Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»


Пьер де Ферма

Тема 8 «Кривые второго порядка»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

**Разработана
доц. Е.Б.Дуниной.**

Будем исследовать уравнения второй степени относительно двух переменных, например *x,y*, которое записывается в виде

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (8.1)$$

либо в виде

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (8.2)$$

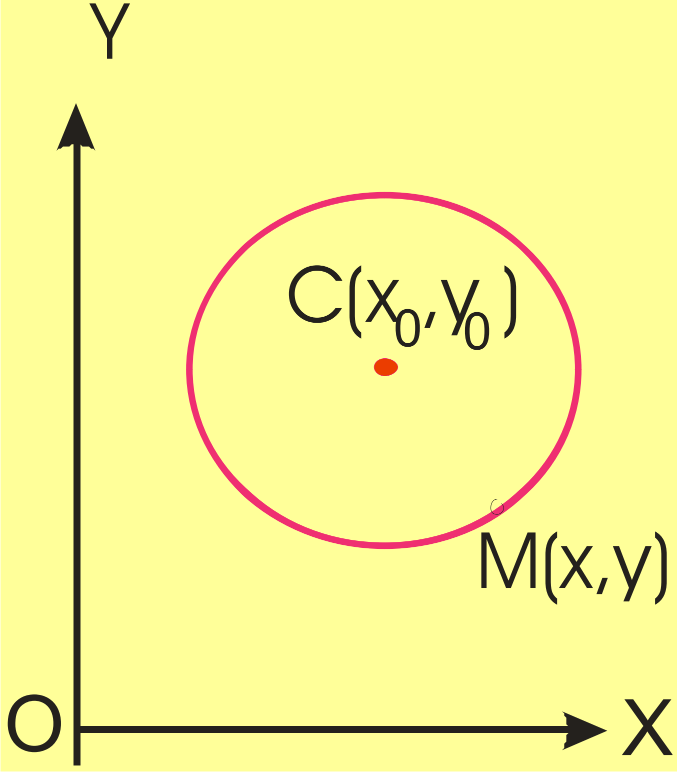
Линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат *x и y* называются линиями второго порядка.

Будем рассматривать четыре вида линий второго порядка: окружность, эллипсы, гиперболы и параболы.

8.1 Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от центра.

Покажем, что окружность есть линия второго порядка.



Пусть окружность имеет центр в точке $C(x_0,y_0)$ и радиус ее R.

Точка $M(x,y)$ – любая точка окружности.

Тогда исходя из определения окружности и формулы расстояния между двумя точками запишем

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$$

Откуда

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad \textbf{(8.3)}$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности принимает вид

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (8.4)$$

Уравнения (8.3)и (8.4) называют каноническими уравнениями окружности.

Раскрыв скобки в уравнении (8.3), приведем его к виду

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0 \qquad (8.5)$$

Сравнивая (8.5) и (8.1) видим, что

1. окружность изображается уравнением второй степени, значит окружность есть линия второго порядка;

2. в уравнении окружности коэффициенты при x^2 и y^2

равны между собой, а член с произведением координат *xy* отсутствует.

Если умножить (8.5) на некоторое число *A≠0,* получим

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Ax_0x - 2Ay_0y + Ax_0^2 + Ay_0^2 - AR^2 = 0$$

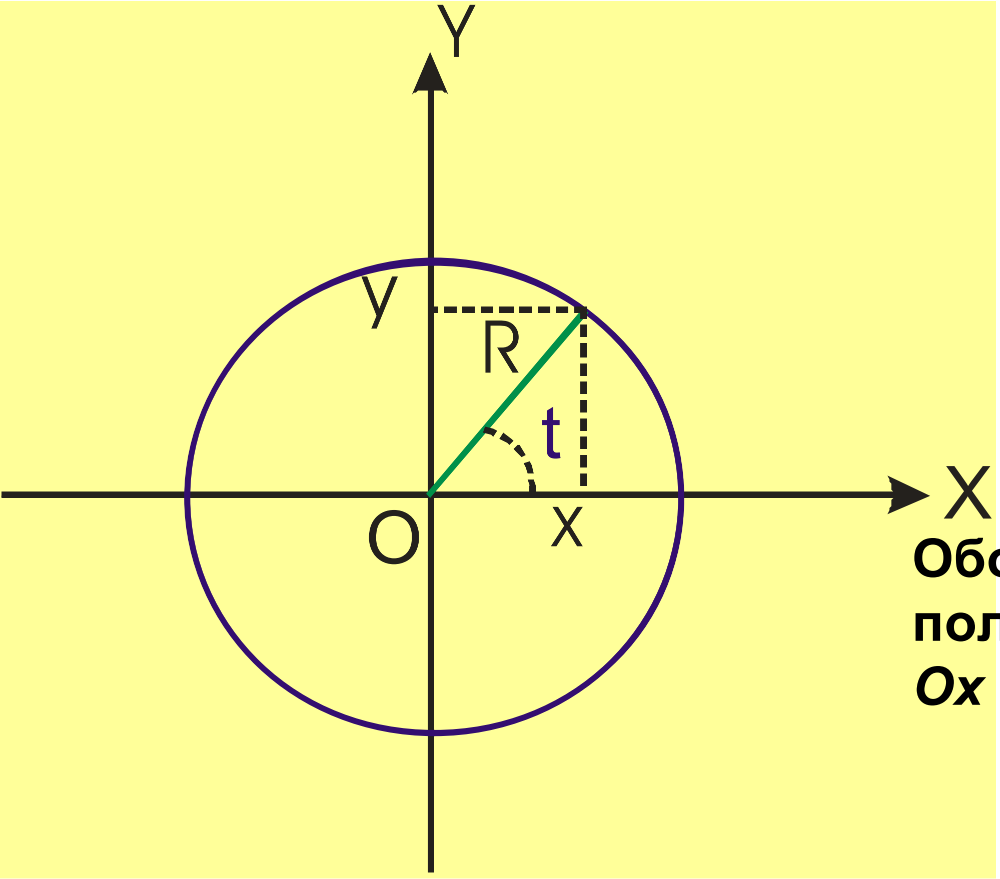
Ведем обозначения $A\mathrm{x}_0 = D, Ay_0 = E$

$$Ax_0^2 + Ay_0^2 - AR^2 = F$$

Получим

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Dx - 2Ey + F = 0 \qquad (8.6)$$

Уравнение (8.6) называется общим уравнением окружности.



Пусть радиус окружности равен *R*, а центр находится в начале координат.

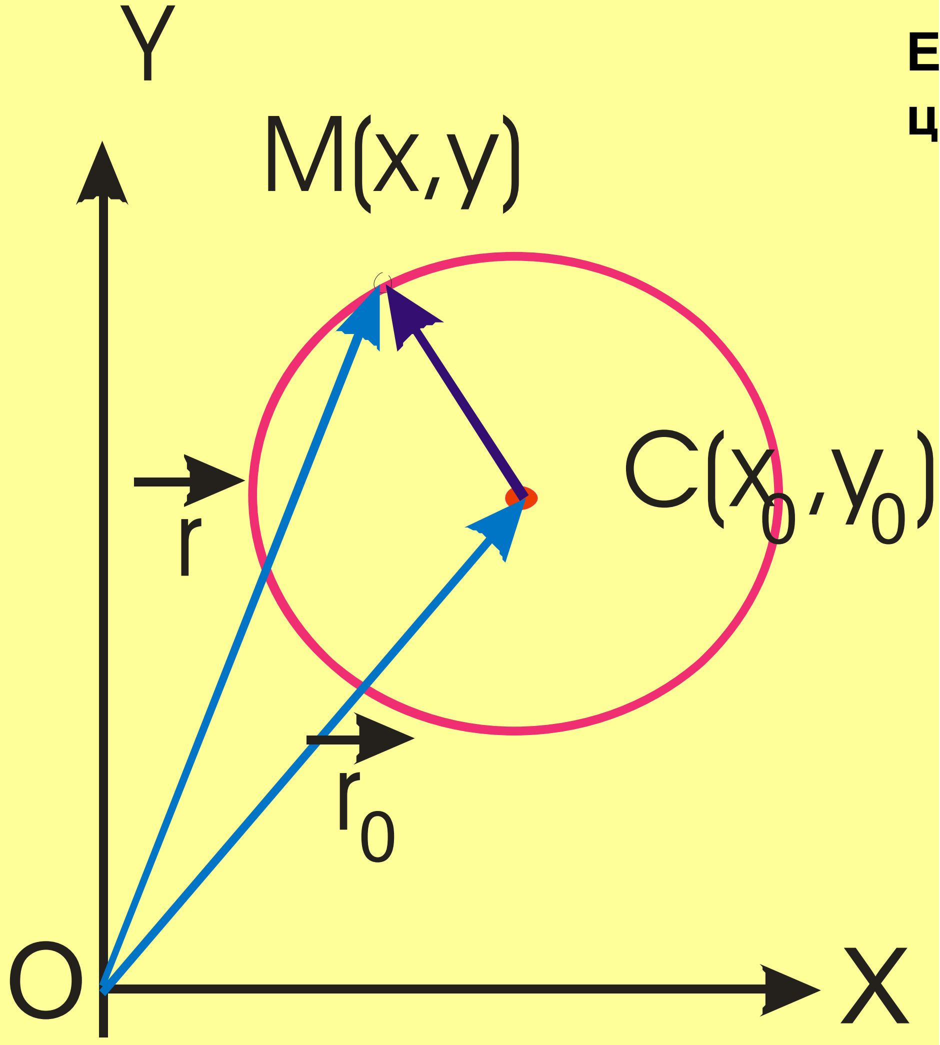
Обозначим через *t* угол между положительным направлением оси *Ox* и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки *M(x,y)* окружности.

Из рисунка видно, что для любой точки окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad (8.7)$$

Уравнения (8.7) называются параметрическими уравнениями окружности с центром в начале координат и радиусом *R*.

Возводя оба равенства в квадрат и сложив их, получим обычное каноническое уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2.$



Если окружность радиуса *R* имеет центр в точке *C(x₀,y₀)* и

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_0(x_0, y_0),$$

а точка *M(x,y)* есть произвольная точка этой окружности, т.е.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(x, y),$$

то имеет место векторное равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{CM}$$

Переходя от векторного равенства к координатам можно записать

$$\begin{cases} x = x_0 + Пр_{\text{ox}} \overrightarrow{CM} \\ y = y_0 + Пр_{\text{oy}} \overrightarrow{CM} \end{cases}$$

Т.е. параметрические уравнения окружности со смещенным относительно начала координат центром имеют вид:

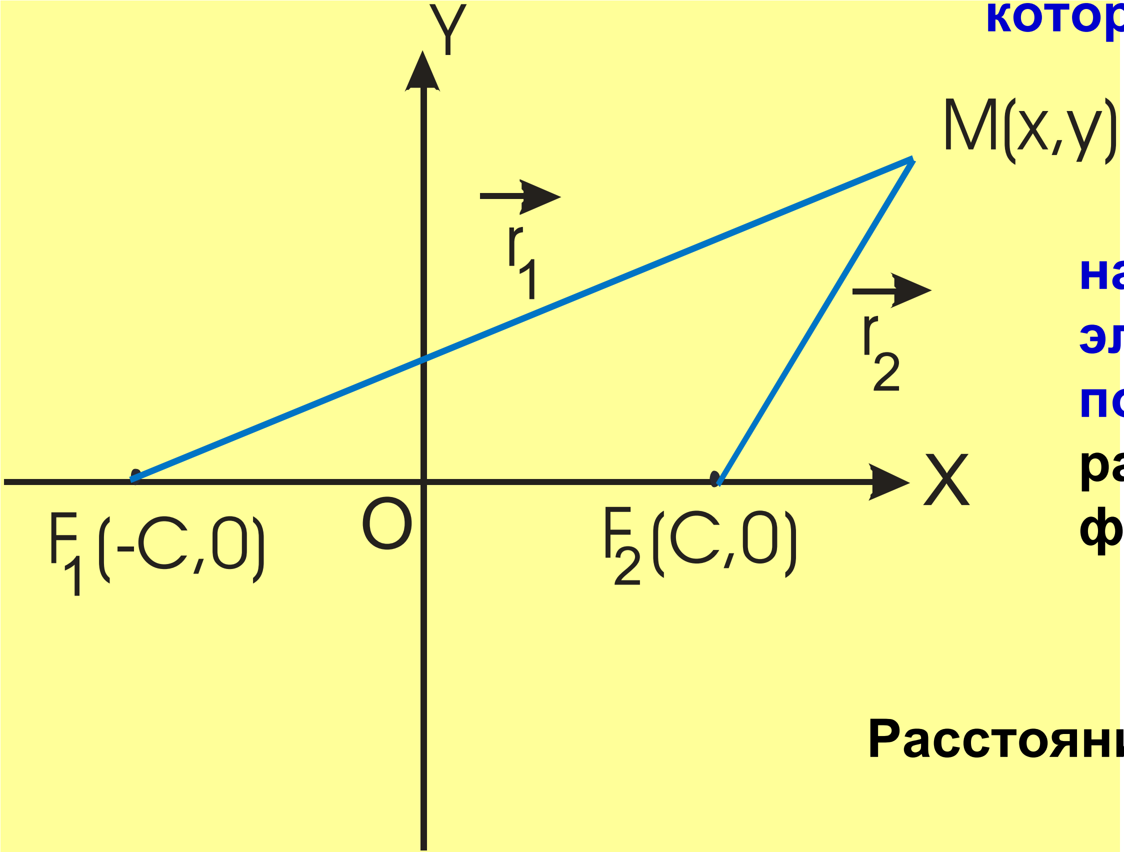
$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \qquad (8.8)$$

8.2 Эллипс. Определение и вывод канонического уравнения.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек

$$F_1 \text{ и } F_2,$$

называемых фокусами эллипса есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).



Расстояние между фокусами *2c*.

Из рисунка видно, что $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса сумма $r_1 + r_2$ **есть величина постоянная, обозначим ее**

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (8.9)$$

Для того чтобы избавиться от иррациональности в уравнении (8.9) умножим обе его части на

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

и разделим на $2a$.

Получим

$$\frac{(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2}{2a}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Упростим левую часть

$$\frac{2xc}{a}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (8.10)$$

Сложив (8.10) и (8.9) получим

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\frac{2xc}{a}$$

далее сократим на 2 ,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{xc}{a}$$

Возведем последнее равенство в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{xc}{a}\right)^2.$$

Раскроем скобки

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

Перепишем выражение в виде

$$x^2-\frac{x^2c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2,$$

$$x^2(1-\frac{c^2}{a^2})+y^2=a^2-c^2$$

$$x^2\frac{a^2-c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$$

Разделив обе части последнего равенства на $a^2-c^2\neq 0$

получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

т.к. $2a>2c\geq 0,$

то $a^2-c^2>0.$

Положим, что $a^2-c^2=b^2.$ Получим выражение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) называется каноническим уравнением эллипса.

Запишем выражение (8.11)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{xc}{a}.$$

Т.к. $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, **то** $r_1=a+\frac{xc}{a}.$

По определению эллипса

$$r_1+r_2=2a,$$ **тогда**

$$r_2=2a-r_1=2a-a-\frac{xc}{a},$$

$$r_2=a-\frac{c}{a}x$$

где r_1 и r_2 **называют фокальными радиусами.**

Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a},$ **называется эксцентриситетом эллипса.**

Т.к. *$c<a$*, то эксцентриситет эллипса меньше единицы $\varepsilon < 1$

С учетом последнего формулы для фокальных радиусов можно записать в виде

$$r_1 = a + \varepsilon x$$

$$r_2 = a - \varepsilon x$$

Каноническое уравнение эллипса содержит только квадраты текущих координат. Поэтому если точка *(x,y)* находится на эллипсе, то точки *(x,-y)*, *(-x,y)*, *(-x,-y)* тоже будут находится на эллипсе, а это значит что оси координат будут являться осями симметрии эллипса.

Ось симметрии на которой расположены фокусы, называется фокальной осью. Точка пересечения осей симметрии называется центром эллипса. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. Они находятся на осях координат.

Если в каноническом уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

положить *y=0*, то найдем точки пересечения эллипса с осью *Ox*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}=1, x=\pm a.}$$

Значит, эллипс пересекает ось *Ox* в двух точках

$$A_1(-a,0); A_2(a,0).$$

Полагая *x=0*, находим

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}=1, \text{или } y=\pm b}$$

Опять получим две точки пересечения с осью *Oy*

$$B_1(0,-b), B_2(0,b).$$

Отрезок A_1A_2 **соединяющий прtивоположные вершины на оси *Ox*, называется большой осью,**

отрезок B_1B_2 **малой осью,**

отрезок F_1F_2 **фокусным расстоянием,**

$$a = \frac{A_1A_2}{2} > 0$$

называется большой полуосью,

$$b = \frac{B_1B_2}{2}$$

малой полуосью,

$$c = OF_1 = OF_2 \geq 0$$

- полуфокусным расстоянием, т.к.

$$a^2 - c^2 = b^2$$

то

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Поскольку $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ то

1. $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ или $x^2 \le a^2$, значит $|x| \le a$

или $$-a \le x \le a$$

2. $\frac{y^2}{b^2}\le 1$ или $y^2 \le b^2$, значит $|y| \le b$

или $$-b \le y \le b$$

Следовательно эллипс расположен в прямоугольнике образованном прямыми

$$x = \pm a, y = \pm b$$

Выразим из канонического уравнения эллипса *у*

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

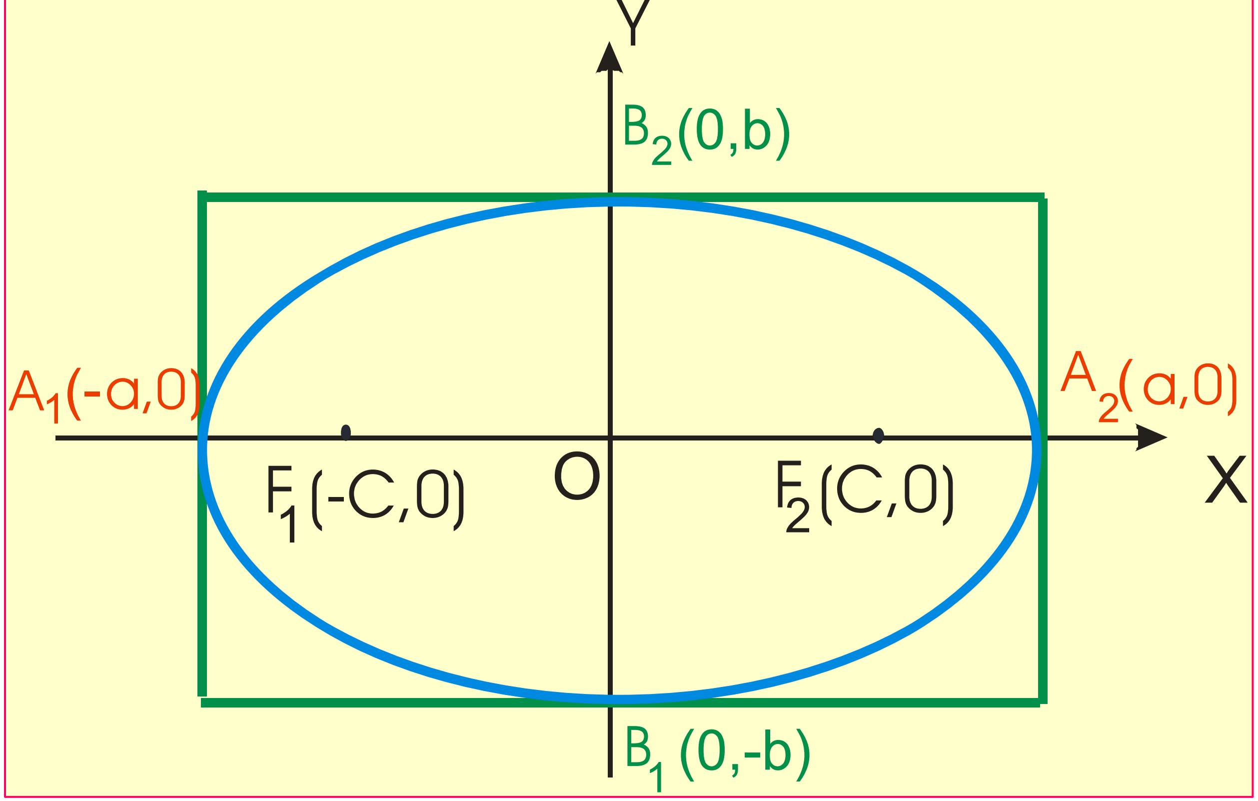
Если линию эллипса брать в первой четверти, то

$$\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

т.к. $x \leq a$

то с увеличением *x* от *0 до а* ордината *у* уменьшается от *b до 0.* Линию эллипса легко построить механически. Для этого нужно взять нить длиной *2а* закрепить ее концы в фокусах F_1 и F_2

и острием карандаша оттягивая нить провести линию.



Если в эллипсе *a=b*, то это будет окружность. Следовательно

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$ **и** $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0.$

Две прямые перпендикулярные к большой оси эллипса, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ **от него называются директрисами эллипса.**

Уравнения директрис имеют вид $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ **и** $x = \frac{a}{\varepsilon}.$

Т.к. для эллипса $\varepsilon < 1, \text{ то } \frac{a}{\varepsilon} > a,$

поэтому директриса располагается левее левой вершины эллипса, а правая правее правой вершины.

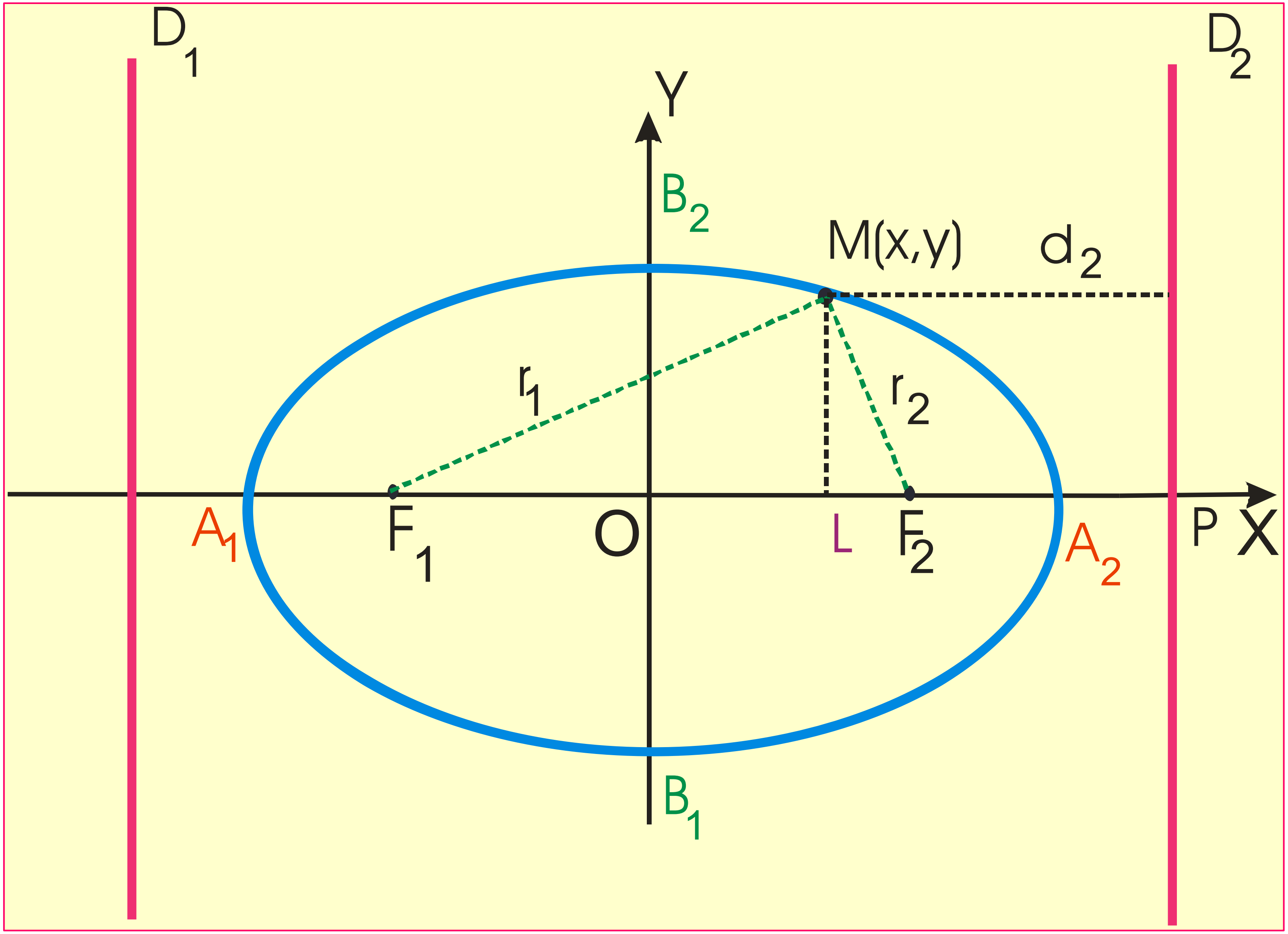
Теорема:

Отношение расстояния любой точки эллипса от фокуса к расстоянию ее от соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса

$$\boxed{\frac{r}{d} = \varepsilon}$$

Доказательство

В виду симметрии достаточно доказать теорему для одного фокуса, например для правого



Координаты точек $L(x,0)$ и $P(\frac{a}{\varepsilon},0),$

расстояние от точки *M* до правой директрисы $d_2 = LP = \frac{a}{\varepsilon} - x$

соответствующий фокальный радиус $r_2 = a - \varepsilon x.$

Следовательно

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (8.14)$$

Если центр эллипса с полуосями *a, b* смещен относительно начала координат в точку $C(x_0, y_0)$

то параметрические уравнения эллипса запишутся в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases} \qquad (8.15)$$

Пример: **Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением** $x^2 + 4y^2 = 16$

Решение: **Разделим почленно уравнение на *16*** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

и сравнивая получено уравнение с уравнением (8.12) получим, что

$$a = 4, b = 2.$$

Так как $a^2 - c^2 = b^2$, **то**

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$$

$$c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

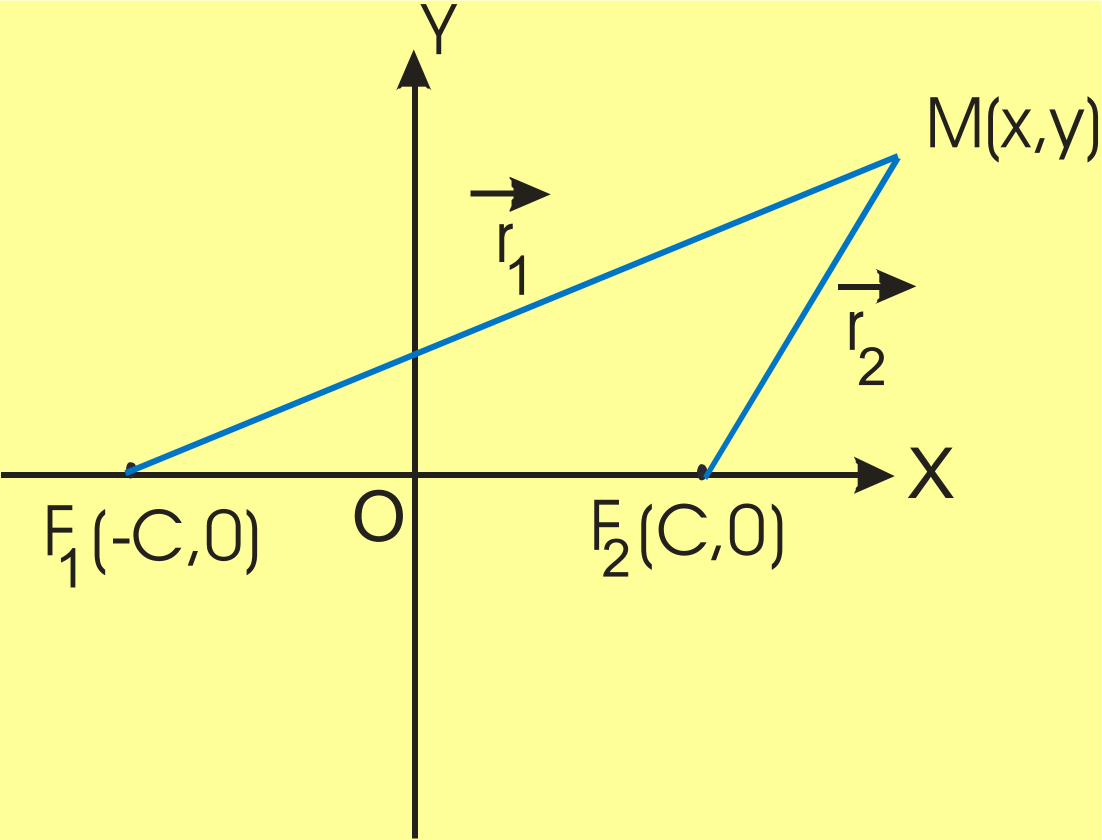
Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-2\sqrt{3},0),\ F_2(2\sqrt{3},0)$

Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8.3 Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2



называемых фокусами гиперболы, взятая по абсолютному значению, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Обозначим

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

расстояние между фокусами *2c (2a<2c).*

В координатах это равенство запишется в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Освобождаясь от квадратных корней, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Т.к. $c>a,$ то величина c^2-a^2 положительна, обозначим ее через $b^2,$

$$c^2-a^2=b^2$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8.15)$$

Уравнение содержит квадраты координат, т.е. оно не изменится от замены *x* на *–x*, *y на –y,* а это значит что гипербола симметрична относительно обеих осей координат.

Ось симметрии на которой располагаются фокусы, называется фокальной осью. Точка пересечения осей симметрии называется **центром гиперболы.** Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются **вершинами гиперболы.**

Полагая в уравнении (8.15) *y=0,* найдем абсциссы точек пересчения гиперболы с осью *Ox*

$$\frac{x^2}{a^2}=1,\ x=\pm a$$

Следовательно точки

$$A_1(-a,0);A_2(a,0)$$

являются вершинами гиперболы.

Положив *x=0*, получим

$$-\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{или}\ y=\pm b\sqrt{-1},$$

которое означает, что с осью *Oy* **гипербола не пересекается.**

В соответствии с этим ось симметрии, пересекающую гиперболу, называют **действительной осью симметрии**, а ось симметрии, которая не пересекает гиперболы, называют **мнимой осью симметрии.**

Для гиперболы **действительной** осью является ось *Ox*, а **мнимой** – ось *Oy.*

Из уравнения гиперболы следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \text{ или } \frac{x^2}{a^2}\geq 1,$$ т.е. $$|x|\geq a$$ или $$x\geq a, \qquad x\leq -a$$

Следовательно все точки гиперболы расположены справа от прямой *x=a* и слева от прямой *x=-a.*

Решим уравнение $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ относительно *y*

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

При *x=a* ордината имеет свое наименьшее значение *y=0,* с увеличением *x* ордината *y* монотонно растет.

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Сопоставим ординаты точек гиперболы

и прямой, определенной уравнением

$$Y = \frac{b}{a}x$$

Пусть *M* – точка гиперболы с абсциссой *x,* а *N-* точка прямой с той же абсциссой. При больших значениях *x* ордината точки *M* будет близка к ординате точки *N.* При этом $y<Y$.

Прямая $$Y = \frac{b}{a}x$$ **называется асимптотой гиперболы.**

Из симметрии гиперболы относительно оси *Oy* следует существование и второй асимптоты

$$Y = -\frac{b}{a}x$$

Для построения асимптот гиперболы строим прямоугольник со сторонами

$$x = \pm a \text{ и } y = \pm b.$$

Асимптоты будут диагоналями этого прямоугольника.

Гипербола состоит из двух ветвей, приближающихся сколь угодно близко к асимптотам $Y = \pm\frac{b}{a}x$ **при** $x \to \infty$

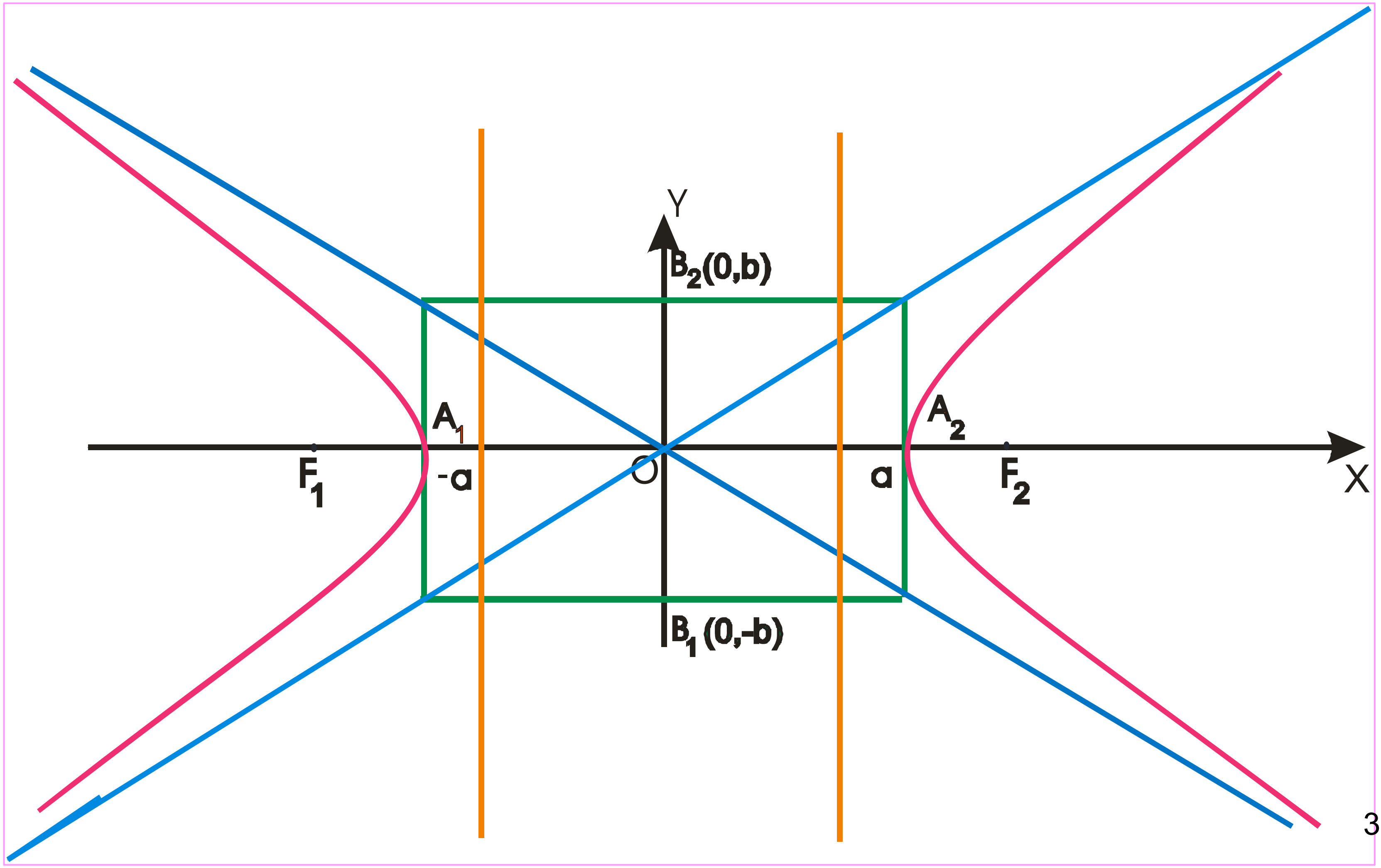
Отношение полуфокусного расстояния к действительной полуоси называется эксцентриситетом гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Т.к. *c>a*, то

$$\varepsilon > 1$$

Директрисами гиперболы, называются прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстающие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.



Уравнения директрис гиперболы

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Т.к. $\varepsilon > 1,$ $x = \frac{a}{\varepsilon} < a,$

а это значит, что директрисы гиперболы будут лежать между вершинами гиперболы.

Так же как и для эллипса, для гиперболы будет иметь место следующее утверждение

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

где r_1, r_2 **- расстояние от точки гиперболы до соответствующих фокусов,**

d_1, d_2 **-расстояния точки гиперболы до соответствующих директрис.**

Гипербола, у которой **действительная ось равна мнимой, называется равносторонней.** Ее уравнение получается при *a=b* и имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Уравнения асимптот для равносторонней гиперболы запишутся в виде

$$y = \pm x.$$

Т.е. **асимптоты** равносторонней гиперболы **перпендикулярны** между собой.

Фокальными радиусами точки *M* гиперболы называются отрезки, соединяющие эту точку с фокусами данной гиперболы.

Их длины $r_1 = |F_1M|, r_2 = |F_2M|$

выражаются для правой ветви гиперболы формулами

$$r_1 = \varepsilon x + a$$
$$r_2 = \varepsilon x - a$$

для левой ветви

$$r_1 = -\varepsilon x - a$$
$$r_2 = -\varepsilon x + a$$

Пример: **Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением**

$$5x^2 - 4y^2 = 20.$$

Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4, \sqrt{15})$

Решение.

Разделив обе части на 20, получим

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

Сравнивая это уравнение с каноническим уравнением гиперболы (8.15) получаем, что

$$a^2=4, b^2=5, a=2, b=\sqrt{5}$$

Т.к. $b^2=c^2-a^2,$ **то**

$$c^2=a^2+b^2=9, c=3,\ F_1(-3{,}0), F_2(3{,}0)$$

Эксцентриситет гиперболы $$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}.$$

Поскольку точка *M* лежит на левой ветви гиперболы, то формулы для вычисления

$$r_1 \text{ и } r_2$$

запишем в виде

$$r_1 = -\varepsilon x - a = -\frac{3}{2}(-4) - 2 = 4$$

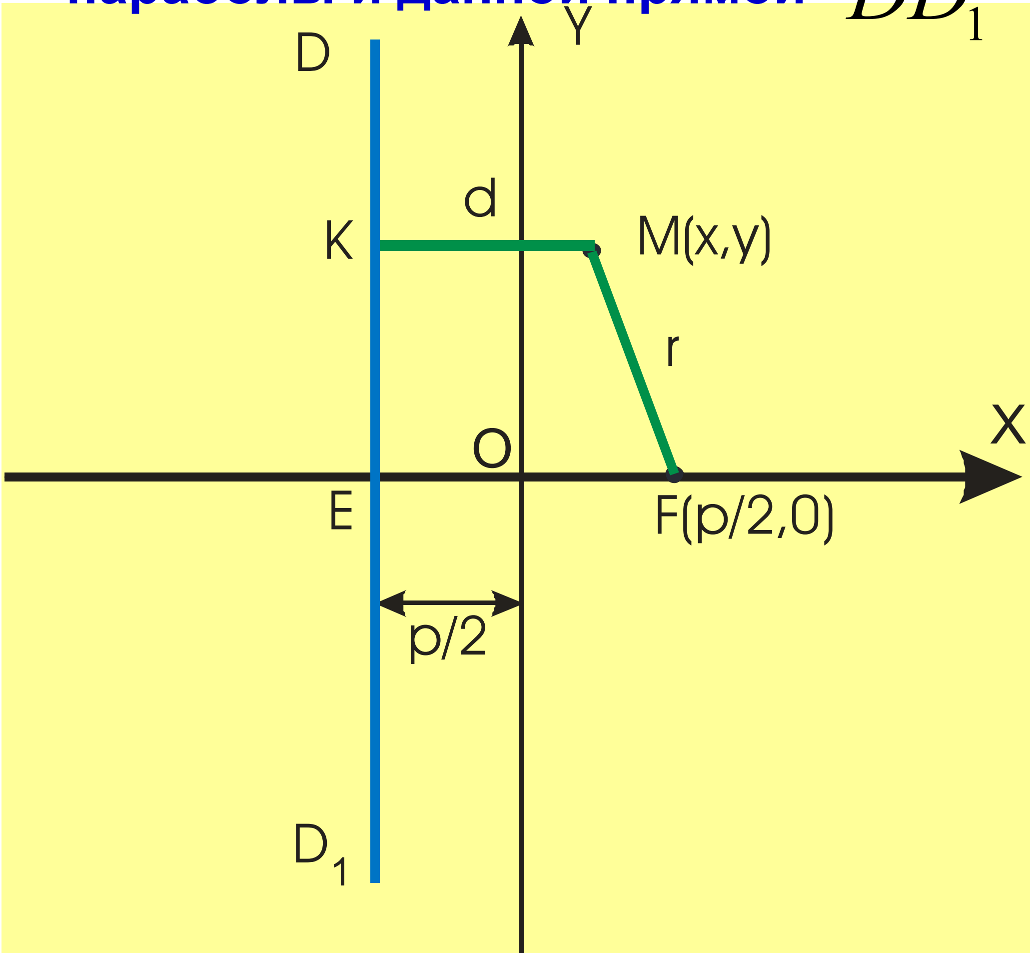
$$r_2 = -\varepsilon x + a = -\frac{3}{2}(-4) + 2 = 8$$

Заметим, что

$$r_2 - r_1 = 8 - 4 = 4 = 2a.$$

8.4 Парабола. Определение и вывод канонического уравнения.

Параболой называется геометрическое место точек равноудаленных от данной точки *F*, называемой фокусом параболы и данной прямой DD_1 называемой ее директрисой.



Для вывода канонического уравнения ось *Ox* проведем через фокус *F*, перпендикулярно директрисе

$$DD_1,$$

за начало координат возьмем середину отрезка *FE.*

Пусть *M(x,y)* – произвольная точка параболы, *p>0* – расстояние фокуса до директрисы. Тогда *F(p/2,0)* и *OF=p/2*, *E(-p/2,0)*, *K(-p/2,y)*.

По определению расстояние *KM* равно расстоянию *FM*, но

$$FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\qquad MK=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Следовательно, уравнение параболы в выбранной системе запишется так

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Возводим обе части равенства в квадрат

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Раскроем скобки

$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \qquad (8.16)$$

Выражение (8.16)-каноническое уравнении параболы.

Т.к. уравнение (8.16) не изменяется от замены *y* на –*y*, то парабола симметрична относительно оси *Ox*.

Точка пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной параболы.

Положив в уравнении (8.16) *y=0*, найдем *x=0.* Следовательно парабола проходит через начало координат и точка *O(0,0)* является вершиной параболы.

Т.к. $y^2 \geq 0$ **и *p*>*0*, то из уравнения** $y^2 = 2px$

следует что $x \geq 0,$

т.е. все точки параболы лежат справа от оси *Oy*.

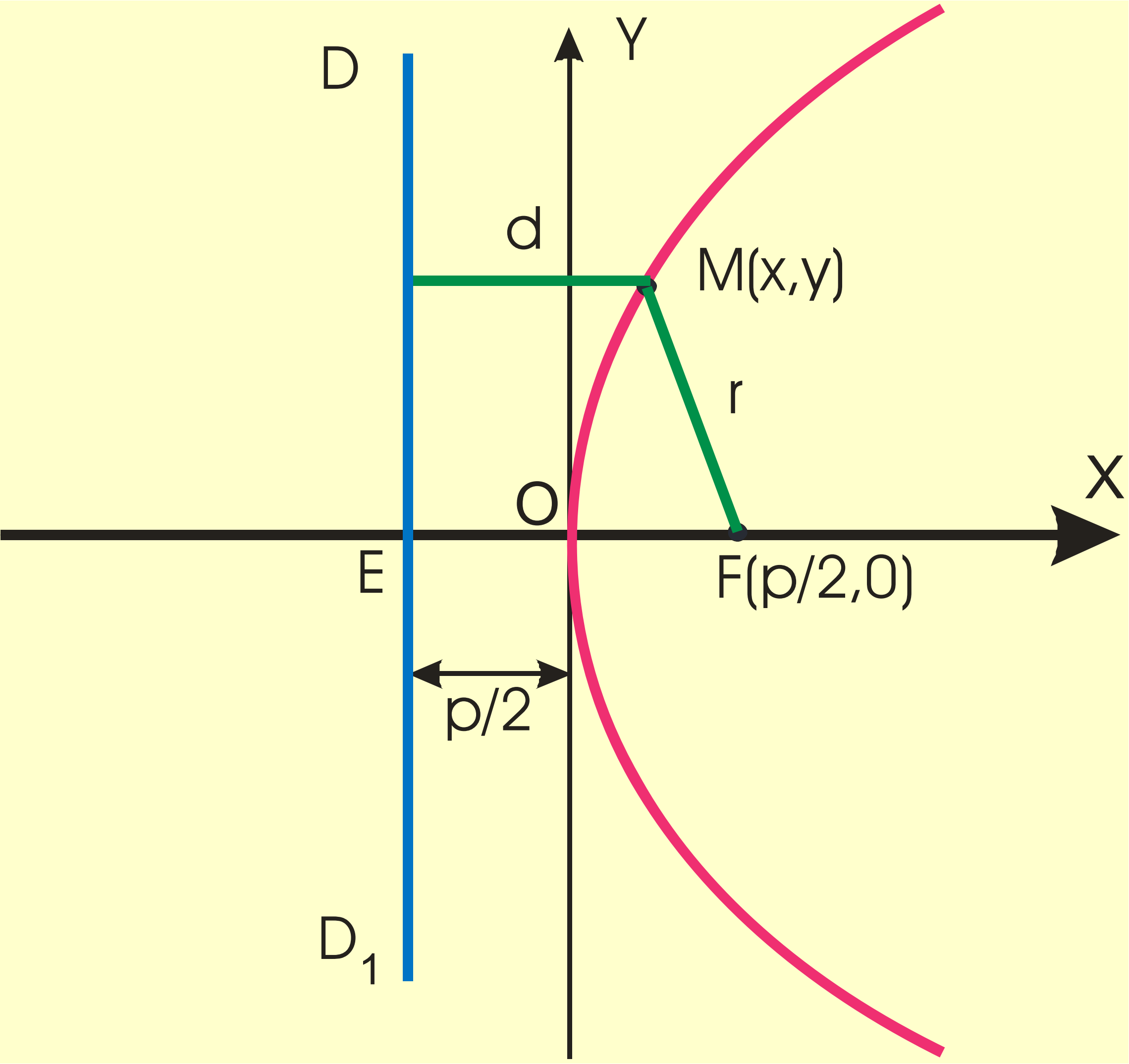
Решив уравнение $y^2 = 2px$ **относительно *y*, найдем, что**

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

Рассмотрим параболу лежащую в первой координатной четверти, для нее

$$y = \sqrt{2px}.$$

Из последнего выражения видно, что при возрастании *x* ордината *y* также растет неограниченно.



Уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

По определению параболы расстояние точки *M(x,y)* параболы до фокуса *F* и до директрисы равны, поэтому

$$r = x + \frac{p}{2}$$

или

$$\frac{r}{d} = 1$$

Следовательно, эксцентриситет для параболы равен

$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$$