

Министерство образования Республики Беларусь  
Министерство образования Республики Беларусь

# **Тема 5.**

## **«Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.»**

*Кафедра теоретической и  
прикладной математики.*

разработана доц. Е.Б.Дуниной

# 5.1 Метод Эйлера.

Найдем приближенно решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.1)$$

на отрезке  $[a, b]$ ,

удовлетворяющее  
начальному условию при

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Разделим отрезок  $[a, b]$  точками  $x_0, x_1, \dots, x_n = b$

на  $n$  равных частей

$$(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

Обозначим

$$h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1},$$

т.е.

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Пусть

$$y = \varphi(x)$$

есть некоторое приближенное решение уравнения (5.1) и

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

Обозначим

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

В каждой из точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$   
в уравнении (5.1) производную заменим отношением  
конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y) \quad (5.2)$$

$$\Delta y = f(x, y) \cdot \Delta x \quad (5.3)$$

При  $x = x_0$  будем иметь

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$$

или

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) h$$

В этом равенстве  $x_0, y_0, h$  известны,  
следовательно, находим:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

При  $x = x_1$  уравнение (5.3) примет вид

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) \cdot h$$

или

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h,$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$

Здесь известными являются  $x_1, y_1, h$ , а  $y_2$  определяется.

Аналогично находим:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках

$x_0, x_1, \dots, x_n$  найдены.

Соединяя на координатной плоскости точки

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

отрезками прямой, получим ломаную – приближенное изображение интегральной кривой.

Эта ломанная называется ломанной Эйлера.

Метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Пример:

Найти приближенное при  $x = 1$   
значение решения уравнения  $y' = y + x$ ,  
удовлетворяющего начальному условию: при

$$x_0 = 0, y_0 = 1.$$

**Решение.**

Разделим отрезок  $[0,1]$  на 10 частей точками

$$x_0 = 0; 0.1; 0.2; \dots; 1.0.$$

Следовательно,  $h = 0.1$  значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$

будем искать по формуле (5.3):

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h \quad \text{или}$$

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$$

Таким образом, получаем:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0.1 = 1.1$$

$$y_2 = 1.1 + (1.1 + 0.1) \cdot 0.1 = 1.22$$

.....

**В процессе решения составляем таблицу:**



$x_k$	$y_k$	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$
<b>0</b>	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	<b>0.100</b>
<b>0.1</b>	<b>1.100</b>	<b>1.200</b>	<b>0.120</b>
<b>0.2</b>	<b>1.220</b>	<b>1.420</b>	<b>0.142</b>
<b>0.3</b>	<b>1.362</b>	<b>1.620</b>	<b>0.162</b>
<b>0.4</b>	<b>1.524</b>	<b>1.924</b>	<b>0.1924</b>
<b>0.5</b>	<b>1.7164</b>	<b>2.2164</b>	<b>0.2216</b>
<b>0.6</b>	<b>1.9380</b>	<b>2.5380</b>	<b>0.2538</b>
<b>0.7</b>	<b>2.1918</b>	<b>2.8918</b>	<b>0.2892</b>
<b>0.8</b>	<b>2.4810</b>	<b>3.2810</b>	<b>0.3281</b>
<b>0.9</b>	<b>2.8091</b>	<b>3.7091</b>	<b>0.3709</b>
<b>1.0</b>	<b>3.1800</b>		

**Приближенное значение**

$$y \Big|_{x=1} = 3.1800$$

Найдем точное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Решение уравнения  $y' - y = x$

будем искать в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки

$$y = u \cdot v,$$

где  $u = u(x), v = v(x)$ .

Тогда  $y' = u'v + uv'$ .

Подставляя  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение, получаем

$$u'v + u(v' - v) = x \quad (5.4)$$



Подберем функцию  $v = v(x)$

так, чтобы выражение в скобках было равно нулю

$$v' - v = 0$$

Интегрируя полученное выражение, получим

$$\frac{dv}{dx} - v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = v;$$

$$\frac{dv}{v} = dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx;$$

$$\ln|v| = x$$

$$v = e^x$$

Подставляя найденную функцию в (5.4) получим уравнение относительно

$u$



$$u'e^x = x$$

Решаем его и получим

$$\frac{du}{dx} \cdot e^x = x;$$

$$du = xe^{-x} dx;$$

$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

Возвращаясь к переменной  $y$ , получаем решение

$$y = uv = -x - 1 + ce^x$$

Применяя начальные условия

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

найдем значение постоянной

$$1 = -0 - 1 + ce^0$$

$$c = 2$$

Таким образом точное решение имеет вид

$$y = 2e^x - x - 1$$

Следовательно,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3.4366$$

Абсолютная погрешность

$$|3.4366 - 3.1800| = 0.2566$$

## 5.2 Метод Рунге-Кутты.

Найдем приближенно решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

на отрезке  $[x_0, b]$ , удовлетворяющее начальному условию при  $x = x_0, y = y_0$ .

К одношаговым методам относят также метод Рунге-Кутты.

В этом методе значения  $y_{i+1}$  при заданном значении

$y_0$  последовательно вычисляют по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.4)$$

$$k_1 = hf_i$$

$$k_2 = hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2} \right)$$

$$k_3 = hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2} \right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Таким образом метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения  $f(x, y)$ .

Для практической оценки погрешности используется правило Рунге:

если  $y_h$  и  $y_{2h}$  - численные решения задачи, найденные по формулам (5.4) с шагом  $h$  и  $2h$  соответственно, то погрешность решения при меньшем шаге

$$\varepsilon_i = \frac{1}{15} (y_h(x_i) - y_{2h}(x_i))$$

Если вычисленное по этой формуле значение  $\varepsilon_i$  не обеспечивает заданной точности, шаг сетки следует уменьшить.

**Пример 1.** Решить задачу Коши  $y' = 2(x^2 + y)$ ,  
если  $y(0) = 1, 0 \leq x \leq 1, h = 0.1$ .

**Решение.**

Вычисления проводим по следующей таблице:



$n$	$x_n$	$y_n$	$k$	$\Delta y_n$
<b>0</b>	$x_0$	$y_0$	$k_1^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1^{(0)}$	$k_2^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_2^{(0)}$	$k_3^{(0)}$	
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	
				$\Delta y_0$
<b>1</b>	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$k_1^{(1)}$	

Параметры

$$k_1, k_2, k_3, k_4$$

рассчитывают по формулам (5.4).

Результаты вычислений запишем в таблицу.

$$k_1^{(0)} = hf_0 = 0.1 \cdot 2(x_0^2 + y_0) = 0.2$$

$$k_2^{(0)} = hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} \right) = 0.1 \cdot 2(0.05^2 + 1.1) = 0.2205$$

$$k_3^{(0)} = hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} \right) = 0.2(0.05^2 + 1.1103) = 0.2226$$

$$k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0) = 0.2(0.1^2 + 1.2226) = 0.2465$$

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ &= \frac{1}{6}(0.2 + 2 \cdot 0.2205 + 2 \cdot 0.2226) + 0.2465 = 0.2221\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_1^{(1)} &= hf(x_1, y_1) = \\ &= 0.1 \cdot 2(x_1^2 + y_1) = 0.2 \cdot (0.1^2 + 1.2221) = 0.24642\end{aligned}$$

$$k_2^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right) = 0.1 \cdot 2(0.15^2 + 1.34531) = 0.27356$$

$$k_3^{(1)} = hf \left( x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2} \right) = 0.2(0.15^2 + 1.35888) = 0.27628$$

$$k_4^{(1)} = hf \left( x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)} \right) = \\ = 0.2(0.2^2 + 1.49838) = 0.307676$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ = \frac{1}{6}(0.24642 + 2 \cdot 0.27356 + 2 \cdot 0.27628 + 0.30768) = 0.27563$$

$n$	$x_n$	$y_n$	$k$	$\Delta y_n$
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	0.2	
	<b>0.05</b>	<b>1.1</b>	<b>0.2205</b>	
	<b>0.05</b>	<b>1.1103</b>	<b>0.2226</b>	
	<b>0.1</b>	<b>1.1113</b>	<b>0.2465</b>	
				<b>0.2221</b>
<b>1</b>	$x_1 = 0.1$	<b>1.2221</b>	<b>0.24642</b>	
	<b>0.15</b>	<b>1.34531</b>	<b>0.27356</b>	
	<b>0.15</b>	<b>1.35888</b>	<b>0.27628</b>	
	<b>0.2</b>	<b>1.49838</b>	<b>0.30768</b>	
				<b>0.27563</b>
<b>2</b>	$x_2 = 0.2$	<b>1.49773</b>		

**Продолжая процесс,  
получим следующие  
значения**

$x_i$	$y_i$
<b>0.1</b>	<b>1.2221</b>
<b>0.2</b>	<b>1.4977</b>
<b>0.3</b>	<b>1.8432</b>
<b>0.4</b>	<b>2.2783</b>
<b>0.5</b>	<b>2.8274</b>
<b>0.6</b>	<b>3.5201</b>
<b>0.7</b>	<b>4.3937</b>
<b>0.8</b>	<b>5.4894</b>
<b>0.9</b>	<b>6.8643</b>
<b>1.0</b>	<b>8.5834</b>

### 5.3 Разностный метод приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса.

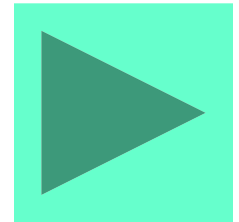
Будем искать решение уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (5.5)$$

на отрезке  $[a, b]$ ,

удовлетворяющее начальному условию: при

$$x = x_0, y = y_0.$$



**Приближенные значения решения в точках**

$x_0, x_1, \dots, x_n$  **будут**  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$

**Разности первого порядка:**

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

**Разности второго порядка:**

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

.....

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

**Разностями третьего порядка называются разности разностей второго порядка и т. д.**



Через  $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$  обозначим приближенные значения производных,

через  $y''_0, y''_1, \dots, y''_n$  – приближенные значения вторых производных и т. д.

**Аналогично определяются первые разности производных**


$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \dots, \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

**вторые разности производных**  $\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0,$

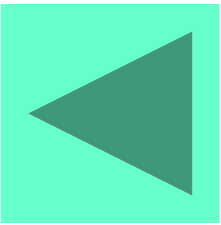

$$\Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \dots, \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2} \quad \text{и т.д.}$$

**Запишем формулу Тейлора для решения уравнений в окрестности точки**

$$x = x_0$$


$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m \quad (5.6)$$

В этой формуле  $y_0$  известно, а значения  $y'_0, y'_1, \dots$  производных находятся из уравнения (5.5).



Подставим в правую часть уравнения (5.5) начальные значения  $x_0$  и  $y_0$  найдем

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

**Дифференцируя уравнение (5.5) по  $x$ , получим:**

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \quad (5.7)$$

Подставляя в правую часть значения  $x_0, y_0, y'_0,$

найдем

$$y''_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0, y=y_0, y'=y'_0} \quad (5.7)$$

Дифференцируя еще раз равенство (5.7) по  $x$  и подставляя значения  $x_0, y_0, y'_0, y''_0,$  найдем  $y'''$ .

Продолжая мы можем найти значения производных любого порядка при  $x = x_0.$

Таким образом, пренебрегая остаточным членом, мы можем получить приближенные значения решения при любом значении  $x$ ; их точность будет зависеть от

величины  $|x - x_0|$  и числа членов в разложении.

В рассмотренном методе по формуле (5.6) определяют только несколько первых значений  $y$ ,

когда  $|x - x_0|$  мало.

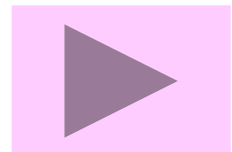
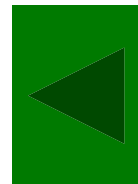
Определим значения  $y_1$  и  $y_2$  при  $x_1 = x_0 + h$

и при  $x_2 = x_0 + 2h$ ,

беря четыре члена разложения ( $y_0$  известно на основании начальных данных):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' \quad (5.8)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' \quad (5.9)$$



Таким образом, будем считать, что известны три значения функции:

$$y_0, y_1, y_2$$

Пользуясь уравнением (5.5), определяем:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), y'_1 = f(x_1, y_1), y'_2 = f(x_2, y_2)$$

Зная  $y'_0, y'_1, y'_2$  можно определить

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta y''_0$$

Результаты вычислений удобно заносить в таблицу:

$x$	$y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0$	$y_0$	$y'_0$		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1$	$y'_1$		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	$y_2$	$y'_2$		
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	$y_{k-1}$	$y'_{k-1}$		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	$y_k$	$y'_k$		

Допустим, что нам известны значения решения

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k.$$

На основании этих значений мы можем вычислить, пользуясь уравнением (5.5), значения производных

$$y'_0, y'_1, \dots, y'_k,$$

а следовательно

$$\Delta y'_0, \dots, \Delta y'_{k-1}$$

и

$$\Delta^2 y'_0, \dots, \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Определим значение  $y_{k+1}$  по формуле Тейлора, полагая

$$x_0 = x_k,$$

$$x = x_{k+1} = x_k + h.$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \dots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m$$

Ограничимся в нашем случае четырьмя членами разложения

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k \quad (5.10)$$

В этой формуле неизвестными являются  $y''_k$  и  $y'''_k$ , которые определим через известные разности первого и второго порядка.

Вычислим производную от левой и правой части уравнения (5.6)

$$y' = y'_0 + (x - x_0) y''_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} y'''_0 + \dots$$

Представим по формуле Тейлора  $y'_{k-1}$ , полагая



$$x_0 = x_k,$$

$$x - x_k = -h:$$

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{-h}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k \quad (5.11)$$

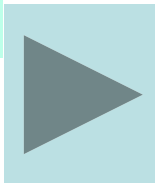
и  $y'_{k-2}$ , полагая

$$x_0 = x_k,$$

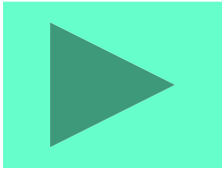
$$x - x_k = -2h:$$

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{-2h}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k \quad (5.12)$$

**Из равенства (5.11) находим**

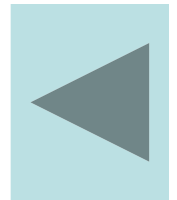


$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k \quad (5.13)$$



Вычитая из (5.11) члены равенства (5.12), получим:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k \quad (5.14)$$



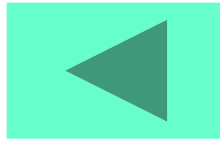
Из (5.13) и (5.14) находим:

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

или

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2} \quad (5.15).$$

Подставляя выражение  $y_k'''$

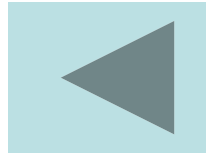


в равенство (5.13), получим:

$$y_k'' = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h} \quad (5.16)$$

Подставляя (5.15) и (5.16) в разложение (5.10), получим:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} \quad (5.17)$$



Выражение (5.17) называется **формулой Адамса с четырьмя членами**.

Формула (5.17) дает возможность, зная  
определить

$$y_{k+1}.$$

$$y_k, y_{k-1}, y_{k-2},$$

Таким образом, зная  $y_0, y_1, y_2$  мы можем найти

$y_3$  и далее  $y_4, y_5, \dots$

### Замечание.

Если мы хотим получить большую точность вычисления, то следует брать больше, чем в разложении (5.10) членов.

Если вместо (5.10) взять формулу, содержащую справа пять членов, то вместо формулы (5.17) получим формулу

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}. \quad (5.18)$$

## Пример 1

Найти приближенные значения решения уравнения

$y' = y + x$ , удовлетворяющего начальному условию:

$$x_0 = 0, y_0 = 1.$$

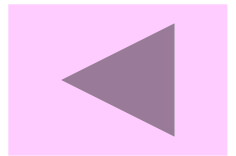
Значения решения определить при

$$x = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4$$

**Решение.**

Найдем сначала  $y_1, y_2$  по формулам (5.8) и (5.9).

Из уравнения и начальных данных получаем:



$$y'_0 = (y + x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1$$

Дифференцируя исходное уравнение, получим

$$y' = y + x$$

$$y'' = y' + 1$$

Следовательно

$$y_0'' = y_0' + 1 = 1 + 1 = 2$$

Дифференцируем еще раз

$$y''' = y''$$

Поэтому

$$y_0''' = y_0'' = 2$$

Подставляя в равенство (5.8) значения

$$y_0, y_0', y_0'', y_0'''$$

и

$$h = 0.1,$$

получим



$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' =$$
$$= 1 + \frac{0.1}{1} \cdot 1 + \frac{0.1^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.1^3}{6} \cdot 2 = 1.1103$$

**Аналогично**

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' =$$
$$= 1 + \frac{2 \cdot 0.1}{1} \cdot 1 + \frac{0.2^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.2^3}{3} \cdot 2 = 1.2427$$

**Зная**  $y_0, y_1, y_2$ , **находим:**

$$y'_0 = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y'_1 = y_1 + x_1 = 1.1103 + 0.1 = 1.2103,$$

$$y'_2 = y_2 + x_2 = 1.2427 + 0.2 = 1.4427,$$

$$\Delta y'_0 = 0.2103,$$

$$\Delta y'_1 = 0.2324,$$

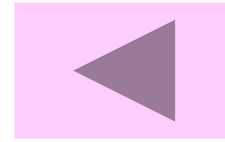
$$\Delta^2 y'_0 = 0.0221.$$

**Полученные значения  
вносим в таблицу**



$x$	$y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1.0000$	$y'_0 = 1$		
			$\Delta y'_0 = 0.2103$	
$x_1 = 0.1$	$y_1 = 1.1103$	$y'_1 = 1.2103$		$\Delta^2 y'_0 = 0.0221$
			$\Delta y'_1 = 0.2324$	
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 1.2427$	$y'_2 = 1.4427$		$\Delta^2 y'_1 = 0.0244$
			$\Delta y'_2 = 0.2568$	
$x_3 = 0.3$	$y_3 = 1.3995$	$y'_3 = 1.6995$		
$x_4 = 0.4$	$y_4 = 1.5833$			

По формуле (5.17) находим  $y_3$



$$y_3 = y_2 + \frac{h}{1} y'_2 + \frac{h}{2} \Delta y'_1 + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_0 =$$
$$= 1.2427 + 0.1 \cdot 1.4427 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.2324 + \frac{0.1 \cdot 5}{12} \cdot 0.0221 = 1.3995$$

Далее находим значения  $y'_3, \Delta y'_2, \Delta^2 y'_1$

$$y'_3 = y_3 + x_3 = 1.3995 + 0.3 = 1.6995$$

$$\Delta y'_2 = y'_3 - y'_2 = 1.6995 - 1.4427 = 0.2568,$$

$$\Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1 = 0.2568 - 0.2324 = 0.0244.$$

Снова по формуле (5.17) находим  $y_4$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{1} y_3' + \frac{h}{2} \Delta y_2' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_1' =$$
$$= 1.3995 + 0.1 \cdot 1.6995 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.2568 + \frac{0.1 \cdot 5}{12} \cdot 0.0244 = \underline{\underline{1.5833}}$$

Точное выражение решения данного уравнения

$$y = 2e^x - x - 1$$

Следовательно,  $y_{x=0.4} = 2e^{0.4} - 0.4 - 1 = 1.58364$

Абсолютная погрешность  $|1.58364 - 1.5833| = 0.0003$

