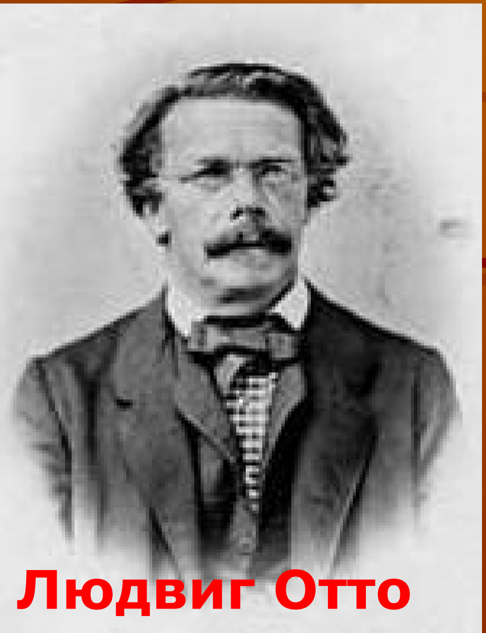
Алекси Кло́д Клеро



Людвиг Отто Гессе

Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

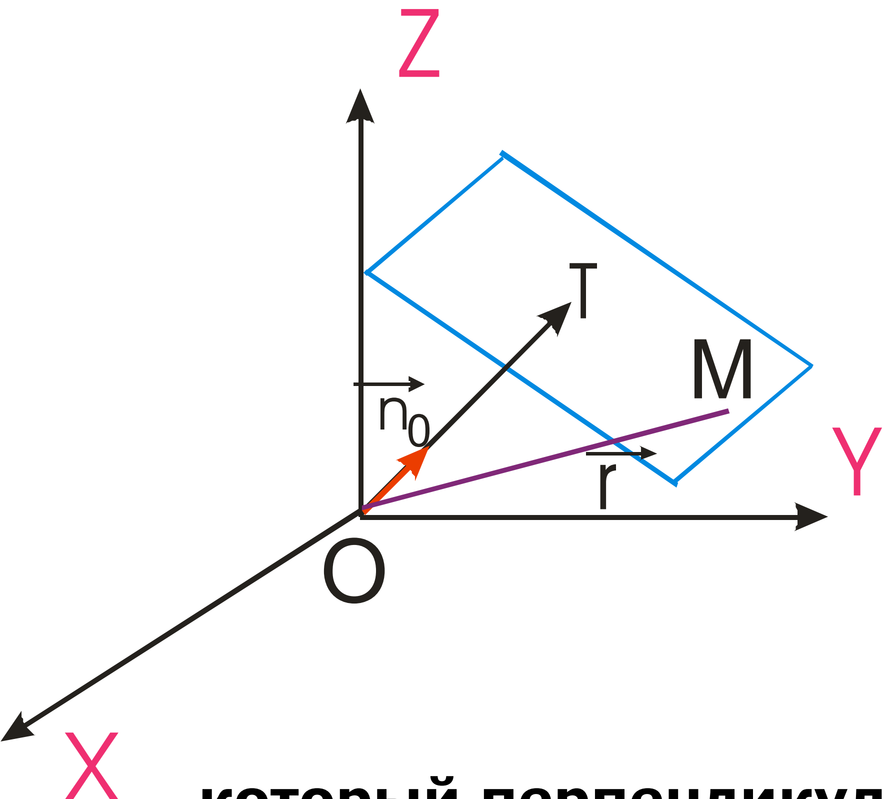
Тема 6. «Плоскость»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

6.1 Нормальное уравнение плоскости.

Дана прямоугольная система координат в пространстве.



Положение плоскости в пространстве относительно выбранной системы координат вполне определяется ее расстоянием *p* от начала координат, т.е. длиной перпендикуляра *OT*, опущенного из точки *O* на плоскость, и единичным вектором $\vec{n}_0$,

который перпендикулярен к плоскости и направлен от начала координат к плоскости.

Возьмем на плоскости произвольную точку *M(x,y,z)*. Когда точка *M* движется по плоскости, то

$$Пр_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM} = OT = p \qquad (6.1)$$

Согласно определению скалярного произведения векторов,

$$Пр_{\vec{n}_0}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}_0 = \vec{r}\vec{n}_0$$

Следовательно (6.1) может быть переписано в виде

$$\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0 \qquad (6.2)$$

Уравнение (6.2) называется нормальным уравнением плоскости в векторной форме.

Переходя к координатам, заметим, что проекциями единичного вектора $\vec{n}_0$

на оси координат *Ox, Oy, Oz* служат косинусы углов α,β,γ образованных этим вектором с осями координат

$$\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\vec{r}(x, y, z).$$

Так как скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций, то уравнению (6.2) соответствует

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (6.3)$$

Уравнение (6.3) называется нормальным уравнением плоскости в координатной форме. Это уравнение первой степени относительно *x,y,z.*

Если *p=0,* то плоскость проходит через начало координат.

6.2 Общее уравнение плоскости.

Теорема: **Всякое уравнение первой степени с тремя переменными определяет плоскость.**

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (6.4)$$

называется общим уравнением плоскости.

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$

называют нормальным вектором плоскости (т.е. вектор отличный от нулевого и перпендикулярный плоскости).

Таким образом, коэффициенты при текущих координатах в общем уравнении плоскости являются *проекциями нормального вектора на координатные оси*. Свободный член *D* геометрического смысла не имеет, но если его разделить на длину вектора $\vec{n}$ и взять этот результат по абсолютной величине, то получим расстояние плоскости от начала координат.

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо разделить его на длину вектора

$$\vec{n}(A, B, C)$$

взятую со знаком плюс, если свободный член *D* отрицательный, и со знаком «-», если *D* – положительно.

Другими словами, надо умножить уравнение (6.4) на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

причем знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена *D* в уравнении (6.4). Множитель *μ* носит название нормирующего множителя.

После умножения на *μ* уравнение (6.4)принимает вид

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

Сравнивая его с уравнением (6.3), получим

$$\mu A = \cos\alpha,\ \ \mu B = \cos\beta,\ \ \mu C = \cos\gamma,\ \ \mu D = -p$$

Или

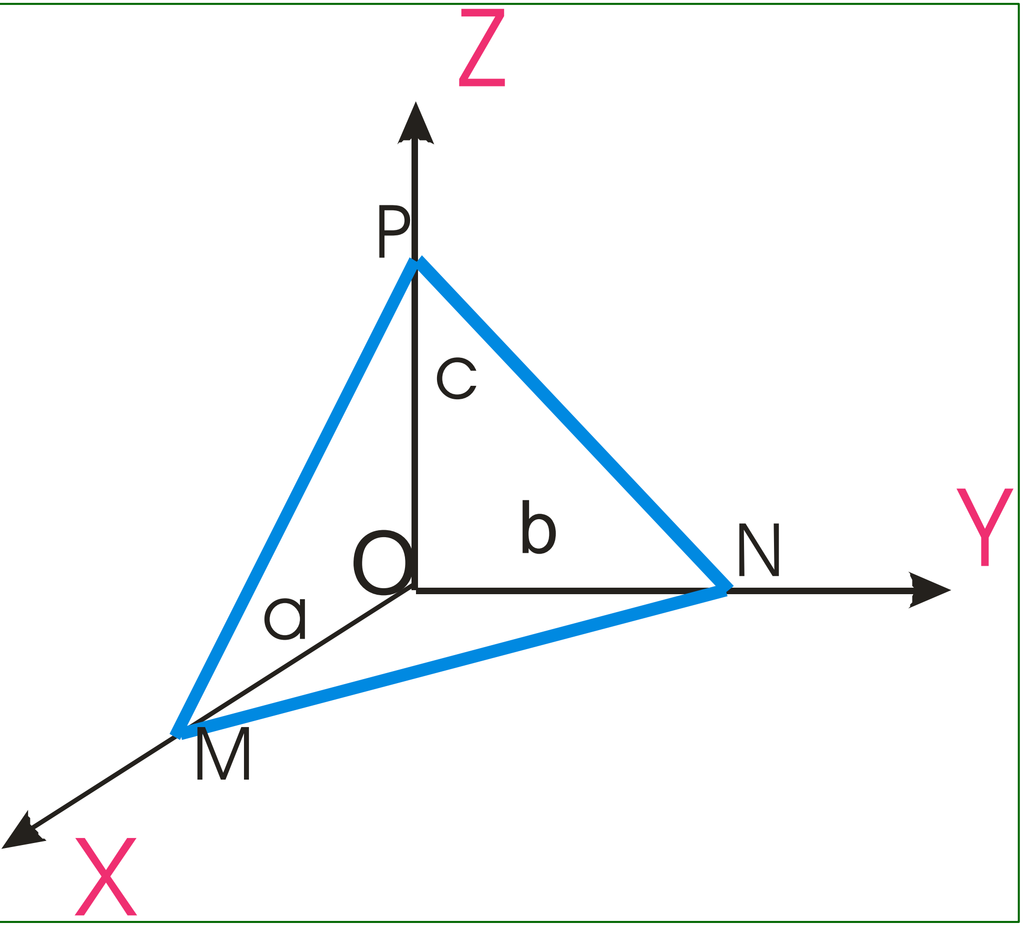
$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, p = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

В этих формулах надо брать верхние знаки, если *D<0,* и нижние знаки в противном случае.

6.3 Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть плоскость не параллельна ни одной из осей координат.



Тогда эта плоскость отсекает на осях координат отрезки *OM, ON, OP*. Обозначим через *a,b,c* величины этих отрезков.

Запишем общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Выразим теперь коэффициенты уравнения через параметры *a,b* и *c.*

Т.к. точка *M(a,0,0)* лежит на данной плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\boxed{A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0}$$ **или** $$\boxed{A \cdot a + D = 0}$$

Тогда $$A = -\frac{D}{a}$$

Аналогично координаты точки *N(0,b,0)* должны удовлетворять уравнению

$$\boxed{A \cdot 0 + B \cdot b + C \cdot 0 + D = 0}$$ **и** $$B = -\frac{D}{b}$$

и для точки *P(0,0,c)*

$$A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot c+D=0$$

$$C=-\frac{D}{c}$$

Подставив полученные значения *A,B и C* в уравнение плоскости, получим

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

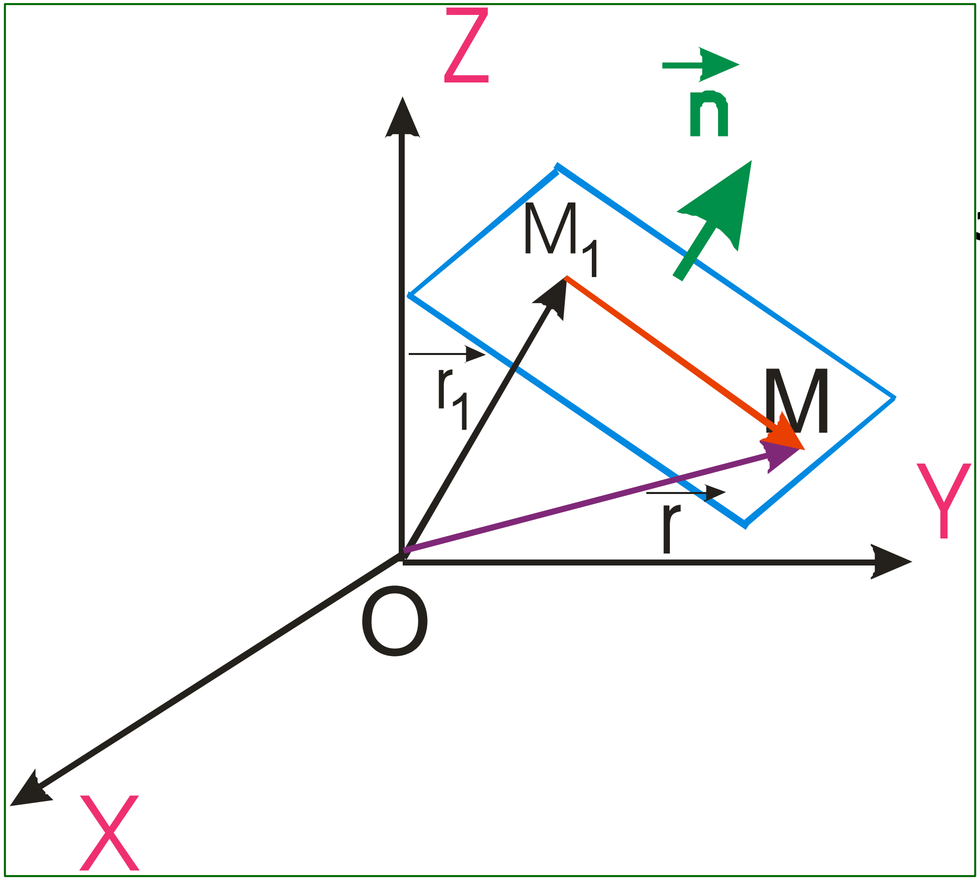
Сократив на *D* получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6.5)$$

Уравнение называется уравнением плоскости в отрезках.

6.4 Уравнение плоскости проходящей через данную точку.

Пусть требуется составить уравнение плоскости,



проходящей через точку

$$M_1,$$

заданную радиус вектором

$$\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$$

и перпендикулярной вектору

$$\vec{n}(A, B, C).$$

Возьмем на плоскости произвольную точку *M(x,y,z)*. Из рисунка видно

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$$

Т.к. $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n},$ **то** $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$ **или**

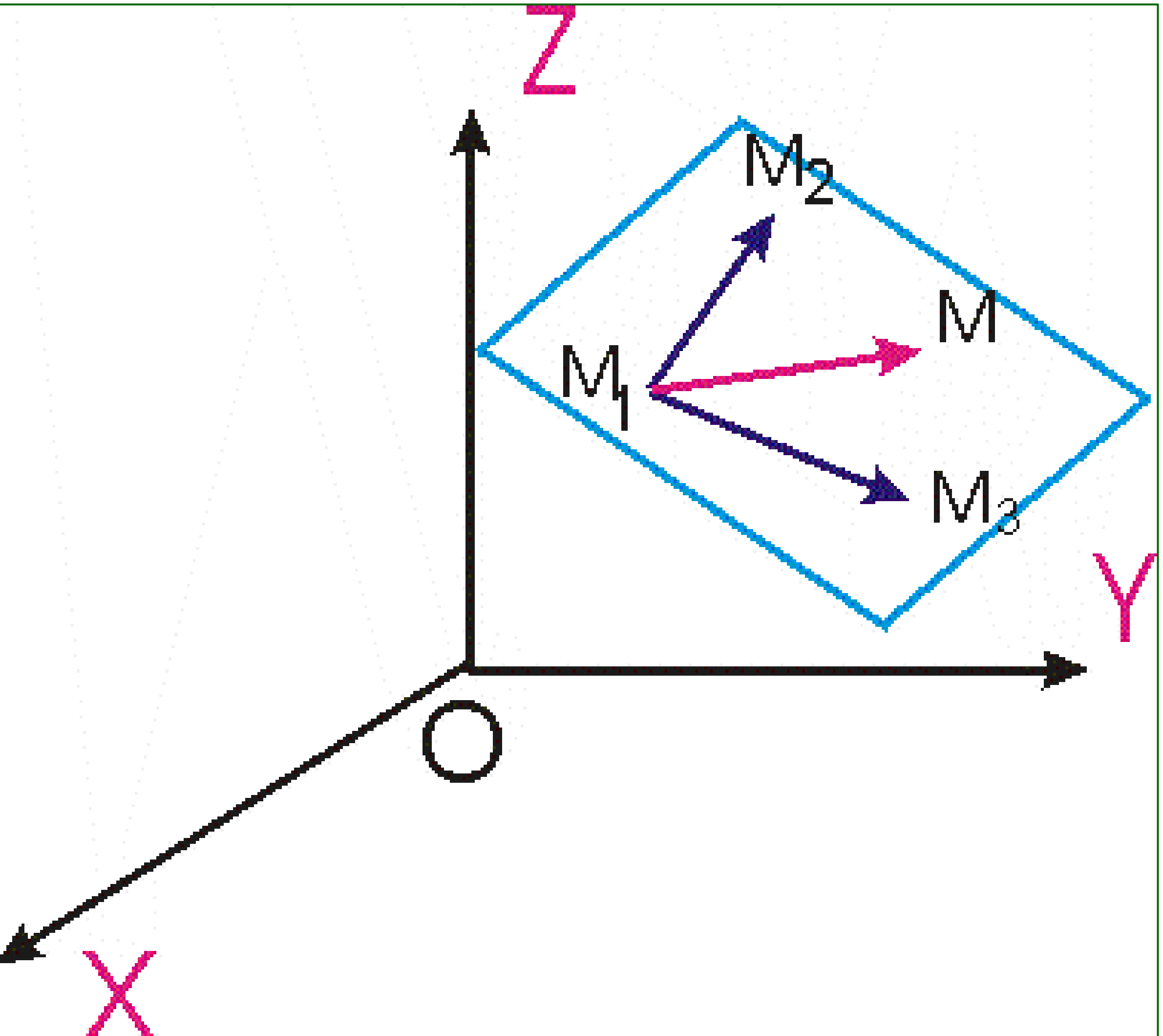
$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \qquad (6.6)$$

Уравнение (6.6) есть векторное уравнение плоскости. В координатной форме оно имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (6.7)$$

6.5 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пусть даны три точки:



$$M_1(x_1, y_1, z_1),$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2),$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3),$$

не принадлежащие одной прямой.

Эти три точки определяют плоскость.

Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ **компланарны.**

Следовательно, смешанное произведение этих трех векторов должно быть равно нулю.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Т.к. $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1), \overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$

$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$ **получим**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.8)$$

Получили уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пример:

Составить уравнение плоскости проходящей через точки

$$M_1(1,2,1), M_2(5,7,3), M_3(6,4,5)$$

Решение:

Применяя равенство (6.8), запишем уравнение искомой плоскости в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 5-1 & 7-2 & 3-1 \\ 6-1 & 4-2 & 5-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем

$$(x-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$16\cdot(x-1)-6\cdot(y-2)-17\cdot(z-1)=0$$

$$16x-6y-17z-16+12+17=0$$

$$16x-6y-17z+13=0$$

6.6 Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Пусть даны две плоскости:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

Нормальные векторы этих плоскостей

$$\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1),$$
$$\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2).$$

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов. Один из этих двугранных углов равен углу между векторами

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2.$$

Второй двугранный угол будет дополнять его до 180^0. Следовательно

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2| \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Если плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2$

также перпендикулярны, и поэтому их скалярное произведение должно быть равно нулю

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Получили *условие перпендикулярности плоскостей.*

Условие параллельности плоскостей в векторной форме можно записать в виде

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$$

Переходя к проекциям получим

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$$

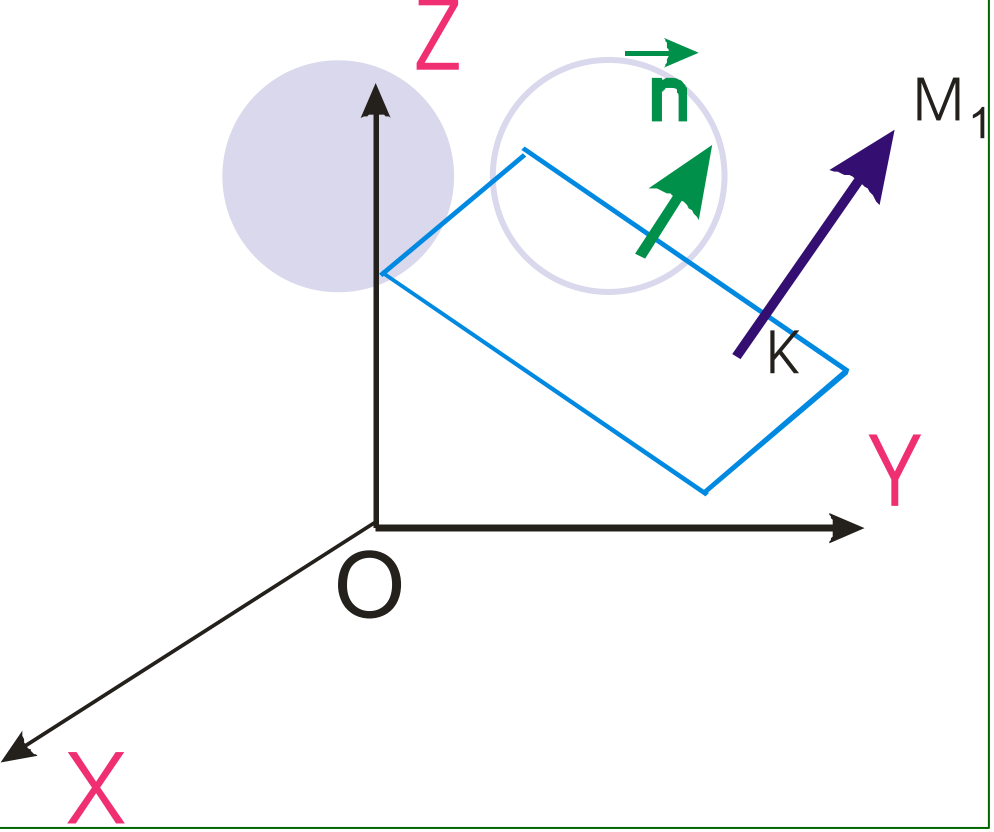
Или условие параллельности плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

6.7 Расстояние от точки до плоскости.

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$

до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$



Опустим из точки M_1

перпендикуляр M_1K

на данную плоскость.

Тогда расстояние *d* от точки до плоскости будет равно модулю вектора $\overrightarrow{KM_1}$.

Т.к. вектор $\overrightarrow{KM_1}$ и нормальный вектор $\vec{n}(A, B, C)$

плоскости параллельны между собой, то их скалярное произведение

$$\vec{n}\,\overrightarrow{KM_1} = \pm|\vec{n}|d$$

Пусть точка *K* имеет координаты $K(x_0, y_0, z_0)$,

тогда $\overrightarrow{KM}_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Выразим скалярное произведение $\vec{n}\,\overrightarrow{KM}_1$

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \pm|\vec{n}|d$$

В левой части раскроем скобки, прибавим и вычтем *D*. Получим

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = \pm|\vec{n}|d$$

т.к. точка $K(x_0, y_0, z_0)$ **принадлежит плоскости, то**

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

И равенство принимает вид

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \pm|\vec{n}|d$$

Отсюда искомое расстояние от точки до плоскости, равно

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$