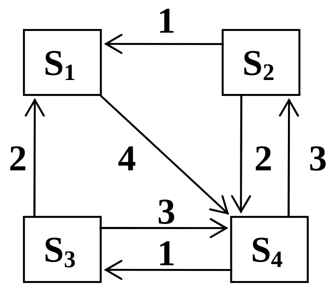
Практическое занятие 3.1

Задание 1. Рассматривается система **S** с дискретными состояниями S_1, S_2, S_3, S_4 и непрерывным временем. Задан размеченный граф состояний и заданы интенсивности переходов $\lambda_{14}=4$, $\lambda_{21}=1$, $\lambda_{24}=2$, $\lambda_{31}=2$, $\lambda_{34}=3$, $\lambda_{42}=3$, $\lambda_{43}=1$.



Требуется:

1) составить систему уравнений Колмогорова для вероятностей $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$;

2) при $t \to \infty$ в системе устанавливается стационарный режим. По формулам (3.1) в полученной системе перейти к финальным вероятностям p_1, p_2, p_3, p_4;

3) для построенной линейной системы записать расширенную матрицу A. С помощью команд Maple привести матрицу A к простейшему виду. Найти p_1, p_2, p_3, p_4 .

4) записать вывод о процентном распределении времени нахождения системы **S** в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 после вхождения ее в стационарный режим.

Решение. **1) Составим систему Колмогорова**

В левой части уравнения записываем производную $p_j'(t)$.

В нашей системе **S** $= \{ S_1, S_2, S_3, S_4 \}$ четыре состояния $n=4$

$\Rightarrow$ получим начальную запись системы

$$\begin{cases} p_1'(t) = \\ p_2'(t) = \\ p_3'(t) = \\ p_4'(t) = \end{cases}$$

Дописываем **правую** часть **1-го** уравнения ($j=1$)

а) для стрелок, **входящих в** S_1 со знаком $(+)$ записываем

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{21}=1} S_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{21} \cdot p_2(t) = 1 \cdot p_2(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{31}=2} S_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{31} \cdot p_3(t) = 2 \cdot p_3(t)$$

б) для стрелки, **выходящей из** S_1 со знаком $(-)$ записываем

$$S_1 \xrightarrow{\lambda_{14}=4} S_4 \quad \Rightarrow \quad (-1) \cdot \lambda_{14} \cdot p_1(t) = -4 \cdot p_1(t)$$

Получаем 1-е уравнение

$$p_1'(t) = -4p_1(t) + p_2(t) + 2p_3(t).$$

Дописываем **правую** часть **2-го** уравнения ($j=2$)

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{42}=3} S_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{42} \cdot p_4(t) = 3 \cdot p_4(t)$$

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{21}=1} S_1 \quad \Rightarrow \quad (-1) \cdot \lambda_{21} \cdot p_2(t) = -1 \cdot p_2(t)$$

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{24}=2} S_4 \quad \Rightarrow \quad (-1) \cdot \lambda_{24} \cdot p_2(t) = -2 \cdot p_2(t)$$

Получаем 2-е уравнение: $p_2'(t) = -p_2(t) - 2p_2(t) + 3p_4(t)$.

$$p_2'(t) = -3p_2(t) + 3p_4(t)$$

Дописываем **правую** часть **3-го** уравнения ($j=3$)

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{43}=1} S_3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{43} \cdot p_4(t) = 1 \cdot p_4(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{31}=2} S_1 \quad \Rightarrow \quad (-1) \cdot \lambda_{31} \cdot p_3(t) = -2 \cdot p_3(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{34}=3} S_4 \quad \Rightarrow \quad (-1)\cdot\lambda_{34}\cdot p_3(t) = -3\cdot p_3(t)$$

Получаем 3-е уравнение: $p_3'(t) = -2p_3(t) - 3p_3(t) + p_4(t)$

$$p_3'(t) = -5p_3(t) + p_4(t).$$

Дописываем **правую** часть **4-го** уравнения (j=4)

Правая часть **4-го** уравнения (j=4):

$$S_1 \xrightarrow{\lambda_{14}=4} S_4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{14}\cdot p_1(t) = 4\cdot p_1(t)$$

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{24}=2} S_4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{24}\cdot p_2(t) = 2\cdot p_2(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{34}=3} S_4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{34}\cdot p_3(t) = 3\cdot p_3(t)$$

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{42}=3} S_2 \quad \Rightarrow \quad (-1)\cdot\lambda_{42}\cdot p_4(t) = -3\cdot p_4(t)$$

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{43}=1} S_3 \quad \Rightarrow \quad (-1)\cdot\lambda_{43}\cdot p_4(t) = -1\cdot p_4(t)$$

Получаем 4-е уравнение:

$$p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 3p_4(t) - p_4(t)$$

$$p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t)$$

К построенным четырем уравнениям добавим нормирующее уравнение $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$.

В систему запишем его <u>на первом месте</u>.

В результате получим системy Колмогорова:

$$\begin{cases} 1 = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \\ p_1'(t) = -4p_1(t) + p_2(t) + 2p_3(t) \\ p_2'(t) = -3p_2(t) + 3p_4(t) \\ p_3'(t) = -5p_3(t) + p_4(t) \\ p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t) \end{cases} \qquad \textbf{(3.3)}$$

2) При $t \to \infty$ в системе устанавливается стационарный режим.

По формулам (3.1) в полученной системе перейдем к финальным вероятностям $\mathbf{p_1, p_2, p_3, p_4}$.

$$p_1(t) \to p_1, \quad p_2(t) \to p_2, \quad p_3(t) \to p_3, \quad p_4(t) \to p_4$$

$$\Rightarrow \quad p_1'(t) \to 0, \quad p_2'(t) \to 0, \quad p_3'(t) \to 0, \quad p_4'(t) \to 0.$$

Подставим их предыдущую систему (3.3) и получим систему линейных уравнений для вероятностей p_1, p_2, p_3, p_4:

$$\begin{cases} 1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ 0 = -4p_1 + p_2 + 2p_3 \\ 0 = -3p_2 + 3p_4 \\ 0 = -5p_3 + p_4 \\ 0 = 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 4p_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ -4p_1 + p_2 + 2p_3 = 0 \\ -3p_2 + 3p_4 = 0 \\ -5p_3 + p_4 = 0 \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 4p_4 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{(3.4)}$$

3) Записшем расширенную матрицу A, привести ее к простейшему виду, найдем p_1, p_2, p_3, p_4

По системе (3.4) записываем ее расширенную матрицу

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

В пакете Maple записываем команды

```
> restart: with(linalg):
> A:=matrix(5,5,[[ 1,1,1,1,1],
                 [-4,1,2,0,0],
                 [0,-3,0,3,0],
                 [0,0,-5,1,0],
                 [4,2,3,-4,0]]);
> rangA:=rank(A);
> Q:=rref(A);
> P:=col(Q,5);
> for i from 1 to rangA do print(p[i]=P[i]*1.0) od;
```

После запуска программы в работу получим

```
> restart: with(linalg):
> A:=matrix(5,5,[[ 1,1,1,1,1],
                [-4,1,2,0,0],
                [0,-3,0,3,0],
                [0,0,-5,1,0],
                [4,2,3,-4,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rangA:=rank(A);
```

$$rangA := 4$$

```
> Q:=rref(A);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{51} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{20}{51} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{20}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> P:=col(Q,5);
```

$$P := \left[\frac{7}{51}, \frac{20}{51}, \frac{4}{51}, \frac{20}{51}, 0 \right]$$

```
> for i from 1 to rangA do print(p[i]=P[i]*1.0) od;
```

$$p_1 = 0.1372549020$$

$$p_2 = 0.3921568627$$

$$p_3 = 0.07843137255$$

$$p_4 = 0.3921568627$$

```
> Ответ
> Система S будет находится
> в состоянии  S1  в среднем  14 % всего времени,
> в состоянии  S2  в среднем  39 % всего времени,
> в состоянии  S3  в среднем   8 % всего времени,
> в состоянии  S4  в среднем  39 % всего времени.
```

Внимание. Если rank(A) $\neq$ 4, то система **составлена неверно** или **матрица А записана с ошибкой**.