{du(x)}{dx} = A,$$

$$du(x) = Adx,$$

$$\int du(x) = A\int dx + B, \qquad B = const,$$

$$u(x) = Ax + B,$$

Обычно для простоты полагают, что $B = 0, A = 1.$

$$u(x) = x.$$

Таким образом в качестве второго частного решения можно взять $y_2 = xe^{kx}.$

Очевидно, что частные решения $y_1 = e^{kx},$

$y_2 = xe^{kx},$ **являются линейно независимыми,**

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{xe^{kx}}{e^{kx}}=x\neq const.$$

Поэтому общее решение уравнения (9.31) в данном случае можно записать:

$$\boxed{y=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}.}$$

Пример: **Решить уравнение** $y''-4y'+4y=0.$

Решение **Составляем характеристическое уравнение**

$$k^2-4k+4=0.$$

$$k_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 4}}{2}=2,$$

Находим корни

$$y_1=e^{2x},\quad y_2=xe^{2x},$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Случай 3. $D < 0,$ $\dfrac{p^2}{4} - q < 0,$

т.е. корни уравнения комплексные.

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$ **Тогда** $\alpha = -\dfrac{p}{2},\quad \beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}.$

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Общее решение в этом случае записывается в виде

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Пример: **Решить уравнение** $y'' + 9y = 0.$

Решение

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 9 = 0, \qquad k = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i,$$

$$k^2 = -9, \qquad \alpha = 0, \quad \beta = 3,$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

9.10 Линейные однородные уравнения n-порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (9.34)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ **- действительные числа.**

Для решения уравнения составляем характеристическое уравнение:

$$k^{(n)} + a_1 k^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0,$$

Далее находим корни характеристического уравнения

$$k_1, \ldots, k_n$$

по характеру корней записывают частные линейно независимые решения уравнения (9.34):

1. Каждому действительному однократному корню k, соответствует решение

$$e^{kx}$$

2. Если корень k встречается r-раз (кратность корня), то мы получим r – линейно независимых частных решений:

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$$

3. Каждой паре комплексных корней:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta,$$

соответствует два частных решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

4. Если пары комплексных чисел встречаются μ раз, то мы получим 2μ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример:

Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0.$

Решение

Составляем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0, \qquad (k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0,$$

$$(k - 1)(k + 1)(k^2 + 1) = 0,$$

$$k_1 = 1, k_2 = -1,$$

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x},$$

$$k_{34} = \pm i, \qquad \alpha = 0, \beta = 1 \qquad y_3 = \cos x,$$

$$y_4 = \sin x.$$

Общий интеграл имеет вид

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

9.11 Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Пусть дано линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (9.35)$$

Рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (9.36)$$

Теорема: **Общее решение неоднородного уравнения (9.35) представляется как сумма общего решения однородного уравнения (9.36)** $\bar{y}$ **и частного решения неоднородного уравнения(9.35)** y^*

$$y = \bar{y} + y^*. \qquad (9.37)$$

!

Рассмотрим общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения: ***метод вариации произвольных постоянных.***

Запишем общее решение однородного уравнения (9.37) в виде

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2. \qquad (9.38)$$

Далее полагаем, что c_1, c_2

являются функцией *x*, т.е. мы пытаемся учесть наличие правой части уравнения (9.35)

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2. \qquad (9.39)$$

Продифференцируем данное равенство

$$y' = c_1 y_1' + c_1' y_1 + c_2 y_2' + c_2' y_2.$$

Подберем искомые функции $c_1(x), c_2(x)$

так, чтобы выполнялось равенство

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \qquad (9.40)$$

Первая производная примет вид

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Дифференцируя полученное выражение, найдем y''

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''. \qquad (9.41)$$

Подставляя $y, \; y', \; y''$ **в уравнение (9.35) получим**

$$c_1'y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') +$$
$$+ a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

$$c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) +$$
$$+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x).$$

Выражения стоящие в первых двух скобках обращаются в нуль, т.к. y_1 и y_2 **решения однородного уравнения. Следовательно**

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \qquad (9.42)$$

Запишем (9.40) и (9.42) в виде системы

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases} \qquad \textbf{(9.43)}$$

Решая систему (9.43) можно найти c_1', c_2'

как функции от *x*

$$c_1'(x) = \varphi_1(x),$$

$$c_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Интегрируя получим

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \bar{c}_1,$$

$$c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{c}_2,$$

$\overline{c}_1, \overline{c}_2$ **-постоянные интегрирования. Подставляя полученные выражения** c_1, c_2 **в равенство (9.39) найдем общее решение неоднородного уравнения.**

Пример: **Найти общее решение не однородного уравнения**

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Решение

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0, \qquad y'' = \frac{y'}{x}$$

Уравнение не содержит переменную у, поэтому данное уравнение относится к уравнению второго типа

$$y' = p, \qquad p = p(x), \qquad y'' = p',$$

$$p' = \frac{p}{x}. \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + \ln c_1, \qquad \ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|,$$

$$\ln|p| = \ln|xc_1|, \qquad p = xc_1,$$

$$\boxed{y' = xc_1,} \qquad \frac{dy}{dx} = xc_1, \quad dy = xc_1 dx,$$

$$\int dy = c_1 \int xdx + c_2,$$

$$\boxed{y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2,}$$

Теперь полагаем, что c_1, c_2

являются функцией *x*, т.е.

$$y = c_1(x)\frac{x^2}{2} + c_2(x). \qquad (9.44)$$

Для определения c_1, c_2

мы должны составить систему уравнения вида (9.43):

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

В нашем случае

$$y_1 = \frac{x^2}{2}, \; y_2 = 1, \; y_1' = x,$$

$$y_2' = 0, \quad f(x) = x$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\dfrac{x^2}{2} + c_2' = 0, \\ c_1'(x)x + c_2' \cdot 0 = x, \end{cases} \qquad (9.45)$$

Решаем второе уравнение

$$c_1'(x)=\frac{x}{x}=1, \qquad \frac{dc_1(x)}{dx}=1, \qquad dc_1(x)=dx,$$

$$\int dc_1(x)=\int dx+\bar{c}_1, \qquad \boxed{c_1(x)=x+\bar{c}_1.}$$

Воспользуемся первым уравнением системы (9.45)

$$c_1'(x)\frac{x^2}{2}+c_2'=0, \qquad c_2'=-\frac{x^2}{2}c_1'(x)=-\frac{x^2}{2}$$

Тогда

$$c_2'(x)=-\frac{x^2}{2}, \qquad dc_2(x)=-\frac{x^2}{2}dx,$$

$$\int dc_2(x) = -\int \frac{x^2}{2}dx + \overline{c}_2,$$

$$\boxed{c_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \overline{c}_2.}$$

Найденные $c_1(x), c_2(x)$ **подставляем в (9.44):**

$$y = (x + \overline{c}_1)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \overline{c}_2,$$

$$y = \frac{x^2}{2}\overline{c}_1 + \overline{c}_2 + \frac{x^3}{3}.$$

9.12 Интегрирование линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Теорема (о наложении решений)

Если правая часть уравнения (9.35)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (9.35)$$

представляет сумму двух функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

а y_1^*, y_2^* **- частные решения уравнений**

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x), \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x),$$

то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ **является решением данного уравнения.**

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (9.46)$$

где *p,q* некоторые числа.

Общее решение уравнения (9.46) можно представить в виде

$$\boxed{y = \bar{y} + y^*,}$$

где $\bar{y}$ -общее решение однородного уравнения, а y^* -частное решение неоднородного уравнения.

Для подбора частного решения уравнения (9.46) по виду правой части *f(x)* и корням характеристического уравнения удобно пользоваться следующей таблицей:

Правая часть ДУ	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x)=P_n(x)$ (многочлен *n*-степени)	а) число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y^*=Q_n(x)$ (многочлен *n*-степени)
	б) число 0 является корнем характеристического уравнения кратности *l*	$y^*=x^lQ_n(x)$

$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$	**а)** α **не является корнем характеристического уравнения**	$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$
	б) α **является корнем характеристического уравнения кратности** ***l***	$y^* = x^l e^{\alpha x} Q_n(x)$

$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$ **(пусть** $n \geq m$ **)**	**а)число** βi **не является корнем характеристического уравнения**	$y^* = M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x$
	б)число βi **является корнем характеристического уравнения кратности** ***l*****.**	$y^* = x^l(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x)$

$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$ $(n\geq m)$	**а)число** $\alpha+\beta i$ **не является корнем характеристического уравнения**	$y^{*}=e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$
	б)число $\alpha+\beta i$ **является корнем характеристического уравнения кратности** l	$y^{*}=x^{l}e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$

Пример: **Найти общее решение уравнения**

$$y'' - 3y' = x^2 + 1.$$

Решение **Решение будем искать в виде**

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ **-общее решение однородного уравнения, а**

y^* **-частное решение неоднородного уравнения.**

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - 3y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и решим его

$$k^2 - 3k = 0, \qquad k(k-3) = 0,$$

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = 3.$$

$$\overline{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x},$$

$$\overline{y} = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$$

Поскольку нуль является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)x, \qquad y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Найдем производные и подставим их в исходное уравнение

$$y^{*'} = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y^{*''} = 6Ax + 2B,$$

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, найдем коэффициенты

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & -9A = 1, \qquad A = -\tfrac{1}{9}, \\
x & 6A - 6B = 0, \qquad B = -\tfrac{1}{9}, \\
 & 2B - 3C = 1, \quad 3C = 2B - 1, \quad C = -\dfrac{11}{27},.
\end{array}$$

Частное решение запишется в виде

$$y^* = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x.$$

Общее решение имеет вид

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x.}$$

9.13 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}\right\} \qquad (9.47)$$

Такая система уравнений, когда в левой части стоят производные первого порядка, а правая часть производных не содержит, т.е. говорят, что система уравнений разрешена относительно производных, называется нормальной системой.

При этом предполагают, что число уравнений равно числу искомых функций.

Проинтегрировать систему уравнений, значит найти $y_1, y_2, \dots, y_n,$ **такие что бы они одновременно удовлетворяли системе (9.47), а также чтобы они удовлетворяли начальным условиям:**

$$y_1(x_0) = y_{10}, \qquad y_2(x_0) = y_{20}, \qquad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы, является метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Т.е. обычно поступают следующим образом: берут первое уравнение системы (9.47) и вычисляют производную от левой и правой части:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}. \quad (9.48)$$

В выражении вместо $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx},$

ставят выражения из системы (9.47):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n.$$

Это выражение можно кратко записать:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Находим следующую производную от производной второго порядка и заменив значения производных

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ..., \frac{dy_n}{dx}$$

выражениями из системы, получим

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, находим

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Мы получим системy уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\ldots \\
\frac{d^n y_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}\right\} \qquad (9.49)$$

Далее из первых (n-1) уравнений системы (9.49) выражают функции

$$y_2, \ldots, y_n$$ **через *x*,**

функцию y_1 **и ее производные.**

Найденные значения $y_2, \ldots, y_n$

подставляем в последнее уравнение системы (9.49), получим уравнение *n-ого* порядка относительно искомой функции y_1.

Решая это уравнение определим y_1.

Дифференцируя это уравнение *n-1 раз,* сможем найти

$$y_2, \ldots, y_n.$$

Пример:

Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y+z+x\\ \frac{dz}{dx} &= -4y-3z+2x\end{aligned}\right\}, \qquad (9.50)$$

при начальных условиях $y(0)=1, z(0)=0.$

Решение

Дифференцируем первое уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1. \quad (9.51)$$

В (9.51) вместо $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ **ставим выражения из системы (9.50)**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y + z + x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -3y - 2z + 3x + 1 \end{aligned}\right\} \quad (9.52)$$

Из первого уравнения системы (9.52) выражаем *z*

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x, \qquad (9.53)$$

и подставляем во второе уравнение системы

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\frac{dy}{dx} + 2y + 2x + 3x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y - 2\frac{dy}{dx} + 5x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1. \qquad (9.54)$$

Общее решение полученного уравнения ищем в виде

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Находим общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$

$$k_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1, \quad \bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Частное решение будем искать в виде

$$y^* = Ax + B, \qquad y^{*\prime} = A, \qquad y^{*\prime\prime} = 0,$$

$$2A + Ax + B = 5x + 1,$$

$$\begin{array}{l|c} x & A = 5, \\ & 2A + B = 1, \\ & 10 + B = 1, \\ & B = -9, \end{array}$$

$$\boxed{y^* = 5x - 9.}$$

Таким образом общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9,$$

Из (9.53) следует, что

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x.$$

Вычислим $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 5$$

Поэтому

$$z = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 5 -$$

$$-c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x} - 5x + 9 - x,$$

$$z = e^{-x}(-c_1 + c_2 - c_2 x - c_1 - c_2 x) - 6x + 14,$$

$$\boxed{z = e^{-x}(-2c_1 + c_2 - 2c_2 x) - 6x + 14.}$$

Для того чтобы определить c_1, c_2

воспользуемся начальными условиями

$$y(0)=1, z(0)=0.$$

Мы получили $$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+5x-9,$$

$$z=e^{-x}(-2c_1+c_2-2c_2x)-6x+14.$$

$$1=c_1e^0+c_2 0e^0+5\cdot 0-9,$$

$$1=c_1-9, \qquad c_1=10,$$

$$0=e^0(-2c_1+c_2-2c_2\cdot 0)-6\cdot 0+14.$$

$$0=-2c_1+c_2+14, \qquad c_2=6.$$

Получим

$$y = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9,$$

$$z = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14.$$