Министерство образования Республики Беларусь

Министерство образования Республики Беларусь

Тема5.
«Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.»

Кафедра теоретичской и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

5.1 Метод Эйлера.

Найдем приближенно решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.1)$$

на отрезке $[a, b]$,

удовлетворяющее начальному условию при

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Разделим отрезок $[a, b]$ **точками** $x_0, x_1, \ldots, x_n = b$

на *n* равных частей $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$

Обозначим $$h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \\ = \ldots = b - x_{n-1},$$

т.е. $$h = \frac{b-a}{n}.$$

Пусть $y = \varphi(x)$ **есть некоторое приближенное решение уравнения (5.1) и**

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \ldots, y_n = \varphi(x_n).$$

Обозначим $$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ , \ldots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

В каждой из точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$

в уравнении (5.1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y) \quad (5.2)$$

$$\Delta y = f(x, y) \cdot \Delta x \quad (5.3)$$

При $x = x_0$ **будем иметь**

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x$$

или

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$$

В этом равенстве x_0, y_0, h **известны, следовательно,находим:**

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

При $x = x_1$ **уравнение (5.3) примет вид**

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) \cdot h$$

или

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h,$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$

Здесь известными являются $x_1, y_1, h,$ **а** y_2 **определяется.**

Аналогично находим:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$

....

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ **найдены.**

Соединяя на координатной плоскости точки

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

отрезками прямой, получим ломаную – приближенное изображение интегральной кривой.

Эта ломанная называется ломанной Эйлера.

Метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Пример:

Найти приближенное при $x = 1$

значение решения уравнения $y' = y + x,$

удовлетворяющего начальному условию: при

$$x_0 = 0, y_0 = 1.$$

Решение.

Разделим отрезок $[0,1]$ **на 10 частей точками**

$$x_0 = 0;\ 0.1;\ \ 0.2;...;1.0.$$

Следовательно, $h = 0.1$ Значения $y_1, y_2, ..., y_n$

будем искать по формуле (5.3):

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$$

или

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$$

Таким образом, получаем:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0.1 = 1.1$$

$$y_2 = 1.1 + (1.1 + 0.1) \cdot 0.1 = 1.22$$

....

В процессе решения составляем таблицу:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$
0	**1.000**	**1.000**	**0.100**
0.1	**1.100**	**1.200**	**0.120**
0.2	**1.220**	**1.420**	**0.142**
0.3	**1.362**	**1.620**	**0.162**
0.4	**1.524**	**1.924**	**0.1924**
0.5	**1.7164**	**2.2164**	**0.2216**
0.6	**1.9380**	**2.5380**	**0.2538**
0.7	**2.1918**	**2.8918**	**0.2892**
0.8	**2.4810**	**3.2810**	**0.3281**
0.9	**2.8091**	**3.7091**	**0.3709**
1.0	**3.1800**		

Приближенное значение $y\big|_{x=1} = 3.1800$

Найдем точное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Решение уравнения $y' - y = x$

будем искать в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки $y = u \cdot v,$

где $u = u(x), v = v(x).$

Тогда $y' = u'v + uv'.$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем

$$u'v + u(v' - v) = x \quad (5.4)$$

Подберем функцию $v = v(x)$

так, чтобы выражение в скобках было равно нулю

$$v' - v = 0$$

Интегрируя полученное выражение, получим

$$\frac{dv}{dx} - v = 0; \quad \frac{dv}{dx} = v; \quad \frac{dv}{v} = dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx; \quad \ln|v| = x \quad v = e^{x}$$

Подставляя найденную функцию в (5.4) получим уравнение относительно u

$$u'e^{x} = x$$

Решаем его и получим

$$\frac{du}{\mathrm{dx}} \cdot e^{x} = x;$$

$$du = xe^{-x}dx;$$

$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

Возвращаясь к переменной y, **получаем решение**

$$\boxed{y = uv = -x - 1 + ce^{x}}$$

Применяя начальные условия $x_0 = 0, y_0 = 1$

найдем значение постоянной

$$1 = -0 - 1 + ce^0$$

$$c = 2$$

Таким образом точное решение имеет вид

$$y = 2e^x - x - 1$$

Следовательно, $y\big|_{x=1} 2(e-1) = 3.4366$

Абсолютная погрешность $|3.4366 - 3.1800| = 0.2566$

5.2 Метод Рунге-Кутта.

Найдем приближенно решение уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

на отрезке $[x_0, b]$, **удовлетворяющее начальному условию при** $x = x_0$, $y = y_0$.

К одношаговым методам относят также метод Рунге-Кутта.

В этом методе значения y_{i+1} **при заданном значении** y_0 **последовательно вычисляют по формулам**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.4)$$

$$k_1 = hf_i$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + k_3\right)$$

Таким образом метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения $f(x, y).$

Для практической оценки погрешности используется правило Рунге:

если y_h **и** y_{2h} **- численные решения задачи, найденные по формулам (5.4) с шагом *h* и *2h* соответственно, то погрешность решения при меньшем шаге**

$$\varepsilon_i = \frac{1}{15}(y_h(x_i) - y_{2h}(x_i))$$

Если вычисленное по этой формуле значение ε_i не обеспечивает заданной точности, шаг сетки следует уменьшить.

Пример 1. Решить задачу Коши $y' = 2(x^2 + y)$, если

$$y(0) = 1,\ 0 \le x \le 1, h = 0.1.$$

Решение.

Вычисления проводим по следующей таблице:

n	x_n	y_n	k	Δy_n
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1^{(0)}$	$k_2^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_2^{(0)}$	$k_3^{(0)}$	
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	
				Δy_0
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$k_1^{(1)}$	

Параметры k_1, k_2, k_3, k_4

рассчитывают по формулам (5.4).

Результаты вычислений запишем в таблицу.

$$k_1^{(0)} = hf_0 = 0.1 \cdot 2(x_0^2 + y_0) = 0.2$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2}\right) = 0.1 \cdot 2(0.05^2 + 1.1) = 0.2205$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2}\right) = 0.2(0.05^2 + 1.1103) = 0.2226$$

$$k_4^0 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3^0\right) = 0.2(0.1^2 + 1.2226) = 0.2465$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(0.2 + 2 \cdot 0.2205 + 2 \cdot 0.2226\right) + 0.2465 = 0.2221$$

$$k_1^{(1)} = hf(x_1, y_1) =$$

$$= 0.1 \cdot 2(x_1^2 + y_1) = 0.2 \cdot (0.1^2 + 1.2221) = 0.24642$$

$$k_2^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right) = 0.1 \cdot 2(0.15^2 + 1.34531) = 0.27356$$

$$k_3^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right) = 0.2(0.15^2 + 1.35888) = 0.27628$$

$$k_4^{(1)} = hf\left(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)}\right) =$$
$$= 0.2(0.2^2 + 1.49838) = 0.307676$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(0.24642 + 2\cdot 0.27356 + 2\cdot 0.27628 + 0.30768\right) = 0.27563$$

n	x_n	y_n	k	Δy_n
0	**0**	**1**	0.2	
	0.05	**1.1**	**0.2205**	
	0.05	**1.1103**	**0.2226**	
	0.1	**1.1113**	**0.2465**	
				0.2221
1	$x_1 = 0.1$	**1.2221**	**0.24642**	
	0.15	**1.34531**	**0.27356**	
	0.15	**1.35888**	**0.27628**	
	0.2	**1.49838**	**0.30768**	
				0.27563
2	$x_2 = 0.2$	**1.49773**		

Продолжая процесс, получим следующие значения

x_i	y_i
0.1	**1.2221**
0.2	**1.4977**
0.3	**1.8432**
0.4	**2.2783**
0.5	**2.8274**
0.6	**3.5201**
0.7	**4.3937**
0.8	**5.4894**
0.9	**6.8643**
1.0	**8.5834**

5.3 Разностный метод приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса.

Будем искать решение уравнения $y' = f(x, y)$ (5.5)

на отрезке $[a, b]$,

удовлетворяющее начальному условию: при

$$x = x_0, y = y_0.$$

Приближенные значения решения в точках

$x_0, x_1, \dots, x_n$ **будут** $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$

Разности первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

....

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

Разностями третьего порядка называются разности разностей второго порядка и т. д.

Через $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ **обозначим приближенные значения производных,**

через $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$ **– приближенные значения вторых производных и т. д.**

Аналогично определяются первые разности производных

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \ldots, \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

вторые разности производных $\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0,$

$$\Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \ldots, \quad \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$ **и т.д.**

Запишем формулу Тейлора для решения уравнений в окрестности точки $x = x_0$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m \quad (5.6)$$

В этой формуле y_0 **известно, а значения** $y_0', y_1', \ldots$ **производных находятся из уравнения (5.5).**

Подставим в правую часть уравнения (5.5) начальные значения x_0 **и** y_0 **найдем**

$$y_0' = f(x_0, y_0)$$

Дифференцируя уравнение (5.5) по *x*, получим:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \quad (5.7)$$

Подставляя в правую часть значения $x_0, y_0, y_0',$

найдем

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, y'=y_0'} \qquad (5.7)$$

Дифференцируя еще раз равенство (5.7) по *x* и подставляя значения $x_0, y_0, y_0', y_0'',$ найдем $y'''.$

Продолжая мы можем найти значения производных любого порядка при $x = x_0.$

Таким образом, пренебрегая остаточным членом, мы можем получить приближенные значения решения при любом значении *x*; их точность будет зависеть от величины $|x - x_0|$ и числа членов в разложении.

В рассмотренном методе по формуле (5.6) определяют только несколько первых значений y,

когда $\left| x - x_0 \right|$ мало.

Определим значения y_1 и y_2 при $x_1 = x_0 + h$

и при $x_2 = x_0 + 2h,$

беря четыре члена разложения (y_0 известно на на основании начальных данных):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' \qquad (5.8)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' \quad (5.9)$$

Таким образом, будем считать, что известны три значения функции:

$$y_0, y_1, y_2$$

Пользуясь уравнением (5.5), определяем:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), y'_1 = f(x_1, y_1), y'_2 = f(x_2, y_2)$$

Зная y'_0, y'_1, y'_2 можно определить

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta y''_0$$

Результаты вычислений удобно заносить в таблицу:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
…..	…..	…..	……	……
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Допустим, что нам известны значения решения

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k.$$

На основании этих значений мы можем вычислить, пользуясь уравнением (5.5), значения производных

$$y'_0, y'_1, \ldots, y'_k,$$

а следовательно $\Delta y'_0, \ldots, \Delta y'_{k-1}$ **и** $\Delta^2 y'_0, \ldots, \Delta^2 y'_{k-2}.$

Определим значение y_{k+1} **по формуле Тейлора , полагая**

$$x_0 = x_k, \qquad x = x_{k+1} = x_k + h.$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m$$

Ограничимся в нашем случае четырьмя членами разложения

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + . \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k \quad (5.10)$$

В этой формуле неизвестными являются y''_k и y'''_k,

которые определим через известные разности первого и второго порядка.

Вычислим производную от левой и правой части уравнения (5.6)

$$y' = y'_0 + (x - x_0) y''_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} y'''_0 + \ldots$$

Представим по формуле Тейлора y'_{k-1}, полагая

$$x_0 = x_k, \qquad x - x_k = -h:$$

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{-h}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k \qquad (5.11)$$

и y'_{k-2}, **полагая**

$$x_0 = x_k, \qquad x - x_k = -2h:$$

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{-2h}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k \quad (5.12)$$

Из равенства (5.11) находим

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k \quad (5.13)$$

Вычитая из (5.11) члены равенства (5.12), получим:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k \quad (5.14)$$

Из (5.13) и (5.14) находим:

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

или

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2} \quad (5.15).$$

Подставляя выражение y_k'''

в равенство (5.13), получим:

$$y_k'' = \frac{\Delta y_{k-1}'}{h} + \frac{\Delta^2 y_{k-2}'}{2h} \quad (5.16)$$

Подставляя (5.15) и (5.16) в разложение (5.10),получим:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + .\frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' \quad (5.17)$$

Выражение (5.17) называется **формулой Адамса с четырьмя членами.**

Формула (5.17) дает возможность, зная $y_k, y_{k-1}, y_{k-2},$ определить $y_{k+1}.$

Таким образом, зная y_0, y_1, y_2 **мы можем найти** y_3 **и далее** $y_4, y_5, \dots$

Замечание.

Если мы хотим получить большую точность вычисления, то следует брать больше, чем в разложении (5.10) членов.

Если вместо (5.10) взять формулу, содержащую справа пять членов, то вместо формулы (5.17) получим формулу

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}. \quad (5.18)$$

Пример 1

Найти приближенные значения решения уравнения $y' = y + x,$ удовлетворяющего начальному условию:

$x_0 = 0, y_0 = 1.$ **Значения решения определить при**

$$x = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4$$

Решение.

Найдем сначала y_1, y_2 **по формулам (5.8) и (5.9).**

Из уравнения и начальных данных получаем:

$$y_0' = (y + x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1$$

Дифференцируя исходное уравнение, получим

$$y' = y + x \qquad y'' = y' + 1$$

Следовательно $y_0'' = y_0' + 1 = 1 + 1 = 2$

Дифференцируем еще раз $y''' = y''$

Поэтому $y_0''' = y_0'' = 2$

Подставляя в равенство (5.8) значения y_0, y_0', y_0'', y_0'''

и $h = 0.1,$ **получим**

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' =$$

$$= 1 + \frac{0.1}{1} \cdot 1 + \frac{0.1^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.1^3}{6} \cdot 2 = 1.1103$$

Аналогично

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' =$$

$$= 1 + \frac{2 \cdot 0.1}{1} \cdot 1 + \frac{0.2^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.2^3}{3} \cdot 2 = 1.2427$$

Зная $y_0, y_1, y_2,$ **находим:**

$$y'_0 = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y'_1 = y_1 + x_1 = 1.1103 + 0.1 = 1.2103,$$

$$y'_2 = y_2 + x_2 = 1.2427 + 0.2 = 1.4427,$$

$$\Delta y'_0 = 0.2103,$$

$$\Delta y'_1 = 0.2324,$$

$$\Delta^2 y'_0 = 0.0221.$$

Полученные значения заносим в таблицу

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1.0000$	$y'_0 = 1$		
			$\Delta y'_0 = 0.2103$	
$x_1 = 0.1$	$y_1 = 1.1103$	$y'_1 = 1.2103$		$\Delta^2 y'_0 = 0.0221$
			$\Delta y'_1 = 0.2324$	
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 1.2427$	$y'_2 = 1.4427$		$\Delta^2 y'_1 = 0.0244$
			$\Delta y'_2 = 0.2568$	
$x_3 = 0.3$	$y_3 = 1.3995$	$y'_3 = 1.6995$		
$x_4 = 0.4$	$y_4 = 1.5833$			

По формуле (5.17) находим y_3

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{1} y_2' + \frac{h}{2} \Delta y_1' + . \frac{5h}{12} \Delta^2 y_0' =$$

$$= 1.2427 + 0.1 \cdot 1.4427 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.2324 + \frac{0.1 \cdot 5}{12} \cdot 0.0221 = 1.3995$$

Далее находим значения $y_3', \Delta y_2', \Delta^2 y_1'$

$$y_3' = y_3 + x_3 = 1.3995 + 0.3 = 1.6995$$

$$\Delta y_2' = y_3' - y_2' = 1.6995 - 1.4427 = 0.2568,$$

$$\Delta^2 y_1' = \Delta y_2' - \Delta y_1' = 0.2568 - 0.2324 = 0.0244.$$

Снова по формуле (5.17) находим y_4

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{1} y_3' + \frac{h}{2} \Delta y_2' + .\frac{5h}{12} \Delta^2 y_1' =$$

$$= 1.3995 + 0.1 \cdot 1.6995 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.2568 + \frac{0.1 \cdot 5}{12} \cdot 0.0244 = \underline{\underline{1.5833}}$$

Точное выражение решения данного уравнения

$$y = 2e^x - x - 1$$

Следовательно, $y_{x=0.4} = 2e^{0.4} - 0.4 - 1 = 1.58364$

Абсолютная погрешность $|1.58364 - 1.5833| = 0.0003$