Оглавление

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ.

1. Недостаточность множества действительных чисел

Рассмотрим уравнение

$$x^2+1=0. \qquad (1)$$

Это уравнение не имеет решений на множестве действительных чисел, т.е. не существует действительного числа x, для которого справедливо равенство (1). Это побуждает к построению более широкого числового множества, на котором уравнение (1) имело бы решение. Грубо построение такого расширения можно описать следующим образом. Введем искусственно «число», удовлетворяющее равенству (1) (обозначим его, например: $i : i^2+1=0, i^2=-1$), добавим его к множеству действительных чисел (оно обозначается R) и на основании множества R и «числа» i построим новое числовое множество, элементы которого будут иметь вид $x+iy$, где $x, y \in R$. На этом множестве определим естественным образом операции сложения и умножения. Построенное множество назовем множеством комплексных чисел и обозначим его C, число i назовем мнимой единицей.

2. Систематическое построение множества комплексных чисел

Рассмотрим двумерное векторное пространство U. Пусть $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ - его базис. Любой вектор $\overline{a}$ из U однозначно записывается в виде $\overline{a}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2},\ a_1, a_2 \in R$. В пространстве U, по определению векторного пространства, имеются операции сложения и умножения на число: если $\overline{a}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2},\ \overline{b}=b_1\overline{e_1}+b_2\overline{e_2}$ и $\alpha \in R$, то

$$\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1)\overline{e_1}+(a_2+b_2)\overline{e_2},\ \alpha\overline{a}=\alpha a_1\overline{e_1}+\alpha a_2\overline{e_2}.$$

Поставим себе дополнительную задачу определения операции умножения на U, чтобы эта операция обладала обычными свойствами умножения. Перечислим требования к этому умножению:

1) если $\alpha, \beta \in R$, то $(\alpha\overline{a})\cdot(\beta\overline{b})=\alpha\beta\,\overline{a}\cdot\overline{b}$;
2) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$;
3) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

Очевидно, из 2 и 3 следует

4) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Действительно,

$$(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=[no\ \ 3.]=\overline{c}\cdot(\overline{a}+\overline{b})=[no\ \ 2.]=\overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{c}\cdot\overline{b}=[no\ \ 3.]=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

Пусть $\overline{a}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2},\ \overline{b}=b_1\overline{e_1}+b_2\overline{e_2}$. Применим 1. – 4. к вычислению $\overline{a}\cdot\overline{b}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2})(b_1\overline{e_1}+b_2\overline{e_2})=a_1b_1\overline{e_1}\cdot\overline{e_1}+a_1b_2\overline{e_1}\cdot\overline{e_2}+a_2b_1\overline{e_2}\cdot\overline{e_1}+a_2b_2\overline{e_2}\cdot\overline{e_2}=$$

$$=a_1b_1\overline{e_1}\cdot\overline{e_1}+a_2b_2\overline{e_2}\cdot\overline{e_2}+(a_1b_2+a_2b_1)\overline{e_1}\cdot\overline{e_2}.$$

Для полной определенности операции умножения осталось указать значения произведений $\overline{e_1}\cdot\overline{e_1}, \overline{e_1}\cdot\overline{e_2}, \overline{e_2}\cdot\overline{e_2}$. Для того, чтобы полученное числовое множество расширяло множество R, потребуем, чтобы вектор $\overline{e_1}$ вел себя как обыкновенная единица: $\overline{e_1}\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{e_1}=\overline{a}$. Тогда $\overline{e_1}\cdot\overline{e_1}=\overline{e_1},\ \overline{e_1}\cdot\overline{e_2}=\overline{e_2}\cdot\overline{e_1}=\overline{e_2}$, и мы получаем

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1\overline{e_1}+a_2b_2\overline{e_2}\cdot\overline{e_2}+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)\overline{e_2}. \qquad (2)$$

Осталось определить значение $\overline{e_2}\cdot\overline{e_2}$. Несмотря на кажущееся бесконечное многообразие возможностей такого определения, на самом деле принципиально возможны только три случая:

$$1)\ \overline{e_2}\cdot\overline{e_2}=-\overline{e_1};\quad 2)\ \overline{e_2}\cdot\overline{e_2}=\overline{e_1};\quad 3)\ \overline{e_2}\cdot\overline{e_2}=0.$$

Любое другое определение приводит к одному из указанных случаев после замены базиса. Поскольку мы хотим иметь $i^2=-1$, а свойствами единицы мы наделяем вектор $\overline{e_1}$, выберем первый случай: $\overline{e_2}\cdot\overline{e_2}=-\overline{e_1}$. Теперь равенство (2) примет вид:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(a_1b_1-a_2b_2\right)\overline{e_1}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\overline{e_2}. \qquad (3)$$

Определение. Векторное пространство U с определенной выше операцией умножения называется множеством комплексных чисел и обозначается C, его элементы называются комплексными числами. Число $\overline{e_2}$ называется мнимой единицей.

3. Алгебраическая форма записи комплексного числа

По данному выше определению умножения

$$\overline{e_1}\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{e_1}=\overline{a}=1\cdot\overline{a},$$

т.е. число $\overline{e_1}$ ведет себя как число 1. Поэтому естественно не различать эти числа и писать в место $\overline{e_1}$ число 1; вместо $\overline{e_2}$ будем писать i. Теперь произвольное комплексное число запишется в виде $x+iy$. Будем обозначать произвольное комплексное число буквой z, тогда получим

$$z=x+iy, \qquad (4)$$

где i обладает определяющим свойством

$$i^2=-1. \qquad (5)$$

и называется мнимой единицей. Равенство (4) называется алгебраической формой записи комплексного числа; x называется действительной частью, y – мнимой частью числа z: $x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z$.

4. Арифметические операции

4.1.Сложение. Пусть $z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2$.Тогда $z_1+z_2=x_1+x_2+i\left(y_1+y_2\right)$. Т.е. $\operatorname{Re}\left(z_1+z_2\right)=\operatorname{Re}z_1+\operatorname{Re}z_2,\quad \operatorname{Im}\left(z_1+z_2\right)=\operatorname{Im}z_1+\operatorname{Im}z_2$. Как обычно, сумму $z_1+\left(-1\right)z_2$ обозначим z_1-z_2 и назовем разностью: $z_1-z_2=x_1-x_2+i\left(y_1-y_2\right)$.

4.2. Умножение. Раскрывая скобки и учитывая (5), получим

$$z_1z_2=\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2+iy_2\right)=x_1x_2-y_1y_2+i\left(x_1y_2+x_2y_1\right)$$

Т.е. $\operatorname{Re}z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2$, $\operatorname{Im}z_1z_2=x_1y_2+x_2y_1$.

Очевидно $\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)=x^2+y^2\in R$. Число $x-iy$ называется комплексно сопряженным числу $z=x+iy$ и обозначается $\overline{z}$. Мы получили, что $z\overline{z}=x^2+y^2\in R$, причем, если $z\neq 0$, то $z\overline{z}\neq 0$. Очевидно $\overline{\overline{z}}=z$.

Упражнение 1. Показать, что:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

3) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, где $n -$натуральное.

4.3. Деление. Произвести деление $\frac{z_1}{z_2}$ значит решить уравнение $z_2 z = z_1$. Если $z_2 = 0$, то при $z_1 \neq 0$ решений нет, а при $z_1 = 0$ решением является любое z. Значит, как обычно, на ноль делить нельзя. Пусть $z_2 \neq 0$. Умножим обе части уравнения на $\overline{z_2}$. Получим $\overline{z_2} z_2 z = \overline{z_2} z_1$. Произведение $\overline{z_2} z_2$ является ненулевым действительным числом. Умножим обе части последнего равенства на $\frac{1}{\overline{z_2} z_2} \in R$ и получим $z = \frac{1}{\overline{z_2} z_2} \overline{z_2} z_1$. Значит, деление $\frac{z_1}{z_2}$, при $z_2 \neq 0$, возможно и $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$.

Пример. Получим алгебраическую форму записи числа $\frac{3+5i}{2-7i}$.

$$\frac{3+5i}{2-7i} = \frac{(3+5i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{6-35+(21+10)i}{4+49} = -\frac{29}{53} + \frac{31}{53} i .$$

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Рассмотрим координатную плоскость OXY и сопоставим числу $z = x + iy$ точку M с координатами $(x; y)$. При этом, учитывая определение комплексного числа как вектора, мы можем отождествить число $z = x + iy$ с вектором $\overline{OM}(x; y)$. При таком отождествлении сложение комплексных чисел будет проводиться по правилу параллелограмма, как складываются векторы на плоскости (см. рис.1).

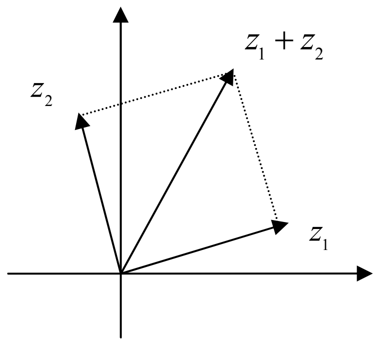

Рис.1. Сложение комплексных чисел

6. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Рассмотрим число $z = x + iy$ в геометрической интерпретации и введем на координатной плоскости OXY обычным образом полярные координаты $(\rho; \varphi)$.

Напоминание. Полярными координатами точки $M(x; y)$ называются параметры ρ и φ, где $\rho -$длина вектора $\overline{OM}$, $\varphi -$угол между $\overline{OM}$ и осью OX: $\rho = \left|\overline{OM}\right|$, $\varphi = \overline{OM}^{\wedge} OX$ (см. рис.2).

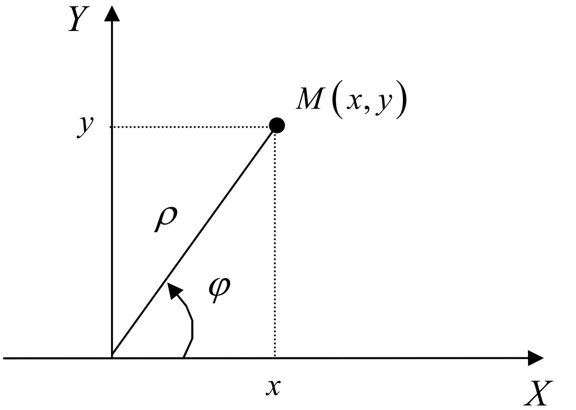

Рис.2. Полярные координаты

Очевидно $\rho \geq 0$; угол φ удобно считать принимающим множество значений, чередующихся через 2π. Очевидны равенства

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} + \pi n. \end{cases} \quad (7)$$

В последнем равенстве, если точка M лежит в 1-ой или 4-ой четверти, нужно брать n четным: $n = 2m$; если точка M лежит во 2-ой или 3-ей четверти, нужно брать n нечетным: $n = 2m + 1$.

Вернемся к комплексному числу $z = x + iy$. Из (6)

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (8)$$

Координата ρ называется модулем числа z, пишется $|z|$; координата φ называется аргументом z, пишется $Arg\ z : |z| = \rho,\ Arg\ z = \varphi$. Будем одновременно допускать две записи: $Arg\ z = \varphi$ и $Arg\ z = \varphi + 2\pi n$. Равенство (8) будем записывать в виде

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\right). \qquad (9)$$

и называть тригонометрической формой записи числа z. Из (7) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это обычная длина вектора z. Очевидно, $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z},\ Arg\ \bar{z} = -Arg\ z$ (см. рис.3).

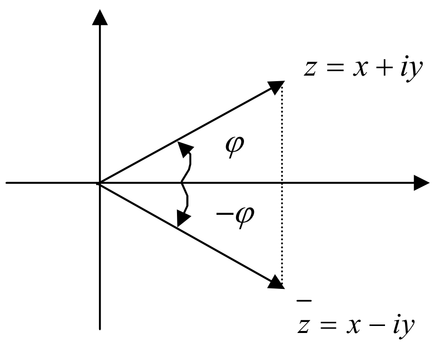

Рис.3. Сопряженные комплексные числа

Упражнение 2. Показать, что $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z^n| = |z|^n$ при целом n.

Рассмотрим операцию умножения в тригонометрической форме записи. Пусть

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\ z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right)\right) =$$
$$= |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

Отсюда, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (мы доказали это равенство еще раз); $Arg\ z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$. Пусть $|z_1| = |z_2| = 1$, т.е. $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1,\ z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$. Тогда

$$z_1 z_2 = \cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right). \qquad (10)$$

Числа z_1, z_2 и $z_1 \cdot z_2$ лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат (уравнение этой окружности $|z| = 1$) и умножение состоит в сложение аргументов.

7. Показательная форма записи комплексного числа

Определение. Положим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \ (11)$$

Это определение мотивировано тем, что по (10) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, как и положено для показательной функции. Теперь (9) можно записать в виде

$$z = |z|e^{i\varphi}. \qquad (12)$$

Равенство (12) называется показательной формой записи комплексного числа z. Если $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1},\ z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, то $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Отметим, что $e^{i2\pi n} = 1$.

8. Функция e^z

Определение. Положим $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{i-y}$

Учитывая (11), получаем для $z = x + iy$

$$e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \qquad (13)$$

Равенство (13) дает e^z в тригонометрической форме: $|e^z| = e^x,\ Arg\ e^z = y$.

Упражнение 3. Показать, что $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Это обычное свойство экспоненты, но появляется и необычное: $e^{z+i2\pi n} = e^z$. Действительно, $e^{z+i2\pi n} = e^z \cdot e^{i2\pi n} = e^z \cdot 1 = e^z$. Мы показали, что функция e^z является периодичной с периодом $i2\pi n$.

9. Функции $\cos z$ и $\sin z$

Из равенства (11)

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (14)$$

Сложим (11) и (14):

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right). \qquad (15)$$

Вычтем (14) из (11):

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right). \qquad (16)$$

Равенства (15) и (16) являются простым следствием (11) и, в свою очередь, мотивируют следующее определение.

Определение. Положим

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right). \end{aligned} \qquad (17)$$

Упражнение 4. Показать:

1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

2) $\cos\left(z_1 + z_2\right) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

3) $\sin\left(z_1 + z_2\right) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

4) $\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z$;

5) $\cos\left(z + 2\pi n\right) = \cos z,\ \sin\left(z + 2\pi n\right) = \sin z$.

Следствие. Если $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x\, chy - i \sin x\, shy, \\ \sin z &= \sin x\, chy + i \cos x\, shy, \end{aligned} \qquad (18)$$

где $chy = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right)$ – гиперболический косинус, $shy = \frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)$ – гиперболический синус.

Доказательство. Из (17)

$$\cos iy = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right) = chy, \qquad \sin iy = \frac{1}{2i}\left(e^{-y} - e^{y}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right) = i\, shy.$$

Тогда

$$\cos\left(x + iy\right) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x\, chy - i \sin x\, shy,$$

$$\sin\left(x + iy\right) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\, chy + i \cos x\, shy.$$

Замечание. Равенства (18) дают алгебраическую форму записи $\cos z$ и $\sin z$. Приведенные свойства обычно для косинуса и синуса. Укажем и необычное. Функции $\cos z$ и $\sin z$ не ограничены. Можно показать, что $|\cos z|$ и $|\sin z|$ могут принимать любые положительные значения.

Пример. Решить уравнение $\cos z = 2$.

В силу (18) имеем $\cos x\, chy - i \sin x\, shy = 2 = 2 + i0$. Значит, $\cos x\, chy = 2$ и $\sin x\, shy = 0$. Последнее равенство дает две возможности: $shy = 0$ или $\sin x = 0$. Если $shy = 0$, то $e^{y} = e^{-y},\ y = 0,\ chy = 1$; тогда из первого равенства $\cos x = 2$ и решений нет. Рассмотрим $\sin x = 0$. Тогда $x = \pi n$ и $\cos x = \pm 1$.

1) $n = 2m + 1,\ \cos x = -1$. Тогда $chy = -2$, решений нет, т.к. функция chy принимает только положительные значения;

2) $n = 2m,\ \cos x = 1$, значит, $chy = 2$.

Последнее уравнение легко решается. $\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)=2,\ e^{y}+e^{-y}=4,\ e^{2y}-4e^{y}+1=0$.

Замена: $t=e^{2y}>0;\ t^{2}-4t+1=0,\ t_{1}=2+\sqrt{3},\qquad t_{2}=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$;

$y=\ln t=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)=\pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Итак, $x=2m,\ y=\pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Значит, $z=2\pi m\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

10. Уравнение $z^{n}=c$

Рассмотрим уравнение

$$z^{n}=c, \qquad (19)$$

где $c-$ комплексная константа. Представим z и c в показательной форме: $z=|z|e^{i\varphi},\ c=|c|e^{i\phi}$, тогда $z^{n}=|z|^{n}e^{in\varphi}$ и получаем уравнение $|z|^{n}e^{in\varphi}=|c|e^{i\phi}$. Приравняем модули и аргументы с учетом многозначности аргумента.

$$\begin{cases}|z|^{n}=|c|\\ n\varphi=\phi+2\pi m,\end{cases}\qquad \begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|c|}\\ \varphi=\dfrac{\phi}{n}+\dfrac{2\pi}{n}m.\end{cases}$$

Пусть $\varphi_{m}=\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}m,\quad z_{m}=\sqrt[n]{|c|}\,e^{i\varphi_{m}}$. При изменении m от 0 до $n-1$ получаем n различных решений уравнения (19), т.к. φ_{m} - различные углы, лежащие от 0 до 2π. Если будем брать другие целые m, то получим повторение корней. Например, если $m=n$, то

$$\varphi_{m}=\varphi_{n}=\frac{\phi}{n}+2\pi,\qquad z_{n}=\left|\sqrt[n]{|c|}\right|e^{i\frac{\phi}{n}+i2\pi}=z_{0}.$$

Аналогично $z_{n+1}=z_{1},\ z_{n+2}=z_{2},\ z_{-1}=z_{n-1},\ z_{-2}=z_{n-2}$ и т.д. Мы получили ровно n различных решений уравнения (19): $z_{0},z_{1},\ldots,z_{n-1}$. Они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|c|}$ с центром в начале системы координат; аргументы соседних решений отличаются на $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{n}$. Последний фактор позволяет несколько изменить алгоритм нахождения решений. Можно не писать многозначного аргумента.

$$z^{n}=c;\ z=|z|e^{i\varphi},\ c=|c|e^{i\phi},\ z^{n}=|z|^{n}e^{in\varphi},\ \text{тогда}\ |z|^{n}e^{in\varphi}=|c|e^{i\phi}.$$

$$\begin{cases}|z|^{m}=|c|\\ n\,\varphi=\phi\\ \Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{n},\end{cases}\qquad \begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|c|}\\ \varphi=\dfrac{\phi}{n}\\ \varphi_{m}=\dfrac{\phi}{n}+\Delta\varphi\cdot m,\ m=0,\ldots,n-1.\end{cases}$$

$$z_{m}=\sqrt[n]{|c|}\,e^{i\varphi m},\ m=0,\ldots,n-1.$$

Пример. Решить уравнение $z^{3}=8i$.

$$z=|z|e^{i\varphi},\ i=e^{i\frac{\pi}{2}};\ z^3=|z|^3e^{i3\varphi}. \text{ Тогда } |z|^3e^{i3\varphi}=8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{cases} |z|^3=8, & |z|=2; \\ 3\varphi=\dfrac{\pi}{2}, & \varphi=\dfrac{\pi}{6}; \\ \Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{3}, & \varphi_m=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}m,\ m=0,1,2. \end{cases}$$

$$z_m=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}m\right)},\ m=0,1,2;\ \varphi_0=\frac{\pi}{6},\ \varphi_1=\frac{5\pi}{6},\ \varphi_2=\frac{3\pi}{2};$$

$$z_0=2e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+i,\ z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\sqrt{3}+i,\ z_2=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2i.$$

11. Комплексный многочлен

Определение. Комплексным многочленом степени n называется функция комплексной переменной z вида

$$P_n(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_iz+c_0, \qquad (20)$$

где $c_0,\ldots,c_n$ – комплексные константы и $c_n\neq 0$.

Теорема. Если $n\geq 1$, то существует комплексное число z_1, для которого справедливо равенство $P_n(z_1)=0$.

Без доказательства.

Замечание. Теорема утверждает, что уравнение $P_n(z)=0$ при $n\geq 1$ всегда имеет решение. Этим комплексный многочлен отличается от действительного, который часто корней не имеет (например, ax^2+bx+c при отрицательном дискриминанте).

Следствие 1. Если $n\geq 1$, то многочлен $P_n(z)$ может быть представлен в виде.

$$P_n(z)=(z-z_1)Q_{n-1}(z), \qquad (21)$$

где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен степени $n-1$ с коэффициентом c_n при z^{n-1}.

Доказательство. Пусть z_1 – корень многочлена $P_n(z)$, который существует по теореме. Сделаем замену $\varsigma=z-z_1$, тогда $z=\varsigma+z_1$ и

$$P_n(z)=P_n(\varsigma+z_1)=c_n(\varsigma+z_1)^n+\ldots+c_1(\varsigma+z_1)+c_0.$$

Раскроем скобки и получим некоторый многочлен n-й степени $S_n(\varsigma)$, зависящий от ς, у которого коэффициент при старшей степени ς^n, очевидно, останется тем же т.е. c_n:

$$S_n(\varsigma)=P_n(\varsigma+z_1)=c'_n\varsigma^n+c'_{n-1}\varsigma^{n-1}+\ldots+c'_1\varsigma+c'_0,\ c'_n=c_n.$$

Поскольку $P_n(z)=S_n(z-z_1)$ и $P_n(z_1)=0$, то $S_n(0)=0$. Значит, $c'_0=0$. Т.е. $S_n(\varsigma)=c'_n\varsigma^n+\ldots+c'_1\varsigma=\varsigma\left(c'_n\varsigma^{n-1}+..+c'_1\right)$. Тогда

$$P_n(z)=S_n(z-z_1)=(z-z_1)\left(c'_n(z-z_1)^{n-1}+\ldots+c'_1\right).$$

Обозначим: $Q_{n-1}(z)=c'_n\left(z-z_1\right)^{n-1}+...+c'_1$. Раскроем скобки и получим многочлен $n-1$-й степени, у которого коэффициент при старшей степени равен c'_n; учтем $c'_n=c_n$ и получим нужное равенство (21). Сл.1. доказано.

Следствие 2. Если $n\geq 1$, то многочлен $P_n(z)$ может быть представлен в виде:

$$P_n(z)=c_n\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)....(z-z_n), \tag{22}$$

где $z_1,z_2,...,z_n$ - его корни.

Доказательство. Запишем $P_n(z)$ в виде (21). Применим следствие 1 к многочлену $Q_{n-1}(z)$, тогда его можно представить в виде $Q_{n-1}(z)=\left(z-z_2\right)Q_{n-2}(z)$. Проведя эту процедуру многократно, получим равенство (22). Из (22) очевидно, что, если z_k одно из чисел $z_1,....,z_n$, то $P_n\left(z_k\right)=0$, т.е. z_k - корень многочлена $P_n(z)$. Сл.2 доказано.

Среди корней $z_1,...,z_n$ могут быть и одинаковые. Пусть m - число различных корней: $m\leq n$. Обозначим различные корни $z_1,....,z_m$. В правую часть (22) множитель $z-z_k$ может входить несколько раз. Обозначим число вхождений этого множителя – j_k, оно называется кратностью корня z_k. Тогда (21) примет вид

$$P_n(z)=c_n\left(z-z_1\right)^{j_1}\left(z-z_2\right)^{j_2}....(z-z_m)^{j_m}, \tag{23}$$

причем $j_1+j_2+...+j_m=n$.

Замечание. Равенство (23) не может быть дословно распространено на действительный многочлен. Но с некоторым видоизменением такое распространение можно сделать.

12. Комплексный многочлен с действительными коэффициентами

Рассмотрим комплексный многочлен (20) при условии, что все его коэффициенты $c_0,...,c_n$ - действительны. Обозначим эти коэффициенты $a_0,...,a_n$ и запишем многочлен в виде

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0, \quad a_0,...,a_n\in R. \tag{24}$$

Предложение. Пусть $z_1=\alpha+i\beta$ - корень комплексного многочлена (24). Тогда $z_2=\overline{z_1}=\alpha-i\beta$ – тоже корень этого многочлена и кратности корней z_1,z_2 равны.

Доказательство. Поскольку $a_0,...,a_n\in R$, то $\overline{a_0}=a_0,...,\overline{a_n}=a_n$ (черточка обозначает комплексное сопряжение). Тогда $\overline{P_n(z)}=\overline{a_nz^n+...+a_0}=\overline{a_n}\,\overline{z}^n+...+\overline{a_0}=a_n\overline{z}^n+...+a_0=P_n\left(\overline{z}\right)$. Значит, если $P_n\left(z_1\right)=0$, то $0=\overline{0}=\overline{P_n\left(z_1\right)}=P_n\left(\overline{z_1}\right)$, т.е. $P_n\left(\overline{z_1}\right)=0$ и $\overline{z_1}$ – корень многочлена $P_n(z)$. Доказательство равенства кратностей оставляем для упражнения. Его не трудно провести, ознакомившись с дальнейшим изложением.

Перейдем к рассмотрению модификации разложений (22) и (23) для многочлена (24). Пусть $z_1=\alpha+i\beta$ и $z_2=\alpha-i\beta$ - два корня многочлена (24). Рассмотрим произведение:

$$\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)=\left(z-z_1\right)\left(z-\overline{z_1}\right)=z^2-z\left(z_1-\overline{z_1}\right)+z_1\overline{z_1}=z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2.$$

Обозначим: $p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2$. Тогда $(z-z_1)(z-z_2)=z^2+pz+q$, причем $D=p^2-4q<0$. Теперь, учитывая равенство кратностей комплексного сопряженных корней, рассмотрим разложение (23). Разобьем корни на действительные $b_1,...,b_{m_1}$ с кратностями $j_1,...,j_{m_1}$ и комплексно сопряженные пары $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_1-i\beta_1,..., \alpha_{m_2}+i\beta_{m_2}, \alpha_{m_2}-i\beta_{m_2}$ с кратностями $j'_1,...,j'_{m_2}$. Пусть $p_k=-2\alpha_k, q_k=\alpha_k^2+\beta_k^2$. Тогда (23) для (24) примет вид

$$P_n(z)=a_n(z-b_1)^{j_1}....(z-b_{m_1})^{j_{m_1}}\left(z^2+p_1z+q_1\right)^{j'_1}....\left(z^2+p_{m_2}z+q_{m_2}\right)^{j'_{m_2}}, \quad (25)$$

где $j_1+...+j_m+2\left(j'_1+...+j'_{m_2}\right)=n$ и все квадратные трехчлены имеют отрицательный дискриминант.

Перенесем полученный результат на действительный многочлен. Рассмотрим многочлен (24) при условии, что z принимает только действительное значение: $z=x\in R, P_n(x)=a_nx^n+...+a_nx+a_0$.

Предложение. Многочлен $P_n(x)$ представим в виде аналогичном (25):

$$P_n(x)=a_n(x-b_1)^{j_1}....(x-b_{m_1})^{j_{m_1}}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{j'_1}+...+\left(x^2+p_{m_2}x+q_{m_2}\right)^{j'_{m_2}}, \quad (26)$$

где $j_1+...+j_{m_1}+2j'_m+...+2j'_{m_2}=n$ и все квадратные трехчлены имеют отрицательный дискриминант.

Замечание. Очевидно $b_1,...,b_{m_1}$ – полный перечень действительных корней многочлена $P_n(x)$.

Доказательство. Рассмотрим вместо $P_n(x)$ многочлен $P_n(z)$ с комплексным z. Для него справедливо разложение (25). Ограничимся только действительными значениями z ,т.е. для $z=x+iy$ положим $y=0$. Тогда (25) примет вид (26).

Пример. Разложить на множители многочлен $P_4(x)=x^4+1$.

Рассмотрим $P_4(x)=x^4+1$ и решим уравнение $P_4(z)=0$. Тогда

$$z^4+1=0, z^4=-1;\ z=|z|e^{i\varphi}, z^4=|z|^4e^{i\varphi}, -1=e^{i\pi}.$$

$$\begin{cases} |z|^4=1 \\ 4\varphi=\pi \\ \Delta\varphi=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} |z|=1 \\ \varphi=\frac{\pi}{4} \\ \varphi_k=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, \quad k=0,1,2,3. \end{cases}$$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Очевидно $z_3=\overline{z}_0, z_2=\overline{z}_1$.

$$\left(z-z_0\right)\left(z-z_3\right)=\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=z^2-\sqrt{2}\,z+1,$$

$$\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)=\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=z^2+\sqrt{2}\,z+1.$$

Равенство (25) примет вид

$$P_4\left(z\right)=z^4+1=\left(z^2-\sqrt{2}\,z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}\,z+1\right).$$

Значит,

$$x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)$$

13. Функции действительной переменной с комплексными значениями

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ две действительные функции действительной переменной t. Рассмотрим функцию

$$f(t)=g(t)+i\,h(t). \qquad (27)$$

Она принимает комплексные значения. Для нее естественным образом вводятся понятия непрерывности и дифференцируемости. Она непрерывна, если непрерывны $g(t)$ и $h(t)$; дифференцируема, если дифференцируемы $g(t)$ и $h(t)$, при этом

$$f'(t)=g'(t)+i\,h'(t).$$

Пример. Пусть $c=a+i\,b, f(t)=e^{ct}$, т.е. $f(t)=e^{\left(a+i\,b\right)t}=e^{at}\left(\cos bt+i\sin bt\right)$. Эта функция очевидно непрерывна и дифференцируема. Вычислим ее производную:

$$f'(t)=a\,e^{at}\left(\cos bt+i\sin bt\right)+e^{at}\left(-b\sin bt+i\,b\cos bt\right)=$$

$$=\left(a+ib\right)e^{at}\left(\cos bt+c\sin bt\right)=c\,e^{ct}.$$

Упражнение 5. Показать:

$(\cos ct)'=-c\sin ct,\ (\sin ct)'=c\cos ct;$

$\left(ch\,ct\right)'=c\,sh\,ct,\ \left(sh\,ct\right)'=c\,ch\,ct.$

Функции вида (27) важны в теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{\left(n-1\right)}+...+a_1y'+a_0=0, \qquad (28)$$

где $a_0,...,a_{n-1}-$ известные действительные функции действительной переменной t: $a_k=a_k(t),\ y=y(t)-$ искомая неизвестная функция, которая может рассматриваться и комплекснозначной, $y^{\left(k\right)}-$ k-тая производная.

Напоминание из теории дифференциальных уравнений. Общее (действительное) решение уравнения (28) имеет вид $y(t)=C_1y_1(t)+...+C_ny_n(t)$, где $y_1(t),...,y_n(t)-$ линейно независимые частные (действительные) решения уравнения (28).

Предложение. Пусть $y(t)=y_1(t)+i\,y_2(t)-$ комплекснозначное решение уравнения (28), где $y_1(t)$ и $y_2(t)-$ действительные функции. Тогда $y_1(t)$ и $y_2(t)-$ тоже решения уравнения (28).

Доказательство. Простое упражнение.

Рассмотрим уравнение (28) при условии, что $a_0,...,a_{n-1}-$ действительные константы, т.е. уравнение с постоянными коэффициентами. Будем искать частные решения этого уравнения в виде $y=e^{\lambda t}$. Тогда $y^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda t}$ и, подставляя в (28), получим

$$\lambda^n e^{\lambda t}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+...+a_1\lambda e^{\lambda t}+a_0 e^{\lambda t}=0.$$

Сократим на $e^{\lambda t}$:

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0. \qquad (29)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (28). Перечислим его решения. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_{m_1}$ его действительные решения с кратностями $j_1,..,j_{m_1}$; $\mu_1,\overline{\mu}_1,...,\mu_{m_2},\overline{\mu}_{m_2}-$ пары комплексно сопряженных решений с кратностями $j'_1,...,j'_{m_2}$. Не сложно проверяется, что, если $\lambda-$ корень уравнения (29) кратности j (безразлично действительный или комплексный), то функции $e^{\lambda t}, te^{\lambda t},..., t^{j-1}e^{\lambda t}-$ линейно независимые решения уравнения (28). Если $\lambda-$ действительный корень, то эти решения действительны. Пусть $\lambda=\alpha+i\,\beta$ - комплексный корень. Тогда

$$y(t)=e^{\lambda t}=e^{(\alpha+i\,\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)=e^{\alpha t}\cos\beta t+i\,e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

По предложению действительные функции $y_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $y_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$ тоже являются решениями. Если λ имеет кратность m, то при $k<m$ решением является комплекснозначная функция $y=t^k e^{\lambda t}=t^k e^{\alpha t}\cos\beta t+i\,t_k e^{\alpha t}\sin\beta t$, а значит, и две действительные функции $y_1=t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $y_2=t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$. Подведем итог. Если $\lambda_1,...,\lambda_{m_1}$ – действительные решения уравнения (29) с кратностями $j_1,...,j_{m_1}$ и $\mu_1=\alpha_1+i\beta_1,\ \overline{\mu}_1=\alpha_1-i\beta_1,...,\mu_{m_2}=\alpha_{m_2}+i\beta_{m_2},\ \overline{\mu}_{m_2}=\alpha_{m_2}-i\beta_{m_2}$ – пары комплексно сопряженных корней с кратностями $j'_1,...,j'_{m_2}$, то мы получаем n различных частных решений уравнения (28):

$$e^{\lambda_1 t},...,t^{j_1-1}e^{\lambda_1 t};...\ e^{\lambda_{m_1}t},...,t^{j_{m_1}-1}e^{\lambda_{m_1}t};e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,...\ e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,...\ t^{j'_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,$$

$$t^{j'_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t;...\ e^{\alpha_{m_2}t}\cos\beta_{m_2}t,\ e^{\alpha_{m_2}t}\sin\beta_2 t,...\ t^{j'_{m_2}-1}e^{\alpha_{m_2}t}\cos\beta_{m_2}t,\ t^{j'_{m_2}-1}e^{\alpha_{m_2}t}\sin\beta_{m_2}t.$$

Обозначим, по порядку, эти решения $y_1,...,y_n$. Не сложно проверить, что они линейно независимы. Тогда общее решение уравнения (28) (напомним, при условии постоянства коэффициентов $a_0,...,a_{n-1}$) запишется в виде: $y=c_1y_1+...+c_ny_n$.

Примеры

1. Решить уравнение $y^{IV}+2y'''+14y''+20y'+25y=0$.

Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^4+4\lambda^3+14\lambda^2+20\lambda+25=0$ или $\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)^2=0$. Его решения: $\lambda=-1\pm i2$ с кратностью 2. Выпишем частные решения:

$$y_1 = e^{-t}\cos 2t,\ y_2 = e^{-t}\sin 2t,\ y_3 = te^{-t}\cos 2t,\ y_n = te^{-t}\sin 2t.$$

Общее решение имеет вид

$$y = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\sin 2t + c_3te^{-t}\cos 2t + c_4te^{-t}\sin 2t.$$

2. Решить уравнение $y^{VI} - y^{IV} + y'' - y = 0$.

Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^2 - 1 = 0$ или $\left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^4 + 1\right) = 0$. Имеем $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda = \pm 1$ или $\lambda^4 + 1 = 0, \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. пример выше). Получили два действительных и четыре комплексных корня. Выпишем частные решения:

$$y_1 = e^t,\ y_2 = e^{-t},\ y_3 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ y_4 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ y_5 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t,$$

$$y_6 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t.$$

Общее решение имеет вид

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_5te^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_6e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t.$$

14. Геометрический взгляд на комплекснозначные функции комплексной переменной

Пусть $f(z)$ комплекснозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$. Зависимость от комплексной z можно рассматривать как зависимость от двух действительных переменных x и y, а функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = g(x, y) + i\,h(x, y),$$

где $g(x, y)$ и $h(x, y)$ две действительные функции двух действительных переменных x и y.

Рассмотрим комплексное число в геометрической интерпретации. Т.е. всякое число $z = x + iy$ будет представлять точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости Oxy. Эту плоскость будем называть комплексной плоскостью. Функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение из комплексной плоскости переменной $z = x + iy$ в комплексную плоскость переменной $w = u + iv$, определенной равенством

$$w = f(z) \qquad (30)$$

или

$$\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y). \end{cases} \qquad (31)$$

Мы рассмотрим некоторые такие отображения с геометрической точки зрения.

14.1. $f(z) = z + c,\ c = a + ib = const$.

Здесь образом числа $x + iy$ является число $(x + a) + i(y + b)$; т.е. точка $M(x, y)$ переходит в точку $M(x + a, y + b)$, и мы имеем сдвиг плоскости Oxy на вектор с координатами (a, b) (см. рис.4).

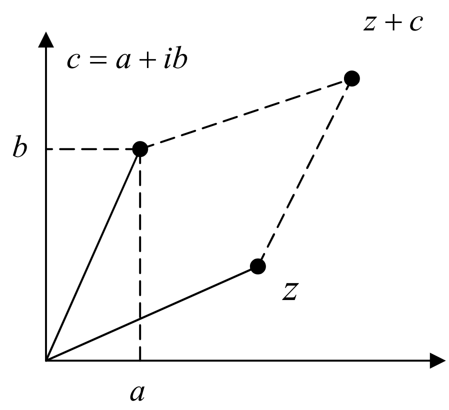

Рис.4. Отображение $f(z)=z+c$

14.2. $f(z)=c\,z,\ c=a+ib$.

Рассмотрим c и z в показательной форме записи: $c=|c|e^{i\phi},\ z=|z|e^{i\varphi}$. Тогда $f(z)=|c||z|e^{i(\phi+\varphi)}$. Значит, точка $M(x,y)$ с полярными координатами (ρ,φ) переходит в точку $N(u,v)$ с полярными координатами $(|c|\rho,\varphi+\phi)$. Это означает, что вектор $\overline{OM}$ растягивается в $|c|$ раз (если $|c|<1$, то реально - сжимается) и поворачивается на угол ϕ: $|f(z)=|c||z||,\ Arg\ f(z)=Arg\ z+\phi$. В частности, умножение на $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ дает чистый поворот на 90^0. (См. рис.5)

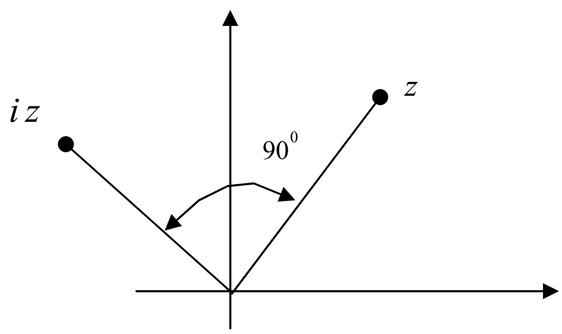

Рис.5. Отображение $f(z)=iz$

14.3. $f(z)=z^2$.

Пусть $z=|z|e^{i\varphi}$. Тогда $f(z)=|z|^2 e^{i2\varphi}$; т.е. $|f(z)|=|z|^2$, $Arg\ f(z)=2Arg\ z$ и точка $M(x,y)$ с полярными координатами (ρ,φ) переходит в точку $N(u,v)$ с полярными координатами $(\rho^2,2\varphi)$. Под действием этого отображения луч, определяемый уравнением $\varphi=\varphi_0$, переходит в луч $\varphi=2\varphi_0$, т.е. поворачивается на угол φ_0. Например, положительная часть оси OY $\left(\varphi=\dfrac{\pi}{2}\right)$ поворачивается на 90^0 и переходит в отрицательную часть оси $OX(\varphi=\pi)$; отрицательная часть оси

$OX(\varphi=\pi)$ поворачивается на 180^0 и переходит в положительную часть оси OX $(\varphi=2\pi)$. Первая четверть $(x>0, y>0)$ разворачивается в верхнюю полуплоскость $(y>0;$ рис.6$)$; верхняя полуплоскость $(y>0)$ переходит во всю плоскость с разрезом (удаленной неотрицательной частью оси $Ox: y=0, x\geq 0;$ рис.7).

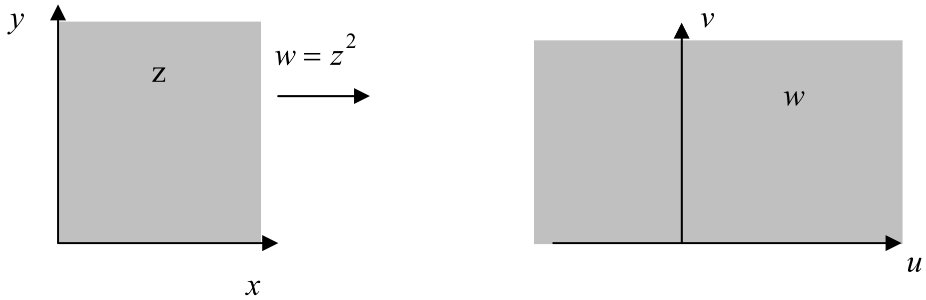

Рис.6. Преобразование I четверти при отображении $f(z)=z^2$

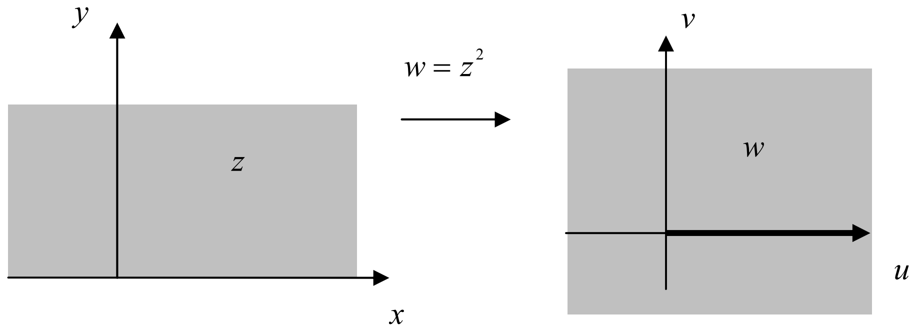

Рис.7. Преобразование верхней полуплоскости при отображении $f(z)=z^2$

14.4. $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

Здесь удобно считать, что к комплексной плоскости добавлена бесконечно удаленная точка: $z=\infty$. Тогда $f(0)=\infty, f(\infty)=0$. Если $z=|z|e^{i\varphi}$, то $f(z)=\dfrac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$. Т.е. $|f(z)|=\dfrac{1}{|z|}$, $Arg\ f(z)=-Arg\ z$. Проанализируем подробнее образы некоторых линий и областей.

Прямая.

А. Прямая, проходящая через начало координат. Уравнение такой прямой имеет вид $Ax+By=0$, A и B - действительные константы. Пусть $c=\dfrac{A}{2}-i\dfrac{B}{2}$. Легко проверить, что, значит, уравнение прямой можно записать в виде

$$cz+\overline{c}\overline{z}=0. \qquad (32)$$

Пусть $w=f(z)$ (см. (30)), т.е. $w=\dfrac{1}{z}, z=\dfrac{1}{w}, \overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ и уравнение (32) примет вид

$$\frac{c}{w}+\frac{\overline{c}}{\overline{w}}=0 \text{ или } \overline{c}w+c\overline{w}=0. \qquad (33)$$

Это уравнение аналогично (32), т.е. уравнение прямой, проходящей через начало координат. Если $w = u + iv$, то (33) принимает вид $Au - Bv = 0$. Т.е. прямая $Ax + By = 0$ перешла в прямую $Au - Bv = 0$. Если обе прямые рассмотреть на одной плоскости: $Ax + By = 0$ и $Au - Bv = 0$, то мы имеем две прямые, симметричные относительно оси OX. При этом, т.к. $f(i) = -i$, плоскость над прямой переходит в плоскость под прямой (см. рис.8).

В. Прямая, не проходящая через начало координат. Уравнение такой прямой можно записать в виде $Ax + By - 1 = 0$, $A, B = const \in R$. Взяв $c = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$, можем записать это уравнение в виде

$$cz + \overline{c}\overline{z} - 1 = 0. \qquad (34)$$

Если $w = \frac{1}{z}$ (тогда $z = \frac{1}{w}$), то (34) запишется в виде $\frac{c}{w} + \frac{\overline{c}}{\overline{w}} - 1 = 0$; умножая на $w\overline{w}$, получим $-c\overline{w} - \overline{c}w + w\overline{w} = 0$. Преобразуем:

$$w\overline{w} - c\overline{w} - \overline{c}w + c\overline{c} = c\overline{c},\ (w - c)(\overline{w} - \overline{c}) = c\overline{c};$$

$$|w - c|^2 = |c|^2,\ |w - c| = |c|.$$

Получено уравнение окружности с центром в точки c и радиусом $|c|$. Эта окружность проходит через начало координат. Т.к. $f(0) = \infty$, то полуплоскость, содержащая начало координат переходит во внешность круга, другая полуплоскость – во внутренность круга (см. рис.9). Для прямой, параллельной оси Ox, – уравнение $y = b$ или $\frac{1}{b}y - 1 = 0$ – имеем $A = 0,\ B = \frac{1}{b},\ c = -\frac{1}{2b}i$ и получаем окружность с центром в точке $\left(0, -\frac{1}{2b}\right)$ и радиусом $\frac{1}{2|b|}$. Аналогично прямая $x = a$, параллельная оси Oy, переходит в окружность с центром $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2|a|}$.

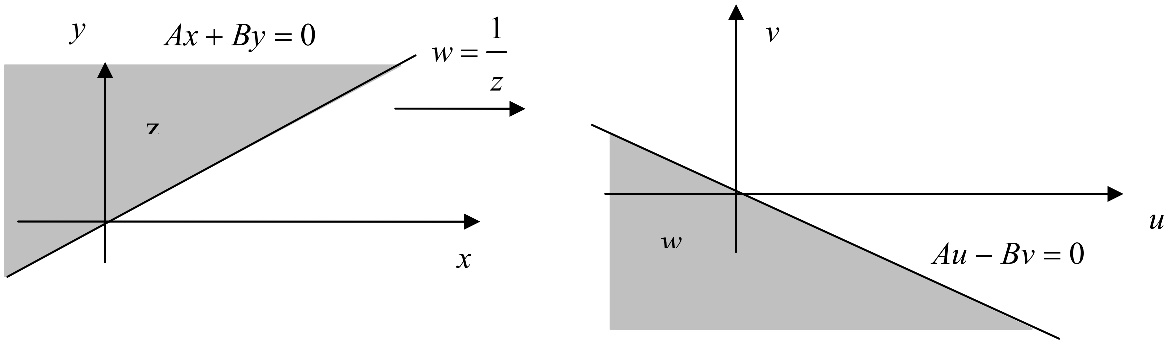

Рис.8. Преобразование полуплоскости при отображении $f(z) = \frac{1}{z}$

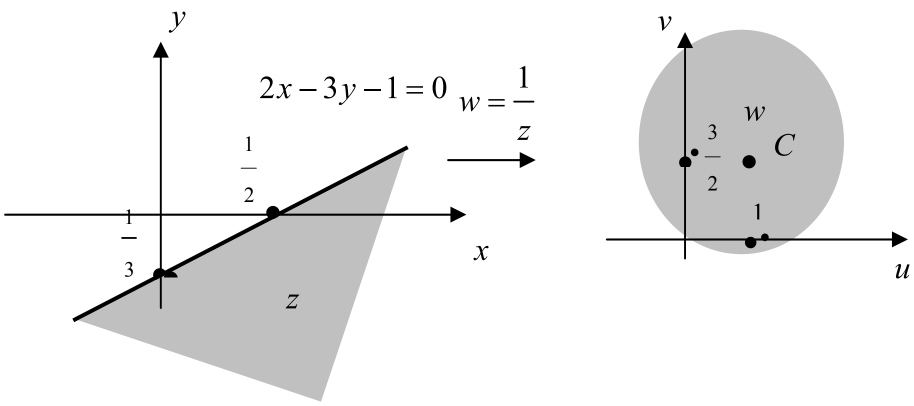

Рис.9. Преобразование полуплоскости при отображении $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$

Окружность. Уравнение окружность имеет вид

$$\left|z-c\right|=R, \qquad (35)$$

где $c=a+ib$ - центр окружности, $R>0$ - радиус окружности. Преобразуем (35):

$$\left|z-c\right|^2=R^2,\ \left(z-c\right)\left(\overline{z}-\overline{c}\right)=R^2,\ z\overline{z}-c\overline{z}-\overline{c}z+c\overline{c}=R^2.$$

Учтем, что $c\overline{c}=\left|c\right|^2$ и разделим на $z\overline{z}$:

$$\left(R^2-\left|c\right|^2\right)\frac{1}{z\overline{z}}+\frac{c}{z}+\frac{\overline{c}}{\overline{z}}-1=0.$$

Если $w=\dfrac{1}{z}$, то получим

$$\left(R^2-\left|c\right|^2\right)w\overline{w}+cw+\overline{e}\,\overline{w}-1=0. \qquad (36)$$

Возможны три случая.

A. $\left|c\right|=R$, т.е. начало координат (точка $z=0$) лежит на окружности. Тогда (36) принимает вид $cw+\overline{c}\,\overline{w}-1=0$. Это уравнение аналогично (34). Значит, окружность, проходящая через начало координат, переходит в прямую, не проходящую через начало координат.

B. $\left|c\right|<R$, т.е. начало координат лежит внутри круга, ограниченного окружностью. Преобразуем (36) к виду

$$w\overline{w}+\frac{c}{R^2-\left|c\right|^2}w+\frac{\overline{c}}{R^2-\left|c\right|^2}\overline{w}+\frac{c\overline{c}}{\left(R^2-\left|c\right|^2\right)^2}=\frac{1}{R^2-\left|c\right|^2}+\frac{c\overline{c}}{\left(R^2-\left|c\right|^2\right)^2},$$

$$\left(w+\frac{\overline{c}}{R^2-\left|c\right|^2}\right)\left(\overline{w}+\frac{c}{R^2-\left|c\right|^2}\right)=\frac{R^2-\left|c\right|^2}{\left(R^2-\left|c\right|^2\right)^2}+\frac{\left|c\right|^2}{\left(R^2-\left|c\right|^2\right)^2},$$

$$\left|w+\frac{\overline{c}}{R^2-\left|c\right|^2}\right|^2=\frac{R^2}{\left(R^2-\left|c\right|^2\right)^2},\ \left|w+\frac{\overline{c}}{R^2-\left|c\right|^2}\right|=\frac{R}{R^2-\left|c\right|^2}.$$

В последнем равенстве учтено, что т.к. $R > |c|$, то $R^2 - |c|^2 > 0$. Получено уравнение окружности с центром в точке $c_1 = -\frac{\bar{c}}{R^2 - |c|^2}$ и радиусом $r = \frac{R}{R^2 - |c|^2}$. Т.к. $|c| < R$, то $|c_1| < r$. Значит, если начало координат не лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью, то эта окружность переходит в окружность с таким же свойством. При этом, т.к. $f(0) = \infty$, то внутренность круга переходит во внешность второго и наоборот (см. рис.10).

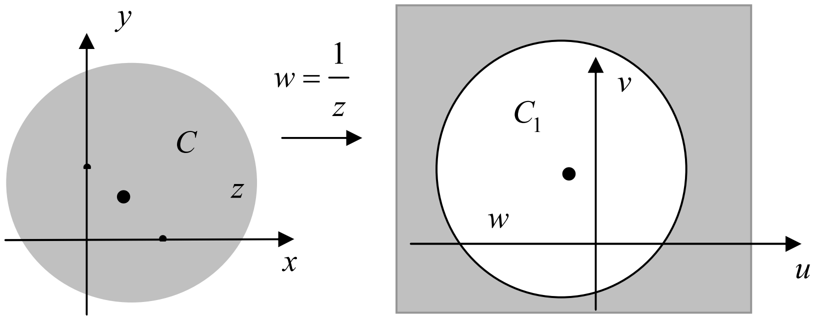

Рис.10. Преобразование круга при отображении $f(z) = \frac{1}{z}$

C. $|c| > R$, т.е. начало координат не лежит в круге, ограниченном окружностью. Повторяя предыдущие вычисления. Преобразуем (36) к виду

$$\left| w + \frac{\bar{c}}{R^2 - |c|^2} \right|^2 = \frac{R^2}{\left(R^2 - |c|^2\right)^2}.$$

Но здесь $R^2 - |c|^2 < 0$, $|c|^2 - R^2 > 0$. Поэтому получаем

$$\left| w - \frac{\bar{c}}{|c|^2 - R^2} \right|^2 = \frac{R}{|c|^2 - R^2}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $c_1 = \frac{\bar{c}}{|c|^2 - R^2}$ и радиусом $r = \frac{R}{|c|^2 - R^2}$.

Т.к. $|c| > R$, то $|c_1| > r$. Значит, если начало координат не лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью, то эта окружность переходит в окружность с таким же свойством. Т.к. $f(0) = \infty$, то внутренность круга переходит во внутренность второго круга, а внешность – во внешность второго круга (см. рис.11).

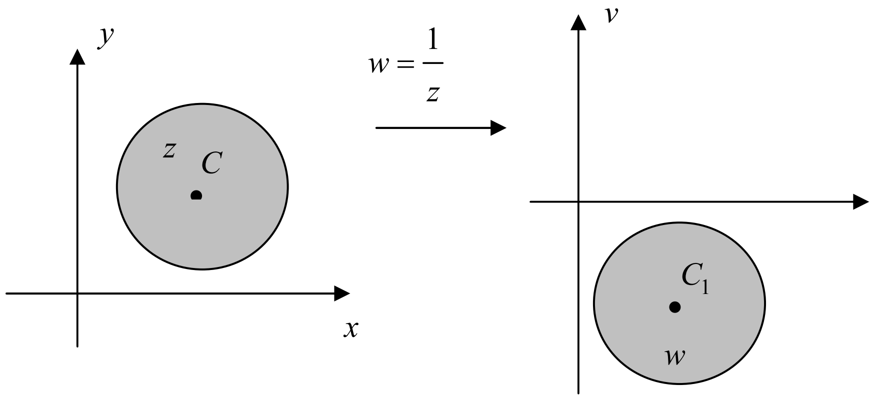

Рис.11. Преобразование круга при преобразовании $f\left(z\right) = \frac{1}{z}$

15. Индивидуальные задания

Задание 1. а) перемножить числа z_1 и z_2 в алгебраической форме и представить произведение в показательной; б) перемножить числа z_1 и z_2 в показательной форме и представить произведение в алгебраической; в) представить отношение $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраической и показательной форме.

1. $z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = -6 + 6\sqrt{3}\ i;$	2. $z_1 = 3 + \sqrt{3}\ i,\ z_2 = -4 + 4\sqrt{3}\ i;$
3. $z_1 = 2 + \sqrt{2}\ i,\ z_2 = -2 + 2\sqrt{3} + 6i;$	4. $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -\sqrt{3} + 3i;$
5. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -3\sqrt{3} + 3i;$	6. $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i,\ z_2 = -2\sqrt{3} + 2i;$
7. $z_1 = 6 + +\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -3 + \sqrt{3}\ i;$	8. $z_1 = \sqrt{3} + 3i,\ z_2 = -6 + 2\sqrt{3}\ i;$
9. $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -2\sqrt{3} - 2i;$	10. $z_1 = -3\sqrt{3} + 9i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i;$
11. $z_1 = -4 + 4\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -3 - \sqrt{3}\ i;$	12. $z_1 = -2\sqrt{3} + 6i,\ z_2 = -6 - 2\sqrt{3}\ i;$
13. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = -3\sqrt{3} + -9i;$	14. $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = -4 - 4\sqrt{3}\ i;$
15. $z_1 = -6 + 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = -1 - \sqrt{3}\ i;$	16. $z_1 = -3 + \sqrt{3}\ i,\ z_2 = -2\sqrt{3} - 6i;$
17. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 3 - \sqrt{3}\ i;$	18. $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = \sqrt{3} - 3i;$
19. $z_1 = 6\sqrt{3} + 6i,\ z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\ i;$	20. $z_1 = 9 + 3\sqrt{3}\ i,\ z_2 = 1 - \sqrt{3}\ i;$
21. $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i,\ z_2 = 2\sqrt{3} - 6i;$	22. $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i,\ z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\ i;$
23. $z_1 = -3 - \sqrt{3}\ i,\ z_2 = 6 - 6\sqrt{3}\ i;$	24. $z_1 = -6 - 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = \sqrt{3} - 3i;$
25. $z_1 = -6 - 6\sqrt{3}\ i,\ z_2 = \sqrt{3} - i;$	26. $z_1 = -4 - 4\sqrt{3}\ i,\ z_2 = 3 - \sqrt{3}\ i;$
27. $z_1 = -2\sqrt{3} - 6i,\ z_2 = 2\sqrt{3} - 2i;$	28. $z_1 = -\sqrt{3} - 3i,\ z_2 = 6 - 2\sqrt{3}\ i;$
29. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\ i,\ z_2 = 6\sqrt{3} - 6i;$	30. $z_1 = \sqrt{3} + 3i,\ z_2 = 6 - 2\sqrt{3}\ i.$

Задание 2. Решить уравнение $z^n = C$. В пункте а) записать корни в алгебраической форме.

1. а) $n=3, C=-3+\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-4$.
2. а) $n=3, C=-3-\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-i$.
3. а) $n=4, C=-5$; б) $n=3, C=-3\sqrt{3}+3i$.
4. а) $n=3, C=24$; б) $n=6, C=-3\sqrt{3}-3i$.
5. а) $n=4, C=36$; б) $n=5, C=-2-2\sqrt{3}\,i$.
6. а) $n=6, C=4$; б) $n=4, C=-2+2\sqrt{3}\,i$.
7. а) $n=8, C=9$; б) $n=3, C=-3-3\sqrt{3}\,i$.
8. а) $n=3, C=-54i$; б) $n=4, C=-3+3\sqrt{3}\,i$.
9. а) $n=3, C=-\sqrt{3}+i$; б) $n=5, C=-5$.
10. а) $n=3, C=-\sqrt{3}-i$; б) $n=6, C=-5i$.
11. а) $n=3, C=-6$; б) $n=6, C=-4+4\sqrt{3}\,i$.
12. а) $n=6, C=-8$; б) $n=3, C=-4\sqrt{3}+4i$.
13. а) $n=4, C=-3+3\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-2i$.
14. а) $n=4, C=-3-3\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-2$.
15. а) $n=4, C=-4$; б) $n=5, C=-2\sqrt{3}+2i$.
16. а) $n=3, C=16$; б) $n=6, C=-2\sqrt{3}-2i$.
17. а) $n=4, C=18$; б) $n=5, C=-3+3\sqrt{3}\,i$.
18. а) $n=6, C=9$; б) $n=4, C=-6+6\sqrt{3}\,i$.
19. а) $n=8, C=25$; б) $n=3, C=-\sqrt{3}-i$.
20. а) $n=3, C=-16i$; б) $n=4, C=-6+6\sqrt{3}\,i$.
21. а) $n=6, C=-16i$; б) $n=4, C=-\sqrt{3}+i$.
22. а) $n=3, C=-16$; б) $n=5, C=-\sqrt{3}+i$.
23. а) $n=4, C=-4+4\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-4$.
24. а) $n=4, C=-8-8\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-4i$.
25. а) $n=3, C=-5+5\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-6i$.
26. а) $n=3, C=-6-6\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-6$.
27. а) $n=4, C=49$; б) $n=5, C=-6+6\sqrt{3}\,i$.
28. а) $n=6, C=49$; б) $n=4, C=-5-5\sqrt{3}\,i$.
29. а) $n=4, C=-7+7\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-3i$.
30. а) $n=4, C=-7-7\sqrt{3}\,i$; б) $n=5, C=-10$.

Литература

1. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – Москва : Наука. – 1981. – 304 с.
2. Привалов, И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. Привалов. – Москва : Наука. – 1977. – 444 с.
3. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1977. – 456 с.
4. Шабат, Б. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1985. – 464 с.
5. Кантор, И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – Москва : Наука. – 1973. – 144 с.