МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВТОРОГО КУРСА МЕХАНИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ВИТЕБСК
2011

УДК 517 (075)
Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей.
Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2011.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В.,
доцент Денисов В.С.,
доцент Загурский В.Н.,
ст. преп. Дмитриев А.П.,
ст. преп. Завацкий Ю.А.

Задания для выполнения типовых расчётов написаны в соответствии с учебными программами по курсам «Высшая математика» или «Математика» для механико-технологических специальностей дневной формы обучения: 1-36 08 01; 1-53 01 01 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04. В заданиях для выполнения типовых расчетов приведены теоретические вопросы по следующим разделам предметов «Высшая математика» или «Математика»: операционное исчисление, кратные интегралы и их геометрические и механические приложения, элементы теории поля, числовые и функциональные ряды. Индивидуальные задания могут быть использованы на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов, дневной и заочной форм обучения, а также при подготовке к сдаче экзамена или зачета по курсам «Высшая математика» или «Математика».

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
4 марта 2011 г., протокол № 7

Рецензент: канд. ф.-м. н., доц. Дунина Е.Б.

Редактор: канд. ф.-м. н., доц. УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Сурин Т.Л.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "____" ___________2011 г., протокол №______

Ответственный за выпуск: Лопатнёва Н.Г.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”
Подписано к печати _________ Формат ________ Уч. - изд. лист. _______
Печать ризографическая. Тираж ______экз. Заказ № ____ Цена ______________

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.
Лицензия №02330/0494384 от 16 марта 2009 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ВВЕДЕНИЕ

Данные задания к типовым расчётам предназначены для студентов следующих специальностей «Машины и аппараты лёгкой, текстильной промышленности и бытового обслуживания», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Технология машиностроения», «Технологическое оборудование машиностроительного производства», «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» высших учебных заведений, изучающих дисциплины «Высшая математика» или «Математика». В данных материалах приведены индивидуальные задания для выполнения типового расчёта по темам «Операционное исчисление», «Кратные интегралы», «Геометрические и механические приложения кратных интегралов», «Криволинейные, поверхностные интегралы, элементы векторного поля», «Ряды», которые изучаются на втором году обучения. Типовой расчёт как специфическая форма расчётно-графической работы по высшей математике входит в учебную программу указанных специальностей и является основной формой контролируемой самостоятельной работы студентов.

Данное издание является продолжением учебно-методических материалов «Высшая математика. Задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей» и предназначены для студентов второго курса механико-технологических специальностей для выполнения типового расчёта в третьем семестре. Задания для типовых расчётов составлены в соответствии с базовыми и рабочими программами для студентов механико-технологических специальностей вузов. Каждый раздел содержит однотипные задачи для тридцати вариантов индивидуальных заданий и перечень теоретических вопросов, ответы на которые необходимо знать студенту при защите выполненного типового расчёта. В учебно-методических материалах имеются приложения, которые могут быть использованы при решении задач типового расчёта.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЁТА

Содержание индивидуальных заданий, включённых в типовой расчёт, определяется преподавателем, читающим лекционный курс или преподавателем, ведущим практические и лабораторные занятия, и может содержать задания одного или нескольких разделов. При составлении типового расчёта следует руководствоваться прикладным характером предложенных примеров, уделяя особое внимание дальнейшему применению полученных математических знаний при изучении задач специальных дисциплин.

При выполнении заданий типового расчёта по высшей математике студент обязан показать умение применять полученные практические знания и навыки наиболее рационального решения типовых математических задач по выбранным разделам. Изучение основных понятий, свойств, теорем, формул и методов решений позволит студенту верно решить предложенные задачи и произвести самоконтроль степени усвоения учебного материала, выявить пробелы в знаниях.

Самостоятельное решение заданий типового расчёта предусматривает своей целью не столько определение недостатков обучения, сколько оттачивание приобретённых навыков решения математических задач с целью применения полученных знаний для решения задач специальных дисциплин, соответствующих выбранной профессии инженера-механика. Так, использование математических методов операционного исчисления позволяет упростить решение многих задач электротехники, а его приложения – находить решения дифференциальных уравнений, описывающей движения тел в теоретической механике. Знания, полученные студентом при вычислении кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, пригодятся для их геометрического и механического приложения в начертательной геометрии, при изучении основных понятий сопротивления материалов, теории электромагнитных полей и силовых воздействий. Задачи из раздела «Ряды» помогут студенту понять основные принципы приближённого вычисления и информационных технологий.

При решении задач типового расчёта студент должен руководствоваться курсом лекций по высшей математике, учебной литературой, список которой приведён в конце данного издания, а также решением типовых примеров, полученных на практических занятий.

Типовой расчёт должен быть выполнен на писчих листах формата А4 и оформлен согласно принятым стандартам для РГР. Особое внимание при оформлении следует уделить следующему: надёжное скрепление между собой листов типового расчёта; полное условие задачи и её подробное решение следует располагать в порядке следования на одной стороне листа, оставляя другую сторону чистой для выполнения работ над ошибками, указанных преподавателем при рецензировании работы.

Следует учесть, что в некоторых задачах типового расчёта исходные данные необходимо рассчитать, прежде чем записать условие индивидуального задания. Титульный лист типового расчёта должен обязательно иметь чертёжную рамку и содержать следующую информацию: наименование учебного заведения и кафедры, выдавшей задания типового расчёта, его номер и название, вариант индивидуального задания, полная информация о студенте, выполнившим типовой расчёт, и преподавателе-рецензенте, год выполнения.

Типовой расчёт должен быть выполнен и представлен на рецензирование в сроки, назначенные преподавателем, его выдавшим. Типовой расчёт, выполненный не самостоятельно, рецензированию не подлежит.

РАЗДЕЛ 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

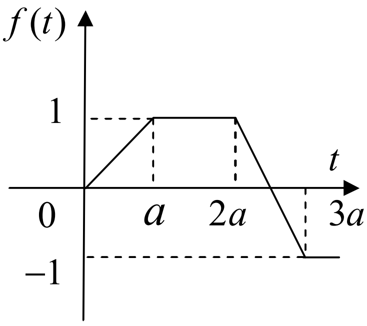
ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Определение оригинала и его изображение преобразования Лапласа.
2. Свойства линейности и однородности преобразования Лапласа.
3. Свойства запаздывания оригинала и смещения изображения.
4. Свойства дифференцирования оригинала и изображения.
5. Свойства интегрирования оригинала и изображения.
6. Свертка оригиналов. Теорема об изображении свертки.
7. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
8. Интеграл Дюамеля и его применение к решению дифференциальных уравнений.

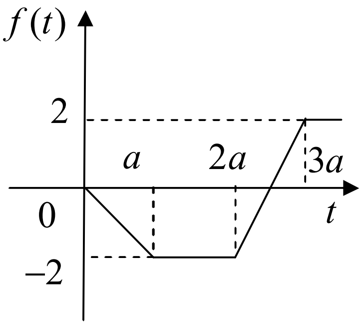
ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. По заданному графику функции-оригинала найти изображение функции.

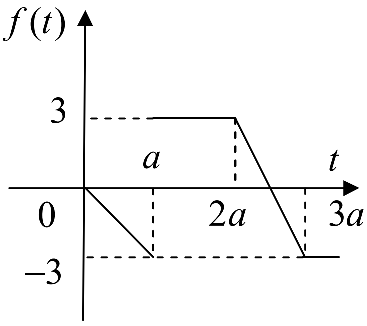
1.1



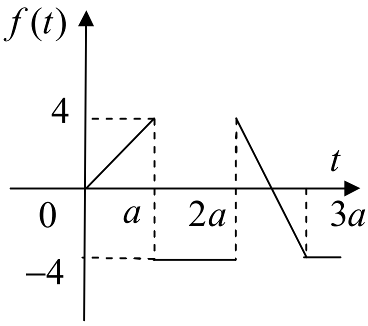
1.2



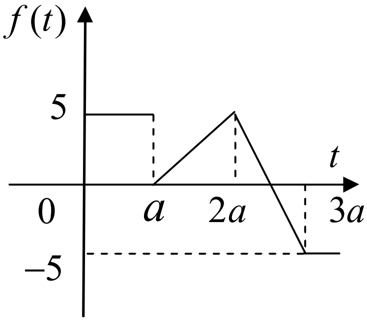
1.3



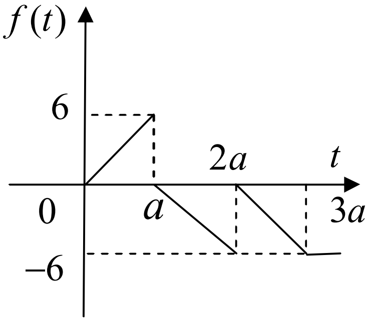
1.4



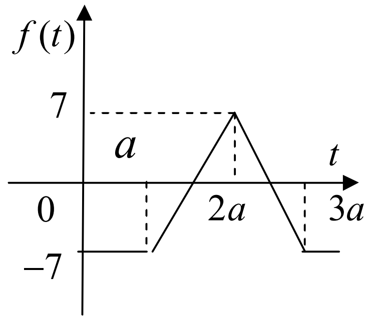
1.5



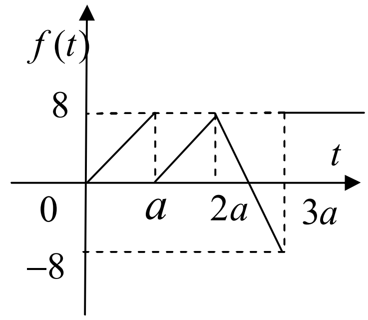
1.6



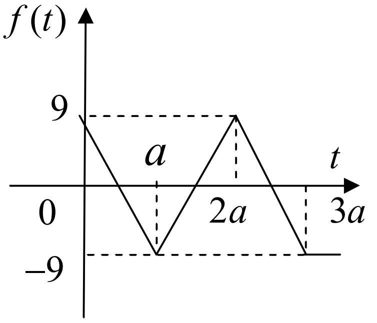
1.7



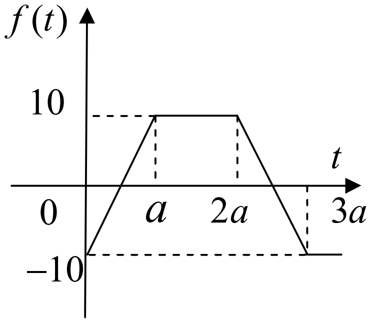
1.8



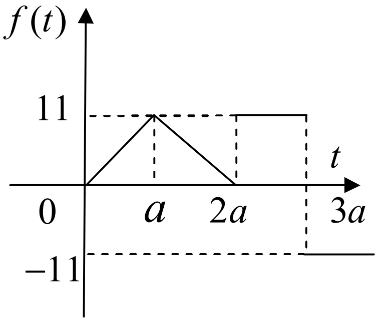
1.9



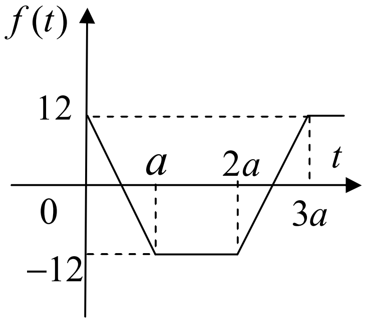
1.10



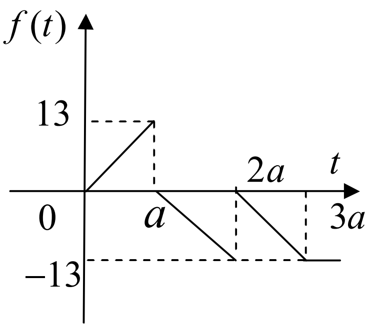
1.11



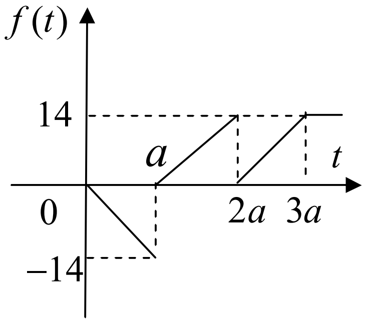
1.12



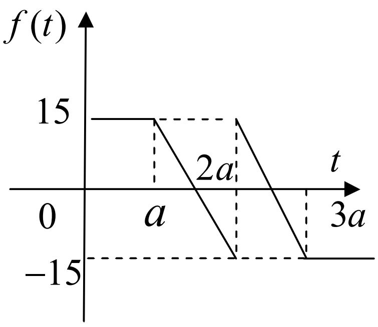
1.13



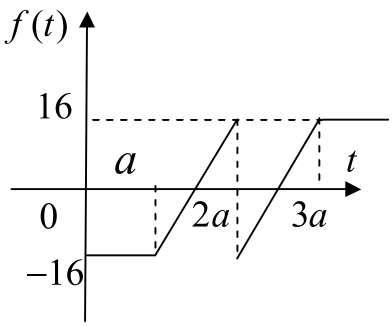
1.14



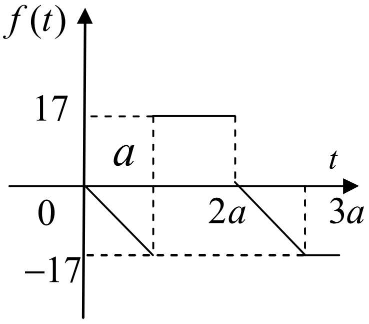
1.15



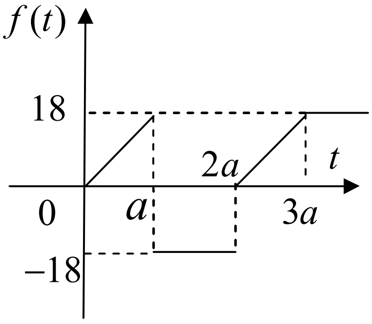
1.16



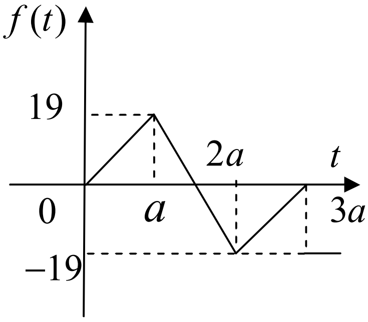
1.17



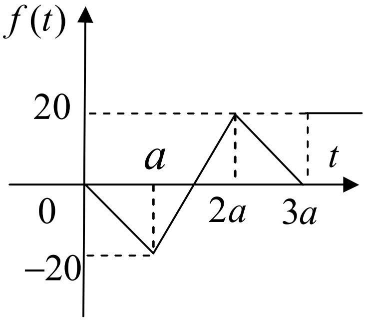
1.18



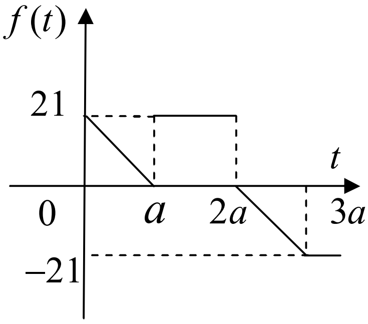
1.19



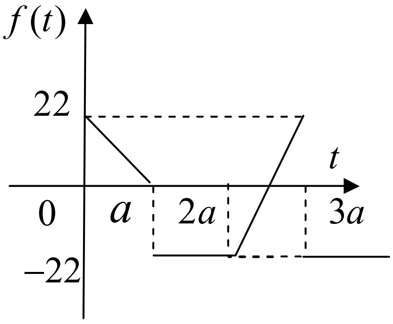
1.20



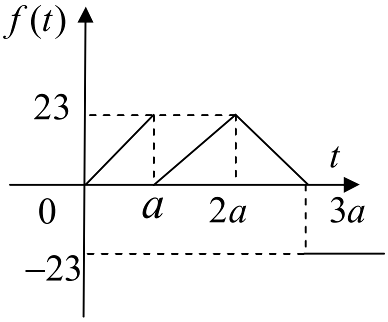
1.21



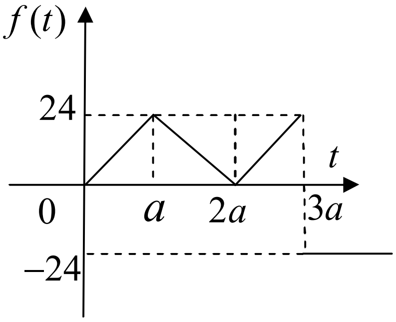
1.22



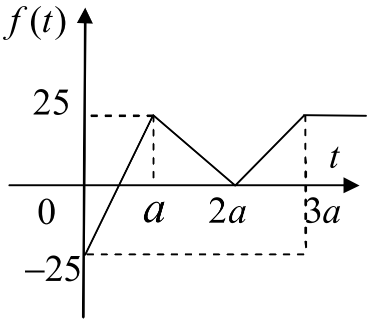
1.23



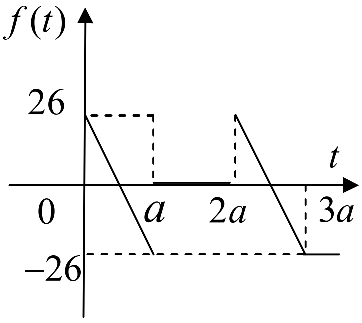
1.24



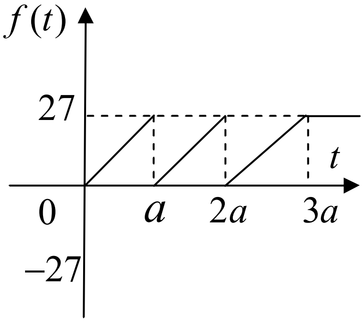
1.25



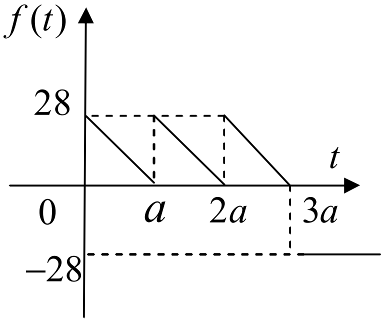
1.26



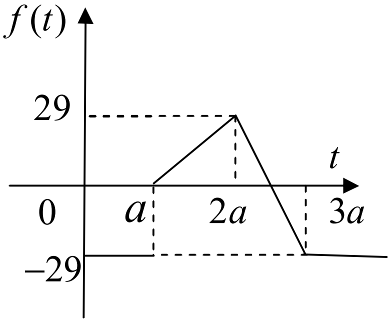
1.27



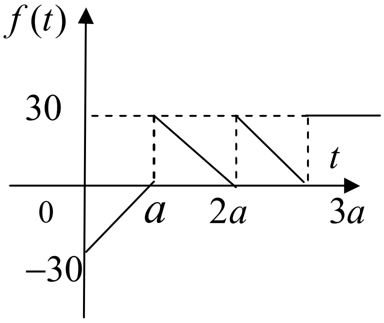
1.28



1.29



1.30



2. Найти функцию-оригинал по заданному изображению.

2.1 а) $\dfrac{1}{(p^2-1)^2}$; б) $\dfrac{p-1}{p^2(p^2+1)}$; в) $\dfrac{e^{-p}}{(p-1)\cdot(p^2+2p+2)}$.

2.2 а) $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; б) $\dfrac{p+2}{p^2(p^2-1)}$; в) $\dfrac{e^{2p}}{(p+2)\cdot(p^2-2p+2)}$.

2.3 а) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$; б) $\dfrac{p-3}{p^2(p^2+4)}$; в) $\dfrac{e^{-3p}}{(p-3)\cdot(p^2+4p+5)}$.

2.4 а) $\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$; б) $\dfrac{p+4}{p^2(p^2-4)}$; в) $\dfrac{e^{4p}}{(p+4)\cdot(p^2-4p+5)}$.

2.5 а) $\dfrac{1}{(p^2-9)^2}$; б) $\dfrac{p-5}{p^2(p^2+9)}$; в) $\dfrac{e^{-5p}}{(p-5)\cdot(p^2+2p+10)}$.

2.6 а) $\dfrac{p}{(p^2+9)^2}$; б) $\dfrac{p+6}{p^2(p^2-9)}$; в) $\dfrac{e^{6p}}{(p+6)\cdot(p^2-2p+10)}$.

2.7 а) $\dfrac{9}{(p^2-25)^2}$; б) $\dfrac{p-7}{p^2(p^2+25)}$; в) $\dfrac{e^{-7p}}{(p-7)\cdot(p^2+4p+13)}$.

2.8 а) $\dfrac{9p}{(p^2+25)^2}$; б) $\dfrac{p+8}{p^2(p^2-25)}$; в) $\dfrac{e^{8p}}{(p+8)\cdot(p^2-4p+13)}$.

2.9 а) $\dfrac{16}{(p^2-36)^2}$; б) $\dfrac{p-9}{p^2(p^2+36)}$; в) $\dfrac{e^{-9p}}{(p-9)\cdot(p^2+6p+13)}$.

2.10 а) $\dfrac{10p}{(p^2+36)^2}$; б) $\dfrac{p+10}{p^2(p^2-36)}$; в) $\dfrac{e^{10p}}{(p+10)\cdot(p^2-6p+13)}$.

2.11 а) $\dfrac{4}{(p^2-49)^2}$; б) $\dfrac{p-11}{p^2(p^2+49)}$; в) $\dfrac{e^{-11p}}{(p-11)\cdot(p^2+8p+25)}$.

2.12 а) $\dfrac{12p}{(p^2+49)^2}$; б) $\dfrac{p+12}{p^2(p^2-49)}$; в) $\dfrac{e^{12p}}{(p+12)\cdot(p^2-8p+25)}$.

2.13 а) $\dfrac{13}{(p^2-64)^2}$; б) $\dfrac{p-13}{p^2(p^2+64)}$; в) $\dfrac{e^{-13p}}{(p-13)\cdot(p^2+8p+20)}$.

2.14 а) $\dfrac{p}{(p^2+64)^2}$; б) $\dfrac{p+14}{p^2(p^2-64)}$; в) $\dfrac{e^{14p}}{(p+14)\cdot(p^2-8p+20)}$.

2.15 а) $\dfrac{15}{(p^2-100)^2}$; б) $\dfrac{p-15}{p^2(p^2+100)}$; в) $\dfrac{e^{-15p}}{(p-15)\cdot(p^2+10p+146)}$.

2.16 а) $\dfrac{16p}{(p^2+100)^2}$; б) $\dfrac{p+16}{p^2(p^2-100)}$; в) $\dfrac{e^{16p}}{(p+16)\cdot(p^2-10p+146)}$.

2.17 а) $\dfrac{17}{(p^2-121)^2}$; б) $\dfrac{p-17}{p^2(p^2+121)}$; в) $\dfrac{e^{-19p}}{(p-10)\cdot(p^2+12p+40)}$.

2.18 а) $\dfrac{18p}{(p^2+121)^2}$; б) $\dfrac{p+18}{p^2(p^2-121)}$; в) $\dfrac{e^{18p}}{(p+18)\cdot(p^2-12p+40)}$.

2.19 а) $\dfrac{19}{(p^2-144)^2}$; б) $\dfrac{p-19}{p^2(p^2+144)}$; в) $\dfrac{e^{-19p}}{(p-19)\cdot(p^2+4p+29)}$.

2.20 а) $\dfrac{20p}{(p^2+144)^2}$; б) $\dfrac{p+20}{p^2(p^2-144)}$; в) $\dfrac{e^{20p}}{(p+20)\cdot(p^2-4p+29)}$.

2.21 а) $\dfrac{21}{(p^2-169)^2}$; б) $\dfrac{p-21}{p^2(p^2+169)}$; в) $\dfrac{e^{-21p}}{(p-21)\cdot(p^2+12p+40)}$.

2.22 а) $\dfrac{22p}{(p^2+169)^2}$; б) $\dfrac{p+22}{p^2(p^2-169)}$; в) $\dfrac{e^{22p}}{(p+22)\cdot(p^2-12p+40)}$.

2.23 а) $\dfrac{23}{(p^2-196)^2}$; б) $\dfrac{p-23}{p^2(p^2+196)}$; в) $\dfrac{e^{-23p}}{(p-23)\cdot(p^2+14p+53)}$.

2.24 а) $\dfrac{24p}{(p^2+196)^2}$; б) $\dfrac{p+24}{p^2(p^2-196)}$; в) $\dfrac{e^{24p}}{(p+24)\cdot(p^2-14p+53)}$.

2.25 а) $\dfrac{25}{(p^2-225)^2}$; б) $\dfrac{p-25}{p^2(p^2+225)}$; в) $\dfrac{e^{-25p}}{(p-25)\cdot(p^2+2p+65)}$.

2.26 а) $\dfrac{26p}{(p^2+225)^2}$; б) $\dfrac{p+26}{p^2(p^2-225)}$; в) $\dfrac{e^{26p}}{(p+26)\cdot(p^2-2p+65)}$.

2.27 а) $\dfrac{27}{(p^2-256)^2}$; б) $\dfrac{p-27}{p^2(p^2+256)}$; в) $\dfrac{e^{-27p}}{(p-27)\cdot(p^2+4p+85)}$.

2.28 а) $\dfrac{28p}{(p^2+256)^2}$; б) $\dfrac{p+28}{p^2(p^2-256)}$; в) $\dfrac{e^{28p}}{(p+28)\cdot(p^2-4p+85)}$.

2.29 а) $\dfrac{29}{(p^2-289)^2}$; б) $\dfrac{p-29}{p^2(p^2+289)}$; в) $\dfrac{e^{-29p}}{(p-29)\cdot(p^2+2p+229)}$.

2.30 а) $\dfrac{30p}{(p^2+289)^2}$; б) $\dfrac{p+30}{p^2(p^2-289)}$; в) $\dfrac{e^{30p}}{(p+30)\cdot(p^2-2p+229)}$.

3. Методами операционного исчисления решить задачу Коши для заданного дифференциального уравнения.

3.1 $x''+x'-2x=2\sin t-3\cos t,$ $x(0)=2,\ x'(0)=1.$

3.2 $x''+x=\mathrm{sh}2t,$ $x(0)=1,\ x'(0)=2.$

3.3 $x''+4x'+5x=\mathrm{ch}2t,$ $x(0)=2,\ x'(0)=3.$

3.4 $x''-x'-2x=3\sin 2t-2\cos 2t,$ $x(0)=3,\ x'(0)=2.$

3.5 $x''-5x'+6x=2\sin 3t+\cos 3t,$ $x(0)=3,\ x'(0)=4.$

3.6 $x''+4x=\mathrm{ch}2t,$ $x(0)=4,\ x'(0)=3.$

3.7 $x''-4x'+5x=\mathrm{ch}3t,$ $x(0)=4,\ x'(0)=5.$

3.8 $x''+5x'+6x=\sin 4t-\cos 4t,$ $x(0)=5,\ x'(0)=4.$

3.9 $x''+4x'-5x=2\sin 5t-3\cos 5t,$ $x(0)=5,\ x'(0)=6.$

3.10 $x''+9x=\mathrm{sh}4t,$ $x(0)=6,\ x'(0)=5.$

3.11 $x''+2x'+2x=\mathrm{ch}4t,$ $x(0)=6,\ x'(0)=7.$

3.12 $x''-6x'+8x=6\sin 6t-6\cos 6t,$ $x(0)=7,\ x'(0)=6.$

3.13 $x''+6x'+8x=7\sin 7t+7\cos 7t,$ $x(0)=7,\ x'(0)=8.$

3.14 $x''+16x=\mathrm{ch}5t,$ $x(0)=8,\ x'(0)=7.$

3.15 $x''-2x'+2x=\mathrm{ch}5t,$ $x(0)=8,\ x'(0)=9.$

3.16 $x''+7x'-8x=2\sin 8t-\cos 8t,$ $x(0)=9,\ x'(0)=8.$

3.17 $x''-6x'+5x=\sin 9t+4\cos 9t,$ $x(0)=3,\ x'(0)=1.$

3.18 $x''+25x=\mathrm{sh}6t,$ $x(0)=1,\ x'(0)=3.$

3.19 $x''+6x'+13x=\mathrm{ch}6t,$ $x(0)=2,\ x'(0)=0.$

3.20 $x''+6x'+5x=-5\sin 2t+3\cos 2t,$ $x(0)=3,\ x'(0)=4.$

3.21 $x''-8x'+7x=4\sin 5t+3\cos 5t,$ $x(0)=4,\ x'(0)=5.$

3.22 $x''+36x=3\mathrm{ch}7t,$ $x(0)=2,\ x'(0)=7.$

3.23 $x''-6x'+13x=\mathrm{ch}7t,$ $x(0)=2,\ x'(0)=4.$

3.24 $x''+8x'+7x=6\sin 5t-6\cos 5t,$ $x(0)=5,\ x'(0)=5.$

3.25 $x'' - 8x' + 15x = 2\sin t - 3\cos t,$ $x(0) = 3,\ x'(0) = 5.$

3.26 $x'' + 49x = \mathrm{sh}8t,$ $x(0) = 7,\ x'(0) = -7.$

3.27 $x'' + 2x' + 17x = \mathrm{ch}8t,$ $x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

3.28 $x'' + 8x' + 15x = \sin t - \cos t,$ $x(0) = -3,\ x'(0) = -5.$

3.29 $x'' + 6x' + 9x = 3\sin 3t + 3\cos 3t,$ $x(0) = 3,\ x'(0) = 3.$

3.30 $x'' + 64x = \mathrm{ch}9t,$ $x(0) = -8,\ x'(0) = 8.$

4. Методами операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4.1 $x'' - x = \dfrac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.2 $x'' + 2x' + x = \dfrac{t}{te^{t} + e^{t}}.$

4.3 $x'' - x' = \dfrac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}.$

4.4 $x'' - x' = \dfrac{1}{e^{-t} + 1}.$

4.5 $x'' + 4x' + 4x = \dfrac{1}{\left(e^{t} + 2te^{t}\right)^{2}}.$

4.6 $x'' + 2x' = \dfrac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.7 $x'' - x = \dfrac{2e^{t}}{1 + e^{2t}}.$

4.8 $x'' + 2x' + x = \dfrac{1}{e^{t} + t^{2}e^{t}}.$

4.9 $x'' - 2x' + x = \dfrac{4e^{t}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.10 $x'' + x' = \dfrac{e^{-t}}{e^{-t} + 1}.$

4.11 $x'' + x' = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{ch}t}.$

4.12 $x'' - 2x' + x = \dfrac{1}{e^{-t}(1 + t)}.$

4.13 $x'' - 4x' + 4x = \dfrac{8e^{2t}}{e^{4t} + e^{-4t} + 2}.$

4.14 $x'' - 4x = \dfrac{1}{1 + \mathrm{ch}2t}.$

4.15 $x'' - 9x = \dfrac{\mathrm{sh}3t}{\mathrm{ch}^{2}3t}.$

4.16 $x'' + 6x' + 9x = \dfrac{e^{-3t}}{(t + 3)^{2}}.$

4.17 $x'' - 4x = \dfrac{1}{ch^{3}2t}.$

4.18 $x'' - 9x = \mathrm{th}3t.$

4.19 $x'' - 10x' + 25x = \dfrac{e^{5t}}{1 + t^{2}}.$

4.20 $x'' - 4x = \dfrac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}.$

4.21 $x'' - 9x = \mathrm{th}^{2}3t.$

4.22 $x'' - x' = \dfrac{e^{t}}{2e^{-t} + 1}.$

4.23 $x'' + x' = \dfrac{e^{-2t}}{(1 + e^{-t})^{2}}.$

4.24 $x'' + 4x' + 4x = \dfrac{e^{-2t}}{\mathrm{ch}^{2}2t}.$

4.25 $x'' - 16x = \mathrm{th}^{2}4t.$

4.26 $x'' + x' = \dfrac{e^{2t}}{2 + e^{t}}.$

4.27 $x'' - x' = \dfrac{1}{\left(1+e^{-t}\right)^2}$.

4.28 $x'' + x' = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$.

4.29 $x'' - 25x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 5t}$.

4.30 $x'' - 2x' = \dfrac{2}{1+e^{-2t}}$.

5. Методами операционного исчисления решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

5.1 $\begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = 5x - 2y + 2e^t; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -4.$

5.2 $\begin{cases} x' = 3x + 7y + e^{2t}, \\ y' = x - 3y + 2e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = -2,\ y(0) = 3.$

5.3 $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = -x + 2y - 5e^{3t}; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 5.$

5.4 $\begin{cases} x' = x - y + 8e^{4t}, \\ y' = x + 3y - e^{4t}; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

5.5 $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 8e^{6t}, \\ y' = 3x + 4y + 2e^{6t}; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = -1.$

5.6 $\begin{cases} x' = x + 4y - 6e^{5t}, \\ y' = 2x - y + 4e^{5t}; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = -2.$

5.7 $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 2e^{7t}, \\ y' = -x + 5y - 5e^{7t}; \end{cases}$ $x(0) = 4,\ y(0) = -1.$

5.8 $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 8e^{8t}, \\ y' = x + 2y - e^{8t}; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 8.$

5.9 $\begin{cases} x' = -5x - 3y + e^{9t}, \\ y' = 3x + 5y + 2e^{9t}; \end{cases}$ $x(0) = 4,\ y(0) = -2.$

5.10 $\begin{cases} x' = 6x - 11y + e^{10t}, \\ y' = x - 6y + 2e^{10t}; \end{cases}$ $x(0) = -4,\ y(0) = -5.$

5.11 $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3e^{-t}, \\ y' = x + 4e^{-t}; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = -9.$

5.12 $\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-2t}, \\ y' = x + 3y - e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0) = 6,\ y(0) = -1.$

5.13 $\begin{cases} x' = -7x + 4y + 8e^{-3t}, \\ y' = 8x + 7y + 2e^{-3t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -5.$

5.14 $\begin{cases} x' = 8x + 5y - 6e^{-4t}, \\ y' = -3x - 8y + 4e^{-4t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -4.$

5.15 $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^{-5t}, \\ y' = -2x + 6y - 2e^{-5t}; \end{cases}$
$x(0) = 6,\ y(0) = -3.$

5.16 $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 6e^{-6t}, \\ y' = 2x + 7y - 3e^{-6t}; \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = -3.$

5.17 $\begin{cases} x' = -9x + 19y + 2e^{-7t}, \\ y' = x + 9y + e^{-7t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -3.$

5.18 $\begin{cases} x' = 10x - 16y + e^{-8t}, \\ y' = 4x - 10y + 2e^{-8t}; \end{cases}$
$x(0) = -5,\ y(0) = 5.$

5.19 $\begin{cases} x' = 3x - 5y + 7e^{-9t}, \\ y' = -x + 7y - e^{-9t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -5.$

5.20 $\begin{cases} x' = 4x - 2y + 8e^{-10t}, \\ y' = -6x + 5y - 3e^{-10t}; \end{cases}$
$x(0) = 5,\ y(0) = 10.$

5.21 $\begin{cases} x' = -11x + 7y + 8e^{12t}, \\ y' = 3x + 11y + 2e^{12t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -1.$

5.22 $\begin{cases} x' = 12x + 4y - 6e^{11t}, \\ y' = 11x - 12y + 4e^{11t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

5.23 $\begin{cases} x' = 6x - 3y + 2e^{-11t}, \\ y' = -x + 4y - 5e^{-11t}; \end{cases}$
$x(0) = 8,\ y(0) = -5.$

5.24 $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 6e^{-12t}, \\ y' = -5x + 7y - e^{-12t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -7.$

5.25 $\begin{cases} x' = -13x - 3y + e^{13t}, \\ y' = 23x + 13y + 2e^{13t}; \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = -2.$

5.26 $\begin{cases} x' = 14x + 29y + e^{14t}, \\ y' = x - 14y + 2e^{14t}; \end{cases}$
$x(0) = -3,\ y(0) = -4.$

5.27 $\begin{cases} x' = 7x - 3y + 2e^{-13t}, \\ y' = 4x + 3e^{-13t}; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = -5.$

5.28 $\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-14t}, \\ y' = -3x + 5y - e^{-14t}; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -2.$

5.29 $\begin{cases} x' = -16x - 12y + e^{-15t}, \\ y' = -12x + 16y + e^{-15t}; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

5.30 $\begin{cases} x' = 17x - 11y + e^{15t}, \\ y' = 3x - 17y + e^{15t}; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = -2.$

6. Материальная точка массы m движется прямолинейно. На точку воздействует две силы f_1 и f_2. В начальный момент времени $t = 0\ c$ расстояние точки от начала координат равно $x_0\ м$, а скорость её движения в этот момент времени равна $v_0\ м/c$. Найти закон движения материальной точки.

6.1 $f_1 = x,\ f_2 = 2v,\ m = 3г, x_0 = 2м, v_0 = 3\ м/c.$
6.2 $f_1 = -x,\ f_2 = 6v,\ m = 5г, x_0 = 3м, v_0 = 4\ м/c.$
6.3 $f_1 = -8x,\ f_2 = 4\cos t,\ m = 2г, x_0 = 5м, v_0 = 4\ м/c.$
6.4 $f_1 = 3x,\ f_2 = 6\cos t,\ m = 3г, x_0 = 4м, v_0 = 5\ м/c.$
6.5 $f_1 = -36x,\ f_2 = 8\sin t,\ m = 4г, x_0 = 2м, v_0 = 7\ м/c.$
6.6 $f_1 = 20x,\ f_2 = 10\sin t,\ m = 5г, x_0 = 3м, v_0 = 8\ м/c.$
6.7 $f_1 = -6x,\ f_2 = 24\mathrm{ch}t,\ m = 6г, x_0 = 3м, v_0 = 8\ м/c.$
6.8 $f_1 = 5x,\ f_2 = 10\mathrm{ch}t,\ m = 5г, x_0 = 8м, v_0 = 5\ м/c.$
6.9 $f_1 = -32x,\ f_2 = 22\mathrm{sh}t,\ m = 2г, x_0 = 11м, v_0 = 22\ м/c.$
6.10 $f_1 = 150x,\ f_2 = 12\mathrm{sh}t,\ m = 6г, x_0 = 2м, v_0 = 3\ м/c.$
6.11 $f_1 = 4x,\ f_2 = 3v,\ m = 7г, x_0 = 3м, v_0 = 4\ м/c.$
6.12 $f_1 = -6x,\ f_2 = 5v,\ m = 1г, x_0 = 4м, v_0 = 5\ м/c.$
6.13 $f_1 = -48x,\ f_2 = 24\cos 2t,\ m = 12г, x_0 = 6м, v_0 = 5\ м/c.$
6.14 $f_1 = 64x,\ f_2 = 64\cos 2t,\ m = 4г, x_0 = 5м, v_0 = 6\ м/c.$
6.15 $f_1 = -45x,\ f_2 = 15\sin 2t,\ m = 5г, x_0 = 3м, v_0 = 8\ м/c.$
6.16 $f_1 = 294x,\ f_2 = 18\sin 2t,\ m = 6г, x_0 = 4м, v_0 = 9\ м/c.$
6.17 $f_1 = -112x,\ f_2 = 14\mathrm{ch}2t,\ m = 7г, x_0 = 3м, v_0 = 8\ м/c.$
6.18 $f_1 = 96x,\ f_2 = 18\mathrm{ch}2t,\ m = 6г, x_0 = 9м, v_0 = 6\ м/c.$
6.19 $f_1 = -75x,\ f_2 = 15\mathrm{sh}2t,\ m = 3г, x_0 = 12м, v_0 = 15\ м/c.$
6.20 $f_1 = 400x,\ f_2 = 12\mathrm{sh}2t,\ m = 4г, x_0 = 3м, v_0 = 4\ м/c.$
6.21 $f_1 = 6x,\ f_2 = 5v,\ m = 11г, x_0 = 4м, v_0 = 5\ м/c.$
6.22 $f_1 = -3x,\ f_2 = 7v,\ m = 2г, x_0 = 5м, v_0 = 6\ м/c.$
6.23 $f_1 = -4x,\ f_2 = 4\cos 3t,\ m = 1г, x_0 = 7м, v_0 = 6\ м/c.$
6.24 $f_1 = 27x,\ f_2 = 63\cos 3t,\ m = 3г, x_0 = 6м, v_0 = 7\ м/c.$
6.25 $f_1 = -16x,\ f_2 = 20\sin 3t,\ m = 4г, x_0 = 4м, v_0 = 9\ м/c.$
6.26 $f_1 = 63x,\ f_2 = 14\sin 3t,\ m = 7г, x_0 = 5м, v_0 = 10\ м/c.$
6.27 $f_1 = -216x,\ f_2 = 24\mathrm{ch}3t,\ m = 6г, x_0 = 4м, v_0 = 9\ м/c.$
6.28 $f_1 = 900x,\ f_2 = 18\mathrm{ch}3t,\ m = 9г, x_0 = 10м, v_0 = 7\ м/c.$

6.29 $f_1 = -81x,\ f_2 = 15\text{sh}3t,\ m = 1г, x_0 = 10м, v_0 = 12\,м/с.$

6.30 $f_1 = 72x,\ f_2 = 2\text{sh}3t,\ m = 2г, x_0 = 5м, v_0 = 5\,м/с.$

РАЗДЕЛ 2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
3. Определение двойного интеграла.
4. Определение тройного интеграла.
5. Свойства двойных интегралов.
6. Свойства тройных интегралов.
7. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
8. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.
9. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
10. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
11. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.
12. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.
13. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

7. Вычислить двойной интеграл по области G, ограниченной указанными линиями. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y. Начертить область интегрирования.

7.1 $\iint\limits_G \left(x^2y + y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x, x + y = 1, y = 0{,}25.$

7.2 $\iint\limits_G \left(x^2 + yx + y^2\right)dxdy, \quad G: y = x^2, x + y = 2.$

7.3 $\iint\limits_G \left(x^2 - y + y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x^2, x = y^3.$

7.4 $\iint\limits_G \left(5x^2y - 3y^2x^3\right)dxdy, \quad G: y = x, x + y = 3, y = 1.$

7.5 $\iint\limits_G \left(x^2 - y^2\right)dxdy, \quad G: y - x^2 = 0, x - y^2 = 0.$

7.6 $\iint\limits_G \left(2x^3y + 3y^2x\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x^2.$

7.7 $\iint\limits_G \left(4x^3 + 3y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x, x \ge 0.$

7.8 $\iint\limits_G \left(5x^4 + 2y^3x^2\right)dxdy, \quad G: y = x^3, y = x, x \le 0.$

7.9 $\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}dxdy, \quad G: y=x^2,\ y=1,\ x=0{,}5.$

7.10 $\iint\limits_G \frac{y^3}{x^3}dxdy, \quad G: y^2=x,\ x=1,\ y=0{,}5.$

7.11 $\iint\limits_G \left(2x^2y-y^2x\right)dxdy, \quad G: y=2x,\ x+y=3,\ y=1.$

7.12 $\iint\limits_G \left(2x^2-3yx+3y^3\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ 2x+y=3.$

7.13 $\iint\limits_G \left(2x^2-3y+4yx\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ y=8-x^2.$

7.14 $\iint\limits_G \left(4xy-3y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y=x,\ x+y=4,\ y=1.$

7.15 $\iint\limits_G \left(3x^2+9y^2\right)dxdy, \quad G: y=x^2-4,\ y=4-x^2.$

7.16 $\iint\limits_G \left(6x^3y+6y^3x\right)dxdy, \quad G: y=x^3,\ y^3=x,\ y\le 0.$

7.17 $\iint\limits_G \left(5x^4-6y^2x^3\right)dxdy, \quad G: y=x^5,\ y=x,\ x\ge 0.$

7.18 $\iint\limits_G \left(6x^5+16y^4x^4\right)dxdy, \quad G: y=x^5,\ y=x,\ x\le 0.$

7.19 $\iint\limits_G \frac{16y^4}{x^4}dxdy, \quad G: y=x^3,\ y=1,\ x=0.$

7.20 $\iint\limits_G \frac{12y^2}{x^3}dxdy, \quad G: y^3=x,\ x=1,\ y=0{,}5.$

7.21 $\iint\limits_G \left(9x^2y^2-4yx\right)dxdy, \quad G: y=3x,\ x+y=4,\ y=1.$

7.22 $\iint\limits_G \left(3x^2+4yx+8y^3\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ 3x+y=4.$

7.23 $\iint\limits_G \left(4x^3-3y^2+9y^2x^2\right)dxdy, \quad G: y=x^2,\ y=18-x^2.$

7.24 $\iint\limits_G \left(6x^2y-12y^3x^2\right)dxdy, \quad G: y=x,\ x+y=8,\ y=2.$

7.25 $\iint\limits_G \left(4x^3+12y^3\right)dxdy, \quad G: y=-1+x^2,\ y=1-x^2.$

7.26 $\iint\limits_G \left(10xy^4+10yx^4\right)dxdy, \quad G: y=x^4,\ y^4=x.$

7.27 $\iint\limits_G \left(6x^5-20y^3x^4\right)dxdy, \quad G: y=x^6,\ y=x^2,\ x\ge 0.$

7.28 $\iint\limits_G \left(84x^5 + 90y^4x^4\right)dxdy, \quad G: y = x^6,\ y = x^2,\ x \le 0.$

7.29 $\iint\limits_G \frac{36y^5}{x^5}dxdy, \quad G: y = x^4,\ y = 16,\ x \ge 0.$

7.30 $\iint\limits_G \frac{20y^3}{x^4}dxdy, \quad G: y^4 = x,\ x = 16,\ y \le 1.$

8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (mx - ny)dxdy$, где число m – номер варианта типового расчета, n – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Область G ограничена линиями l_1, l_2, l_3 и l_4. Указать координаты нормальных и направляющих векторов этих линий. Найти:
а) координаты всех точек пересечения линий, используя при решении систем формулы Крамера;
б) внутренние углы фигуры, ограниченной указанной областью;
в) площадь фигуры, ограниченной областью G;
г) проекцию одной из сторон фигуры на смежную сторону;
д) расстояние между противолежащими сторонами фигуры, ограниченной областью G. Начертить область интегрирования.

8.1 $l_1: 3x + y = 4,\ l_2: 2x - y = 1,\ l_3: 3x + y = 8,\ l_4: 2x - y = 2.$
8.2 $l_1: 2x + 3y = 5,\ l_2: 3x - 2y = 1,\ l_3: 2x + 3y = 10,\ l_4: 3x - 2y = 2.$
8.3 $l_1: 4x + 3y = -7,\ l_2: 3x - y = -2,\ l_3: 4x + 3y = 10,\ l_4: 3x - y = 1.$
8.4 $l_1: x + y = 1,\ l_2: 4x - y = 4,\ l_3: x + y = 3,\ l_4: 4x - y = 7.$
8.5 $l_1: 5x + 2y = 3,\ l_2: 6x - y = 7,\ l_3: 5x + 2y = 13,\ l_4: 6x - y = 19.$
8.6 $l_1: 2x + 3y = 5,\ l_2: 3x - 2y = 1,\ l_3: 2x + 3y = 15,\ l_4: 3x - 2y = 3.$
8.7 $l_1: 5x + y = 1,\ l_2: 7x - y = -1,\ l_3: 5x + y = 13,\ l_4: 7x - y = 11.$
8.8 $l_1: 2x + 5y = 7,\ l_2: 3x - 4y = -1,\ l_3: 2x + 5y = 14,\ l_4: 3x - 4y = -2.$
8.9 $l_1: 2x + y = 5,\ l_2: 2x - y = -11,\ l_3: 2x + y = 10,\ l_4: 2x - y = 2.$
8.10 $l_1: x + 3y = 4,\ l_2: x - 2y = -1,\ l_3: x + 3y = 8,\ l_4: x - 2y = -2.$
8.11 $l_1: x + y = 0,\ l_2: x - y = 0,\ l_3: x + y = 5,\ l_4: x - y = 1.$
8.12 $l_1: 4x + 5y = 9,\ l_2: 3x - y = 2,\ l_3: 4x + 5y = 6,\ l_4: 3x - y = -5.$
8.13 $l_1: 3x + 2y = 5,\ l_2: 4x - 5y = 22,\ l_3: 3x + 2y = 22,\ l_4: 4x - 5y = 14.$
8.14 $l_1: x + 6y = -7,\ l_2: x - 5y = 4,\ l_3: x + 6y = 7,\ l_4: x - 5y = -4.$
8.15 $l_1: 4x + 3y = -1,\ l_2: 3x - 4y = -7,\ l_3: 4x + 3y = 1,\ l_4: 3x - 4y = 7.$
8.16 $l_1: x + y = -4,\ l_2: 2x - 5y = 6,\ l_3: x + y = 4,\ l_4: 2x - y = 2.$
8.17 $l_1: 5x + 2y = -6,\ l_2: 2x - 5y = -14,\ l_3: 5x + 2y = 6,\ l_4: 2x - 5y = 14.$
8.18 $l_1: 2x + 5y = -12,\ l_2: 4x - 3y = 2,\ l_3: 2x + 5y = 12,\ l_4: 4x - 3y = -2.$
8.19 $l_1: 4x + y = 6,\ l_2: 3x - y = 1,\ l_3: 4x + y = 17,\ l_4: 3x - y = 4.$

8.20 $l_1: 5x+y=7,\ l_2: 4x-y=2,\ l_3: 5x+y=25,\ l_4: 4x-y=11.$

8.21 $l_1: x+3y=5,\ l_2: x-2y=0,\ l_3: x+3y=19,\ l_4: x-2y=-6.$

8.22 $l_1: x+4y=6,\ l_2: x-3y=-1,\ l_3: x+4y=17,\ l_4: x-3y=-4.$

8.23 $l_1: x+5y=6,\ l_2: x-4y=-3,\ l_3: x+5y=-3,\ l_4: x-4y=6.$

8.24 $l_1: 3x+5y=-2,\ l_2: 2x-5y=7,\ l_3: 3x+5y=16,\ l_4: 2x-5y=-6.$

8.25 $l_1: 2x+7y=3,\ l_2: 2x-5y=-9,\ l_3: 2x+7y=9,\ l_4: 2x-5y=-3.$

8.26 $l_1: 3x+4y=7,\ l_2: 4x-3y=1,\ l_3: 3x+4y=18,\ l_4: 4x-3y=-1.$

8.27 $l_1: 7x+2y=3,\ l_2: 3x-5y=13,\ l_3: 7x+2y=-5,\ l_4: 3x-5y=-8.$

8.28 $l_1: 5x+3y=2,\ l_2: 3x-4y=7,\ l_3: 5x+3y=1,\ l_4: 3x-4y=18.$

8.29 $l_1: x+8y=7,\ l_2: 4x-7y=-11,\ l_3: x+8y=8,\ l_4: 4x-7y=-7.$

8.30 $l_1: 4x+7y=-11,\ l_2: 5x-3y=-2,\ l_3: 4x+7y=18,\ l_4: 5x-3y=-1.$

9. Вычислить данные двойные интегралы. Начертить область интегрирования.

9.1 $\iint\limits_G \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad G: \dfrac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \dfrac{\pi^2}{9},\ y \le x,\ y \ge 0,\ x \ge 0.$

9.2 $\iint\limits_G \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad G: \dfrac{\pi^2}{9} \le x^2+y^2 \le \dfrac{\pi^2}{4},\ y \ge x,\ y \ge 0,\ x \ge 0.$

9.3 $\iint\limits_G \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad G: 1 \le x^2+y^2 \le e^2,\ y \ge -x,\ y \ge 0,\ x \le 0.$

9.4 $\iint\limits_G \arccos\left(x^2+y^2\right)dxdy,\quad G: \dfrac{3}{4} \le x^2+y^2 \le 1,\ y \le -x,\ y \ge 0,\ x \le 0.$

9.5 $\iint\limits_G \arcsin\left(x^2+y^2\right)dxdy,\quad G: \dfrac{1}{4} \le x^2+y^2 \le \dfrac{3}{4},\ y \ge x,\ y \le 0,\ x \le 0.$

9.6 $\iint\limits_G e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad G: \ln^2 4 \le x^2+y^2 \le \ln^2 5,\ y \le x,\ y \le 0,\ x \le 0.$

9.7 $\iint\limits_G \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad G: \ln^2 5 \le x^2+y^2 \le \ln^2 6,\ y \le -x,\ y \le 0,\ x \ge 0.$

9.8 $\iint\limits_G \dfrac{\arccos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad G: \dfrac{1}{4} \le x^2+y^2 \le \dfrac{1}{2},\ y \ge -x,\ y \le 0,\ x \ge 0.$

9.9 $\iint\limits_G \dfrac{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad G: \dfrac{1}{2} \le x^2+y^2 \le \dfrac{3}{4},\ y \le x,\ y \ge -x,\ x \ge 0.$

9.10 $\iint\limits_G \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad G: \dfrac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge -x,\ y \ge x,\ y \ge 0.$

9.11 $\iint\limits_G \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad G:\frac{1}{3}\le x^2+y^2\le 1,\ y\le -x,\ y\ge x,\ x\le 0.$

9.12 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arcc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:1\le x^2+y^2\le 3,\ y\le -x,\ y\le x,\ y\le 0.$

9.13 $\iint\limits_G \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:\frac{1}{3}\le x^2+y^2\le 3,\ y\ge -x,\ y\ge 0.$

9.14 $\iint\limits_G \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^3\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:\frac{\pi^2}{36}\le x^2+y^2\le \frac{\pi^2}{16},\ y\le -x,\ x\le 0.$

9.15 $\iint\limits_G \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^3\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le \frac{\pi^2}{9},\ y\le x,\ x\ge 0.$

9.16 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

9.17 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:4\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

9.18 $\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\ln\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy, \quad G:9\le x^2+y^2\le 16,\ y\ge -\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

9.19 $\iint\limits_G \frac{\arccos\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:16\le x^2+y^2\le 81,\ y\le -x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

9.20 $\iint\limits_G \frac{\arcsin\frac{1}{8}\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}}{\sqrt[8]{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:256\le x^2+y^2\le 6561,\ y\ge x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

9.21 $\iint\limits_G \left((x^2+y^2)\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right)dxdy, \quad G:16\le x^2+y^2\le 25,\ y\le x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

9.22 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{\ln\sqrt{4x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy, G:\ln^2 2\le x^2+y^2\le \ln^2 3,\ y\le x,\ y\le 0,\ x\ge 0.$

9.23 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arcctg}^2\frac{x}{y}\cdot\frac{\arccos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy, G:\frac{3}{4}\le x^2+y^2\le 1, y\ge -\frac{x}{\sqrt{3}}, y\le 0, x\ge 0.$

9.24 $\iint\limits_G \frac{2\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad G:\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 1,\ y\le\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge -\sqrt{3}\cdot x,\ x\ge 0.$

9.25 $\iint\limits_G \dfrac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}}dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge \sqrt{3}\cdot x,\ y \ge 0.$

9.26 $\iint\limits_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy, G: \dfrac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \le -x,\ y \ge \sqrt{3}x,\ x \le 0.$

9.27 $\iint\limits_G \dfrac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad G: \dfrac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \le -\sqrt{3}\cdot x,\ y \le x,\ y \le 0.$

9.28 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}^3\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}\left(2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy, \quad G: 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge 0.$

9.29 $\iint\limits_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg}^3\dfrac{y}{x}}\cdot\dfrac{\sin\sqrt{4x^2+4y^2}}{\cos^3\sqrt{4x^2+4y^2}}\right)dxdy, G: \dfrac{\pi^2}{36} \le x^2+y^2 \le \dfrac{\pi^2}{9}, y \le -\sqrt{3}x, x \le 0.$

9.30 $\iint\limits_G \left(\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^3\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy, \quad G: \dfrac{\pi^2}{36} \le x^2+y^2 \le \dfrac{\pi^2}{16},\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x \ge 0.$

10. Вычислить тройной интеграл.

10.1 $\iiint\limits_\Omega \left(3x^2-5xy+4yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le x^2.$

10.2 $\iiint\limits_\Omega \left(4xz-2xy+4yz\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x, 0 \le z \le y.$

10.3 $\iiint\limits_\Omega \left(2y^2-5xz+z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le y^2.$

10.4 $\iiint\limits_\Omega \left(4x^2-6y+24xyz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^3, 0 \le z \le 1-x.$

10.5 $\iiint\limits_\Omega \left(24x^2y-36xy^2+4yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x, 0 \le z \le 1-x-y.$

10.6 $\iiint\limits_\Omega \left(6zx^2-4y^3+9y^2z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4-x, 0 \le z \le y.$

10.7 $\iiint\limits_\Omega \left(4y^3-24x^2z+3z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1, 0 \le z \le 1-2x-3y.$

10.8 $\iiint\limits_\Omega \left(6z-4x+4z\right)dxdydz, \quad \Omega: -1 \le x \le 1, x^2-1 \le y \le 1-x^2, 0 \le z \le 4-x-y.$

10.9 $\iiint\limits_\Omega \left(9x^2-12y^2+9z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -1 \le x \le 0, 0 \le y \le 1+x, 0 \le z \le x^2+y^2.$

10.10 $\iiint\limits_\Omega \left(8x-6xz+6yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -1 \le x \le 0, -1-x \le y \le 0, 0 \le z \le 3-x-y.$

10.11 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3zx^2-4xy^2+3yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, x-1\le y\le 0, 0\le z\le 5-x-y.$

10.12 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18y^2-48x+48yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, x^3\le y\le x^2, 0\le z\le 4-x^2.$

10.13 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3x-5y+4z\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 2, 0\le y\le 2-x, 0\le z\le 4-y^2.$

10.14 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18yx^2-2x+4yz\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2, 0\le z\le 5-x^2.$

10.15 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6xy^2-3x^2+36yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -1\le x\le 1, x^2-1\le y\le 0, 0\le z\le 9-y^2.$

10.16 $\iiint\limits_{\Omega}\left(18x^2-4xy^2+3yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 3, 0\le y\le 3-x, 0\le z\le 9x^2.$

10.17 $\iiint\limits_{\Omega}\left(8z-4xy+6y^2z\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 4, 0\le y\le 4-x, 0\le z\le 8-x^2-y^2.$

10.18 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2-24xzy+z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 4x^2, 0\le z\le 2y^2.$

10.19 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6x^2-6xy+48xyz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 2, 0\le y\le 8x^3, 0\le z\le 8-x.$

10.20 $\iiint\limits_{\Omega}\left(9x^2y^2-6xy^2+3z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, 2x^2\le y\le 2x, 0\le z\le 6-x-y.$

10.21 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6z-24y^3+18y^2z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 5, 0\le y\le 5-x, 0\le z\le 6-y^2.$

10.22 $\iiint\limits_{\Omega}\left(9y^2-9x^2+6xz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -1\le x\le 0, x^2\le y\le 1, 0\le z\le 1-3x-2y.$

10.23 $\iiint\limits_{\Omega}\left(zx^2-xyz\right)dxdydz, \quad \Omega: -1\le x\le 0, x^2-1\le y\le 1-x^2, 0\le z\le 8-2x-2y.$

10.24 $\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2-9y^2+6z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -2\le x\le 0, 0\le y\le 2+x, 0\le z\le 2x^2+2y^2.$

10.25 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2x-6yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -2\le x\le 0, -2-x\le y\le 0, 0\le z\le 8-3x-3y.$

10.26 $\iiint\limits_{\Omega}\left(4zx-4xy+4z\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 2, x-2\le y\le 0, 0\le z\le 10-2x-2y.$

10.27 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2x-8xyz+6yz^2\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 1, 8x^3\le y\le 8x^2, 0\le z\le 8-x^2.$

10.28 $\iiint\limits_{\Omega}\left(2x-3y+4z\right)dxdydz, \quad \Omega: 0\le x\le 4, 0\le y\le 4-x, 0\le z\le 9-y^2.$

10.29 $\iiint\limits_{\Omega}\left(8yx-4xz+24yz\right)dxdydz, \quad \Omega: -2\le x\le 0, 0\le y\le 4-x^2, 0\le z\le 12-x^2.$

10.30 $\iiint\limits_{\Omega}\left(6y^2-8xyz+3z^2\right)dxdydz, \quad \Omega: -2\le x\le 2, x^2-4\le y\le 0, 0\le z\le 16-y^2.$

11. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ny+pz)dxdydz$, где число m – номер варианта типового расчета, n – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки, а число p – удвоенная сумма всех корней уравнения $x^3-(m+n+1)\cdot x^2+(mn+n+m)\cdot x-nm=0$, с учетом кратности его корней, а область Ω ограничена плоскостями π_i $(i=\overline{1,6})$. Записать координаты нормальных векторов всех плоскостей и указать, какие из плоскостей параллельны. Найти угол между плоскостями π_1 и π_2, а также записать уравнение прямой, являющейся пересечением этих плоскостей. Вычислить объём параллелепипеда, образованного пересечением этих шести плоскостей, и расстояние от плоскости π_4 до плоскости π_1.

Указание. Для вычисления объёма параллелепипеда необходимо найти координаты четырёх его вершин: $A=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$, $B=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_6$, $C=\pi_1\cap\pi_5\cap\pi_6$, $D=\pi_2\cap\pi_3\cap\pi_4$. При решении четырёх систем линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными можно использовать любую компьютерную программу, которая содержит математический пакет.

11.1 $\pi_1: 2x+3y+6z=11,\quad \pi_2: 4x-12y+5z=-3,\quad \pi_3: -2x+5y-14z=-11,$
$\pi_4: 2x+3y+6z=25,\quad \pi_5: 4x-12y+5z=-18,\quad \pi_6: -2x+5y-14z=-17.$

11.2 $\pi_1: 2x+6y+3z=11,\quad \pi_2: 12x-4y-5z=3,\quad \pi_3: 5x-14y-2z=-11,$
$\pi_4: 2x+6y+3z=28,\quad \pi_5: 12x-4y-5z=2,\quad \pi_6: 5x-14y-2z=-36.$

11.3 $\pi_1: 6x+3y+2z=11,\quad \pi_2: 12x-5y-4z=3,\quad \pi_3: -2x-14y+5z=-11,$
$\pi_4: 6x+3y+2z=25,\quad \pi_5: 12x-5y-4z=1,\quad \pi_6: -2x-14y+5z=-36.$

11.4 $\pi_1: 3x+2y+6z=11,\quad \pi_2: -5x-4y+12z=3,\quad \pi_3: 5x-2y-14z=-11,$
$\pi_4: 3x+2y+6z=24,\quad \pi_5: -5x-4y+12z=2,\quad \pi_6: 5x-2y-14z=-24.$

11.5 $\pi_1: 2x+3y-6z=-1,\quad \pi_2: -4x+12y-5z=3,\quad \pi_3: -14x+5y-2z=-11,$
$\pi_4: 2x+3y-6z=1,\quad \pi_5: -4x+12y-5z=18,\quad \pi_6: -14x+5y-2z=-17.$

11.6 $\pi_1: 2x-6y+3z=-7,\quad \pi_2: -12x+4y-5z=-9,\quad \pi_3: -14x-2y+5z=-13,$
$\pi_4: 2x-6y+3z=-2,\quad \pi_5: -12x+4y-5z=6,\quad \pi_6: -14x-2y+5z=17.$

11.7 $\pi_1: -6x+3y+2z=5,\quad \pi_2: -12x-5y+4z=-1,\quad \pi_3: 2x-14y-5z=-19,$
$\pi_4: -6x+3y+2z=10,\quad \pi_5: -12x-5y+4z=20,\quad \pi_6: 2x-15y+5z=-9.$

11.8 $\pi_1: 3x+2y-6z=-4,\quad \pi_2: -5x+4y-12z=-8,\quad \pi_3: -5x+2y-14z=-12,$
$\pi_4: 3x+2y-6z=-1,\quad \pi_5: -5x+4y-12z=-13,\quad \pi_6: -5x+2y-14z=-17.$

11.9 $\pi_1: 2x-3y+6z=5,\quad \pi_2: 4x-12y-5z=-13,\quad \pi_3: -14x-5y+2z=-17,$
$\pi_4: 2x-3y+6z=-16,\quad \pi_5: 4x-12y-5z=-10,\quad \pi_6: -14x-5y+2z=-28.$

11.10 $\pi_1: 2x+6y-3z=1,\quad \pi_2: -12x-4y+5z=7,\quad \pi_3: -14x+2y-5z=19,$
$\pi_4: 2x+6y-3z=5,\quad \pi_5: -12x-4y+5z=-5,\quad \pi_6: -14x+2y-5z=-25.$

11.11 $\pi_1: 6x-3y+2z=-1, \quad \pi_2: -12x+5y-4z=1, \quad \pi_3: -2x-5y+14z=9,$

$\pi_4: 6x-3y+2z=3, \quad \pi_5: -12x+5y-4z=-7, \quad \pi_6: -2x-5y+14z=-7.$

11.12 $\pi_1: -3x+2y+6z=-3, \quad \pi_2: 5x-4y-12z=17, \quad \pi_3: -5x+14y-2z=7,$

$\pi_4: -3x+2y+6z=8, \quad \pi_5: 5x-4y-12z=-16, \quad \pi_6: -5x+14y-2z=12.$

11.13 $\pi_1: -2x+3y+6z=1, \quad \pi_2: -4x-12y+5z=-16, \quad \pi_3: 14x-5y-2z=9,$

$\pi_4: -2x+3y+6z=4, \quad \pi_5: -4x-12y+5z=1, \quad \pi_6: 14x-5y-2z=12.$

11.14 $\pi_1: -2x+6y+3z=5, \quad \pi_2: 5x-12y-4z=9, \quad \pi_3: 14x-2y-5z=-19,$

$\pi_4: -2x+6y+3z=3, \quad \pi_5: 5x-12y-4z=-8, \quad \pi_6: 14x-2y-5z=3.$

11.15 $\pi_1: 6x+3y-2z=-8, \quad \pi_2: -4x+5y-12z=-8, \quad \pi_3: 2x-14y+5z=3,$

$\pi_4: 6x+3y-2z=9, \quad \pi_5: -4x+5y-12z=1, \quad \pi_6: 2x-14y+5z=-12.$

11.16 $\pi_1: 3x-2y+6z=4, \quad \pi_2: 12x+4y+5z=9, \quad \pi_3: 5x+2y-14z=-12,$

$\pi_4: 3x-2y+6z=9, \quad \pi_5: 12x+4y+5z=17, \quad \pi_6: 5x+2y-14z=-9.$

11.17 $\pi_1: 2x-3y-6z=3, \quad \pi_2: 12x+5y+4z=1, \quad \pi_3: -14x+5y+2z=2,$

$\pi_4: 2x-3y-6z=5, \quad \pi_5: 12x+5y+4z=7, \quad \pi_6: -14x+5y+2z=-19.$

11.18 $\pi_1: 2x-6y-3z=3, \quad \pi_2: 5x+4y+12z=8, \quad \pi_3: -14x+2y+5z=3,$

$\pi_4: 2x-6y-3z=-4, \quad \pi_5: 5x+4y+12z=9, \quad \pi_6: -14x+2y+5z=-12.$

11.19 $\pi_1: -6x-3y+2z=-4, \quad \pi_2: 4x+12y+5z=9, \quad \pi_3: -2x+14y+5z=3,$

$\pi_4: -6x-3y+2z=1, \quad \pi_5: 4x+12y+5z=-77, \quad \pi_6: -2x+14y+5z=-19.$

11.20 $\pi_1: -3x+2y-6z=-1, \quad \pi_2: 12x+4y-5z=16, \quad \pi_3: 5x-2y+14z=3,$

$\pi_4: -3x+2y-6z=3, \quad \pi_5: 12x+4y-5z=17, \quad \pi_6: 5x-2y+14z=-9.$

11.21 $\pi_1: -2x+3y-6z=-3, \quad \pi_2: 12x-5y+4z=-1, \quad \pi_3: 14x+5y-2z=3,$

$\pi_4: -2x+3y-6z=1, \quad \pi_5: 12x-5y+4z=7, \quad \pi_6: 14x+5y-2z=19.$

11.22 $\pi_1: -2x-6y+3z=-8, \quad \pi_2: -5x+4y+12z=-1, \quad \pi_3: 14x-2y+5z=12,$

$\pi_4: -2x-6y+3z=1, \quad \pi_5: -5x+4y+12z=7, \quad \pi_6: 14x-2y+5z=19.$

11.23 $\pi_1: -6x+3y-2z=5, \quad \pi_2: 4x+12y-5z=-11, \quad \pi_3: -5x+2y+14z=-11,$

$\pi_4: -6x+3y-2z=-5, \quad \pi_5: 4x+12y-5z=11, \quad \pi_6: -5x+2y+14z=11.$

11.24 $\pi_1: 3x-2y-6z=6, \quad \pi_2: 12x-4y+5z=-5, \quad \pi_3: 2x+14y-5z=5,$

$\pi_4: 3x-2y-6z=5, \quad \pi_5: 12x-4y+5z=16, \quad \pi_6: 2x+14y-5z=-12.$

11.25 $\pi_1: -2x-3y+6z=5, \quad \pi_2: 12x+5y-4z=-17, \quad \pi_3: 14x-5y+2z=-9,$

$\pi_4: -2x-3y+6z=3, \quad \pi_5: 12x+5y-4z=1, \quad \pi_6: 14x-5y+2z=-3.$

11.26 $\pi_1: -2x+6y-3z=4, \quad \pi_2: 5x-4y+12z=1, \quad \pi_3: 14x+2y-5z=16,$

$\pi_4: -2x+6y-3z=-9, \quad \pi_5: 5x-4y+12z=16, \quad \pi_6: 14x+2y-5z=-7.$

11.27 $\pi_1: 6x-3y-2z=-8, \quad \pi_2: -4x+12y+5z=9, \quad \pi_3: 2x+14y+5z=3,$

$\pi_4: 6x-3y-2z=-1, \quad \pi_5: -4x+12y+5z=7, \quad \pi_6: 2x+14y+5z=9.$

11.28 $\pi_1: -3x-2y+6z=-1,\quad \pi_2: -12x+4y+5z=-16,\quad \pi_3: 5x+2y+14z=3,$

$\pi_4: -3x-2y+6z=4,\quad \pi_5: -12x+4y+5z=9,\quad \pi_6: 5x+2y+14z=16.$

11.29 $\pi_1: 6x-2y-3z=1,\quad \pi_2: -12x+5y+4z=1,\quad \pi_3: 14x+5y+2z=3,$

$\pi_4: 6x-2y-3z=4,\quad \pi_5: -12x+5y+4z=-7,\quad \pi_6: 14x+5y+2z=19.$

11.30 $\pi_1: -3x+6y-2z=-5,\quad \pi_2: 5x+4y-12z=-7,\quad \pi_3: 14x+2y+5z=19,$

$\pi_4: -3x+6y-2z=8,\quad \pi_5: 5x+4y-12z=16,\quad \pi_6: 14x+2y+5z=-3.$

12. Вычислить тройной интеграл. Начертить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy.

12.1 $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad \Omega: z=3\sqrt{x^2+y^2},\ z=3,\ y\le\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.2 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \Omega: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\le -x,\ y\le x,\ y\le 0,\ z\ge 0.$

12.3 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{z}\,dxdydz,\quad \Omega: z=1,\ z=4,\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

12.4 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \Omega: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y\ge -x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

12.5 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz,\quad \Omega: z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{18-x^2-y^2},\ y\ge -\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.6 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \Omega: 9\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le -x,\ x\le 0,\ z\ge 0.$

12.7 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{yzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \Omega: z=4x^2+4y^2,\ z=16,\ y\le -\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ x\le 0.$

12.8 $\iiint\limits_{\Omega} x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\quad \Omega: 16\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ y\le x,\ x\ge 0,\ z\le 0.$

12.9 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \Omega: z=9x^2+9y^2,\ z=81,\ y\ge x,\ y\le 0,\ x\le 0.$

12.10 $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \Omega: 25\le x^2+y^2+z^2\le 36, y\le \frac{x}{\sqrt{3}}, y\ge 0, x\ge 0, z\le 0.$

12.11 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xdxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}},\quad \Omega: z+x=6,\ x^2+y^2=6x,\ z\ge 0,\ y\le 0.$

12.12 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \Omega: 36\le x^2+y^2+z^2\le 49, y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y\ge 0, x\ge 0, z\le 0.$

12.13 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}, \quad \Omega: z+y=8, x^2+y^2=8y, \ z\geq 0, x\leq 0.$

12.14 $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right) dx dy dz, \Omega: x^2+y^2+z^2=18, z^2=x^2+y^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$

12.15 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Omega: z+x=10, x^2+y^2=10x, \ z\geq 0, y\leq 0.$

12.16 $\iiint\limits_{\Omega} x dx dy dz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=50, z^2=x^2+y^2, x\leq 0, y\leq 0, z\leq 0.$

12.17 $\iiint\limits_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega: z=-\sqrt{x^2+y^2}, z=-\sqrt{32-x^2-y^2}, y\leq \sqrt{3}\cdot x, y\leq 0, x\leq 0.$

12.18 $\iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=98, z=-\sqrt{x^2+y^2}, x\leq 0, y\leq 0.$

12.19 $\iiint\limits_{\Omega} 3xyz^2 dx dy dz, \quad \Omega: -2\leq z\leq 2, 25\leq x^2+y^2\leq 36, y\leq -x, y\leq 0, x\geq 0.$

12.20 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2 dx dy dz}{x^2+y^2+z^2}, \quad \Omega: 49\leq x^2+y^2+z^2\leq 64, y\leq -x, y\geq 0, x\leq 0, z\geq 0.$

12.21 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x dx dy dz}{x^2+y^2}, \quad \Omega: z=x^2+y^2, z=8-x^2-y^2, y\geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y\leq 0, x\geq 0.$

12.22 $\iiint\limits_{\Omega} 4\left(x^2+y^2+z^2\right) dx dy dz, \Omega: x^2+y^2+z^2=32, z^2=x^2+y^2, x\leq 0, y\geq 0, z\leq 0.$

12.23 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{x^2+y^2}, \quad \Omega: z=x^2+y^2-50, z=-x^2-y^2, y\leq \sqrt{3}\cdot x, y\geq -\sqrt{3}\cdot x, x\geq 0.$

12.24 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \Omega: 64\leq x^2+y^2+z^2\leq 81, y\geq x, y\leq 0, x\leq 0, z\geq 0.$

12.25 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Omega: z=-x^2-y^2, z=-1, y\geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y\geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y\geq 0.$

12.26 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \Omega: 81\leq x^2+y^2+z^2\leq 100, y\leq x, y\leq 0, x\leq 0, z\leq 0.$

12.27 $\iiint\limits_{\Omega} 5xyz^4 dx dy dz, \quad \Omega: -3\leq z\leq -1, 36\leq x^2+y^2\leq 49, y\leq -x, y\geq x, x\leq 0.$

12.28 $\iiint\limits_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=72, z=\sqrt{x^2+y^2}, x\leq 0, y\leq 0.$

12.29 $\iiint\limits_{\Omega} 2xyz dx dy dz, \quad \Omega: z=-2\sqrt{x^2+y^2}, z=-2\sqrt{8-x^2-y^2}, y\leq -x, y\leq x, y\leq 0.$

12.30 $\iiint\limits_{\Omega} 2\left(x^2+y^2+z^2\right) dx dy dz, \Omega: x^2+y^2+z^2=8, z^2=x^2+y^2, x\geq 0, y\leq 0, z\leq 0.$

РАЗДЕЛ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей фигур в декартовой системе координат.
2. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей фигур в полярной системе координат.
3. Вычисление с помощью двойных интегралов объёмов тел в декартовой системе координат.
4. Вычисление с помощью двойных интегралов объёмов тел в полярной системе координат.
5. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей поверхности.
6. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в декартовой системе координат.
7. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в цилиндрической системе координат.
8. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в сферической системе координат.
9. Вычисление массы материальной пластины.
10. Вычисление координат центра масс и статических моментов материальной пластины.
11. Вычисление моментов инерции материальной пластины.
12. Вычисление массы тела.
13. Вычисление координат центра масс тела.
14. Вычисление моментов инерции тела.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

13. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры G, ограниченной указанными линиями. Изобразить в системе координат область интегрирования G.

13.1 $G: y = x^2,\ y = 2 - x^2$.

13.2 $G:\ y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$.

13.3 $G:\ y = x^2 + 8x,\ y = -x^2$.

13.4 $G:\ y = \dfrac{3}{4 - x^2},\ y = x^2$.

13.5 $G:\ y = \dfrac{5}{x^2 - 9},\ y = x^2 - 5$.

13.6 $G:\ y = \dfrac{3}{x^2 - 4},\ y = x^2 - 2$.

13.7 $G:\ y = \sqrt{x^3},\ y = 3x$.

13.8 $G:\ y = -\sqrt{x^3},\ y = -x^3$.

13.9 $G:\ y = \sqrt{x^3},\ y = x^3$.

13.10 $G:\ y = \dfrac{10}{x^2},\ y = 8 - x^2$.

13.11 $G:\ y = \dfrac{8}{x^3},\ y = 9 - x^3$.

13.12 $G:\ y = \dfrac{4}{x^2},\ y = 5 - x^2$.

13.13 G: $y = x^2 - 6, y = -x$.

13.14 G: $y = x^2 - x, y = 4x$.

13.15 G: $y = x^2 - x, y = 2x + 2$.

13.16 G: $y = x^2, y = 8 - x^2$.

13.17 G: $y = x^2 - 1, y = x - x^2$.

13.18 G: $y = x^2 - 4x, y = -x^2$.

13.19 G: $y = \dfrac{90}{x^2+1}, y = x^2$.

13.20 G: $. y = \dfrac{32}{x^2+4}, y = x^2$.

13.21 G: $y = \dfrac{2}{x^2+1}, y = x^2$.

13.22 G: $y = \sqrt{x}, y = x - 2$.

13.23 G: $y = -\sqrt{x}, y = -x^2$.

13.24 G: $y = \sqrt{x}, y = x$.

13.25 G: $y = -\dfrac{2}{x}, y = 3 + x$.

13.26 G: $y = \dfrac{6}{x}, y + x = -5$.

13.27 G: $y = \dfrac{2}{x}, y = 3 - x$.

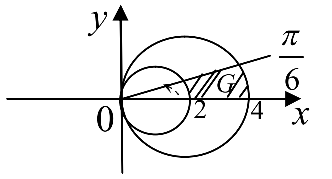
13.28 G: $y = x^2, y = 2 - x$.

13.29 G: $y = x^2 + 4x, y = x$.

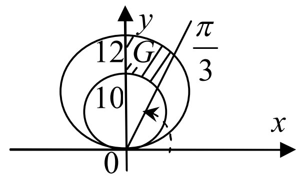
13.30 G: $y = x^2 + 4x, y = x$.

14. С помощью двойного интеграла вычислить площадь заштрихованной плоской фигуры G, ограниченной на чертеже двумя дугами окружностей со смещёнными центрами относительно начала координат и двумя отрезками прямых, проходящими через начало декартовой системы координат. Записать уравнения линий, которые ограничивают область G, в декартовой и полярной системе координат, если полюс лежит в начале координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс.

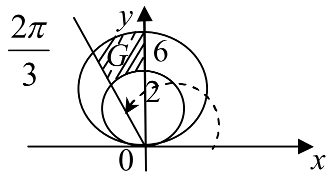
14.1



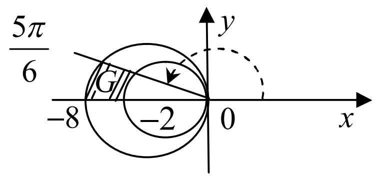
14.2



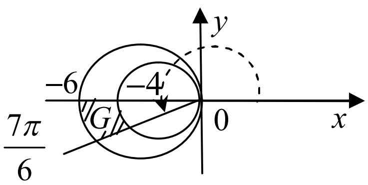
14.3



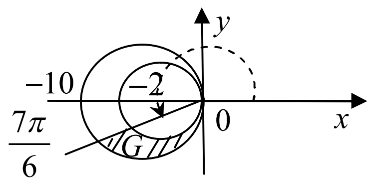
14.4



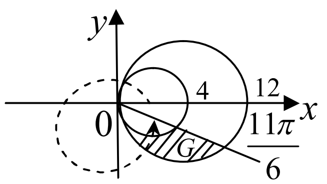
14.5



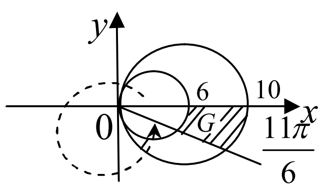
14.6



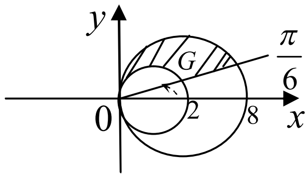
14.7



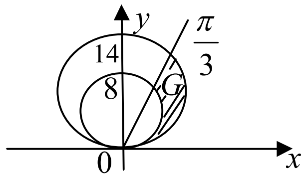
14.8



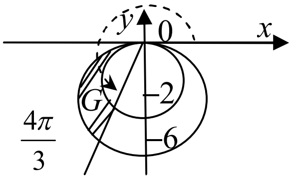
14.9



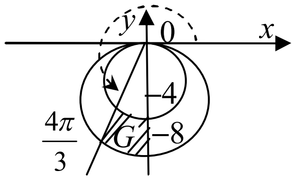
14.10



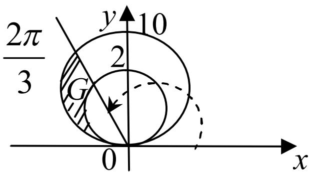
14.11



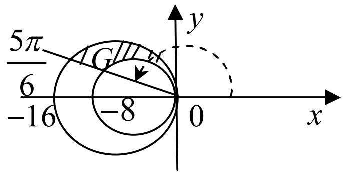
14.12



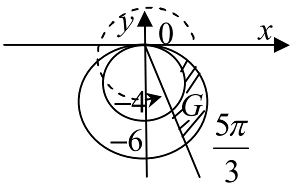
14.13



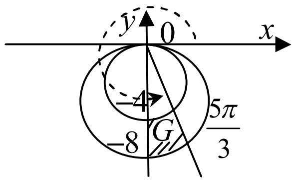
14.14



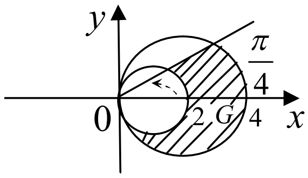
14.15



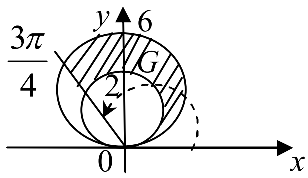
14.16



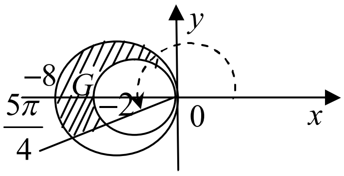
14.17



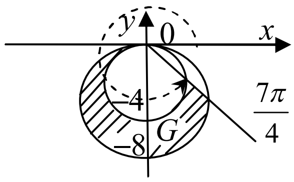
14.18



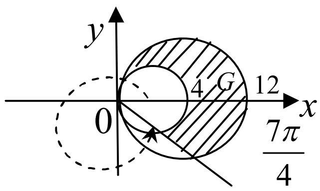
14.19



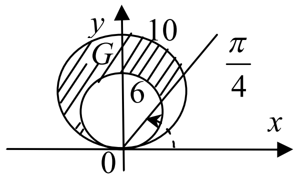
14.20



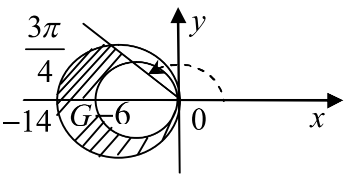
14.21



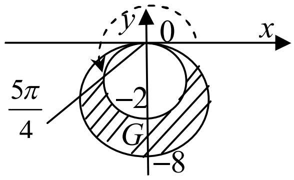
14.22

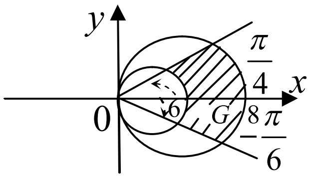


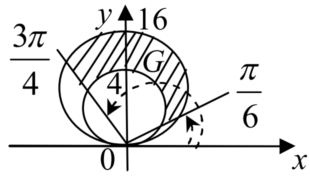
14.23

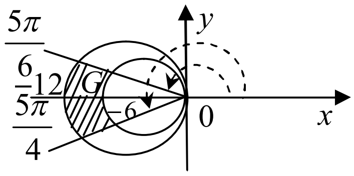


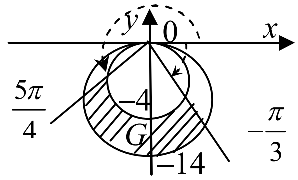
14.24

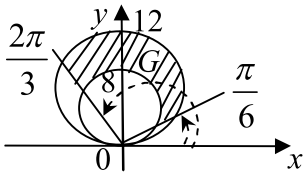


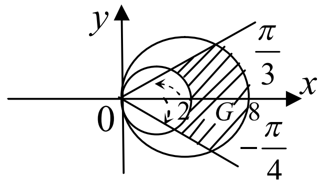
14.25 

14.26 

14.27 

14.28 

14.29 

14.30 

15. Вычислить площадь части поверхности параболоида или конуса (в зависимости от варианта), лежащей в соответствующем октанте, который определён системой неравенств. Изобразить соответствующую поверхность в декартовой системе координат.

15.1 $z = x^2 + y^2,\ z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

15.2 $y = 3 \cdot \sqrt{x^2 + z^2},\ y = 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

15.3 $y = -x^2 - z^2,\ y = -16,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

15.4 $x = -3 \cdot \sqrt{y^2 + z^2},\ x = -1/2,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

15.5 $x = y^2 + z^2,\ x = 1/4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

15.6 $z = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 4,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

15.7 $z = -x^2 - y^2,\ z = -4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

15.8 $y = -2 \cdot \sqrt{x^2 + z^2},\ y = -4,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

15.9 $y = x^2 + z^2,\ y = 9,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

15.10 $x = 2 \cdot \sqrt{y^2 + z^2},\ x = 1,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

15.11 $x = -2 \cdot y^2 - 2 \cdot z^2,\ x = -2/9,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

15.12 $z = -3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2},\ z = -9,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0.$

15.13 $z = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2,\ z = 18,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

15.14 $y = 5 \cdot \sqrt{x^2 + z^2},\ y = 25,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

15.15 $y = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot z^2,\ y = -72,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

15.16 $x = -5 \cdot \sqrt{y^2 + z^2},\ x = -5/4,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \le 0.$

15.17 $x = 3 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2,\ x = 3/16,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \ge 0.$

15.18 $z = 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 32$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

15.19 $z = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2$, $z = -32$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$.

15.20 $y = -4 \cdot \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = -20$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \le 0$.

15.21 $y = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot z^2$, $y = 50$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

15.22 $x = 4 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = 8/3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$.

15.23 $x = -4 \cdot y^2 - 4 \cdot z^2$, $x = -4/25$, $x \le 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

15.24 $z = -5 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = -20$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \le 0$.

15.25 $z = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2$, $z = 1/6$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

15.26 $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 1/5$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

15.27 $y = -0{,}25 \cdot x^2 - 0{,}25 \cdot z^2$, $y = -1/16$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \le 0$.

15.28 $x = -6 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = -9/2$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

15.29 $x = 5 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2$, $x = 125/4$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \le 0$.

15.30 $z = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1/14$, $x \le 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

16. С помощью двойного интеграла вычислить объём тела Ω. Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy.

16.1 $\Omega: z = x^2,\ x + y \le 1,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.2 $\Omega: z = y^2,\ x + 2y \le 4,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ z \ge 0.$

16.3 $\Omega: z = x^2 + y^2,\ x + 4y \le 8,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.4 $\Omega: z = \sqrt{y},\ x + 6y \le 12,\ x \ge 0,\ z \ge 0.$

16.5 $\Omega: z = \sqrt{x},\ x + 7y \le 14,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.6 $\Omega: z = 4 - x^2 - y^2,\ x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.7 $\Omega: z = 2 + x^2 + y^2,\ x \le 2,\ y \le x,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.8 $\Omega: z = 5 + x^2 + y^2,\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.9 $\Omega: z = 8 - x^2 - y^2,\ x \ge y,\ x \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.10 $\Omega: x = y^2,\ x = 4,\ x + z = 4, y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.11 $\Omega: y = x^2,\ y = 16,\ y + z = 16, x \ge 0,\ z \ge 0.$

16.12 $\Omega: x + y + z = 2,\ y = x^2,\ z \ge 0.$

16.13 $\Omega: x + 3y + z = 6,\ x = 3y^2,\ z \ge 0.$

16.14 $\Omega: z = x,\ y = x^3,\ y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16.15 $\Omega: x + y + z = 2,\ y \ge x^2,\ y \le x^3,\ z \ge 0.$

16.16 $\Omega: z = x^2,\ x + y \le 2,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ z \ge 0.$

16.17 $\Omega: z=y^2,\ x+3y\le 6,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.18 $\Omega: z=x^2+y^2,\ x+5y\le 10,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

16.19 $\Omega: z=\sqrt{y},\ x+2y\le 4,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$

16.20 $\Omega: z=\sqrt{x},\ x+4y\le 8,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.21 $\Omega: z=9-x^2-y^2,\ x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.22 $\Omega: z=3+x^2+y^2,\ y\le 3,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.23 $\Omega: z=6+x^2+y^2,\ x+2y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.24 $\Omega: z=18-x^2-y^2,\ y\ge x,\ y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.25 $\Omega: x=y^2,\ x=9,\ x+z=9,\ y\le 0,\ z\ge 0.$

16.26 $\Omega: y=x^2,\ y=25,\ y+z=25, x\le 0,\ z\ge 0.$

16.27 $\Omega: 4x+y+z=6,\ y=2x^2,\ z\ge 0.$

16.28 $\Omega: x+8y+z=12,\ x=4y^2,\ z\ge 0.$

16.29 $\Omega: z=y,\ x=y^3,\ x=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16.30 $\Omega: x+y+z=3,\ 4y\ge x^2,\ 8y\le x^3,\ z\ge 0.$

17. С помощью тройного интеграла вычислить объём тела Ω. Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на соответствующую координатную плоскость.

17.1 $\Omega: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ z^2\ge 3x^2+3y^2,\ y\le x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

17.2 $\Omega: x=12\sqrt{y^2+z^2},\ x=26-\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2\le -4y,\ z\ge 0.$

17.3 $\Omega: 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y^2\ge 3x^2+3z^2,\ x\le z,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

17.4 $\Omega: y=-3x^2-3z^2,\ z=3x^2+3z^2-54,\ x^2+z^2\le 6x,\ z\le 0.$

17.5 $\Omega: 25\le x^2+y^2+z^2\le 49,\ x^2\ge 3y^2+3z^2,\ z\ge y,\ x\ge 0,\ y\le 0,\ z\le 0.$

17.6 $\Omega: z=2\sqrt{x^2+y^2},\ z=6-\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le -4x,\ y\ge 0.$

17.7 $\Omega: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ z^2\le 3x^2+3y^2,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

17.8 $\Omega: z=-x^2-y^2,\ z=x^2+y^2-18,\ x^2+y^2\le 6y,\ x\le 0.$

17.9 $\Omega: 9\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ z^2\le 3x^2+3y^2,\ y\ge -x,\ x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 0.$

17.10 $\Omega: x=-6\sqrt{y^2+z^2},\ x=6\sqrt{y^2+z^2}-72,\ y^2+z^2\le 12z,\ y\ge 0.$

17.11 $\Omega: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y^2\le 3x^2+3z^2,\ x\ge z,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

17.12 $\Omega: y=-5x^2-5z^2,\ z=5x^2+5z^2-250,\ x^2+z^2\le -10x,\ z\ge 0.$

17.13 $\Omega: 4\le x^2+y^2+z^2\le 64,\ x^2\le 3y^2+3z^2,\ z\le y,\ x\ge 0,\ y\le 0,\ z\le 0.$

17.14 $\Omega: z=-3\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}-12,\ x^2+y^2\le -6y,\ x\ge 0.$

17.15 $\Omega: 16\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ z^2\ge 3x^2+3y^2,\ y\le -x,\ x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 0.$

17.16 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 32 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le -8x, y \le 0.$

17.17 $\Omega: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25, y^2 \le 3x^2 + 3z^2, x \ge -z, x \ge 0, y \le 0, z \le 0.$

17.18 $\Omega: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \le 2y, z \le 0.$

17.19 $\Omega: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, x^2 \le 3y^2 + 3z^2, z \le -y, x \le 0, y \ge 0, z \le 0.$

17.20 $\Omega: y = 4x^2 + 4z^2, z = 128 - 4x^2 - 4z^2, x^2 + z^2 \le -8z, x \le 0.$

17.21 $\Omega: 25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, z^2 \ge 3x^2 + 3y^2, y \ge x, x \le 0, y \le 0, z \ge 0.$

17.22 $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le 2x, y \le 0.$

17.23 $\Omega: 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, z^2 \le 3x^2 + 3y^2, y \le x, x \le 0, y \le 0, z \ge 0.$

17.24 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le 4x, y \ge 0.$

17.25 $\Omega: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, y^2 \ge 3x^2 + 3z^2, x \le -z, x \ge 0, y \le 0, z \le 0.$

17.26 $\Omega: y = 2x^2 + 2z^2, z = 16 - 2x^2 - 2z^2, x^2 + z^2 \le 4z, x \ge 0.$

17.27 $\Omega: 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, z^2 \le 3x^2 + 3y^2, y \le -x, x \ge 0, y \le 0, z \le 0.$

17.28 $\Omega: z = -4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8\sqrt{x^2 + y^2} - 72, x^2 + y^2 \le 12y, x \ge 0.$

17.29 $\Omega: 64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, z^2 \ge 3x^2 + 3y^2, y \ge -x, x \ge 0, y \le 0, z \le 0.$

17.30 $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 50, x^2 + y^2 \le -10y, x \ge 0.$

18. Найти координаты центра масс неоднородной пластины G, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке равна $\rho = \rho(x, y)$. Записать численные значения статических моментов относительно осей координат, а также значение массы материальной пластины. Вычислить моменты инерции материальной пластины относительно осей координат и начала координат. Изобразить пластину G в декартовой прямоугольной системе координат.

18.1 $G: x + y = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = y^2.$

18.2 $G: x - y = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = y.$

18.3 $G: y - x = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = x.$

18.4 $G: x + y = -1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$

18.5 $G: x + y = 2, x = -1, y = -1; \quad \rho(x, y) = x^2.$

18.6 $G: x - y = 2, x = 3, y = -3; \quad \rho(x, y) = y^2.$

18.7 $G: y - x = 2, x = -2, y = -2; \quad \rho(x, y) = y.$

18.8 $G: x + y = -2, x = -2, y = -2; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$

18.9 $G: 4 \cdot x + 3 \cdot y = 19, x = 1, y = 1; \quad \rho(x, y) = x.$

18.10 $G: 2 \cdot y - 3 \cdot x = 11, x = -1, y = 1; \quad \rho(x, y) = y.$

18.11 $G: 2 \cdot x + 3 \cdot y = -1, x = 1, y = -3; \quad \rho(x, y) = x.$

18.12 $G: 2 \cdot y - 3 \cdot x = 4, x = -2, y = -4; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$

18.13 $G: 3 \cdot x + 2 \cdot y = 16, x = 4, y = 5; \quad \rho(x, y) = y^2.$

18.14 $G: 3\cdot x+4\cdot y=6,\ x=-2,\ y=6;\quad \rho(x,y)=x.$

18.15 $G: x+2\cdot y=-9,\ x=-1,\ y=-2;\quad \rho(x,y)=x^2.$

18.16 $G: 4\cdot x+3\cdot y=5,\ x=2,\ y=-5;\quad \rho(x,y)=x.$

18.17 $G: 3\cdot y-x=8,\ x=4,\ y=3;\quad \rho(x,y)=y.$

18.18 $G: 2\cdot y-5\cdot x=22,\ x=-2,\ y=1;\quad \rho(x,y)=y^2.$

18.19 $G: x-y=6,\ x=1,\ y=-1;\quad \rho(x,y)=x^2.$

18.20 $G: 5\cdot x-2\cdot y=-3,\ x=-3,\ y=-1;\quad \rho(x,y)=x\cdot y.$

18.21 $G: x+2\cdot y=9,\ x=1,\ y=2;\quad \rho(x,y)=x.$

18.22 $G: 3\cdot x+2\cdot y=2,\ x=-2,\ y=1;\quad \rho(x,y)=y.$

18.23 $G: 2\cdot x+5\cdot y=-17,\ x=-6,\ y=-3;\quad \rho(x,y)=x\cdot y.$

18.24 $G: 5\cdot x+y=4,\ x=1,\ y=-6;\quad \rho(x,y)=x^2.$

18.25 $G: x-2\cdot y=-3,\ x=5,\ y=2;\quad \rho(x,y)=y^2.$

18.26 $G: x+7\cdot y=-14,\ x=0,\ y=-2;\quad \rho(x,y)=x\cdot y.$

18.27 $G: 3\cdot x+2\cdot y=-1,\ x=1,\ y=-8;\quad \rho(x,y)=y^2.$

18.28 $G: 4\cdot y-3\cdot x=12,\ x=4,\ y=3;\quad \rho(x,y)=x.$

18.29 $G: 5\cdot y-2\cdot x=15,\ x=-5,\ y=3;\quad \rho(x,y)=x^2.$

18.30 $G: 2\cdot y-x=10,\ x=0,\ y=2;\quad \rho(x,y)=y.$

19. Найти координаты центра масс неоднородного материального тела Ω, заданного в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ системой неравенств. Объёмная плотность в каждой точке указанного тела равна $\rho=\rho(x,y,z)$. Записать численные значения статических моментов относительно осей координат, а также значение массы материального тела. Вычислить моменты инерции материального тела относительно координатных плоскостей, начала координат и координатных осей. Изобразить материальное тело Ω в декартовой прямоугольной системе координат.

19.1 $\Omega: 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 4,\ 1\le z\le 3;\quad \rho(x,y,z)=x.$

19.2 $\Omega: -1\le x\le 0,\ 1\le y\le 3,\ -2\le z\le 2;\quad \rho(x,y,z)=y.$

19.3 $\Omega: 1\le x\le 3,\ -1\le y\le 5,\ 2\le z\le 4;\quad \rho(x,y,z)=z.$

19.4 $\Omega: -3\le x\le 2,\ 4\le y\le 6,\ -1\le z\le 2;\quad \rho(x,y,z)=x^2.$

19.5 $\Omega: -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 5,\ 3\le z\le 6;\quad \rho(x,y,z)=y^2.$

19.6 $\Omega: -1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2,\ 4\le z\le 1;\quad \rho(x,y,z)=z^2.$

19.7 $\Omega: 2\le x\le 4,\ 1\le y\le 3,\ -1\le z\le 0;\quad \rho(x,y,z)=x\cdot y.$

19.8 $\Omega: 0\le x\le 1,\ -2\le y\le 1,\ 2\le z\le 5;\quad \rho(x,y,z)=x\cdot z.$

19.9 $\Omega: -3\le x\le -1,\ 1\le y\le 3,\ 3\le z\le 5;\quad \rho(x,y,z)=y\cdot z.$

19.10 $\Omega: 1\le x\le 3,\ 2\le y\le 6,\ 4\le z\le 6;\quad \rho(x,y,z)=x\cdot y\cdot z.$

19.11 $\Omega: -4\le x\le -2,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 4;\quad \rho(x,y,z)=x^2\cdot y.$

19.12 $\Omega: 2 \le x \le 5, 0 \le y \le 3, -2 \le z \le 1; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y^2.$

19.13 $\Omega: 1 \le x \le 3, -1 \le y \le 1, 1 \le z \le 4; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot z.$

19.14 $\Omega: 1 \le x \le 5, -1 \le y \le 0, 1 \le z \le 3; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot z^2.$

19.15 $\Omega: -3 \le x \le 3, -1 \le y \le 4, 1 \le z \le 4; \quad \rho(x,y,z) = z \cdot y^2.$

19.16 $\Omega: -2 \le x \le 0, 2 \le y \le 4, -1 \le z \le 1; \quad \rho(x,y,z) = z^2 \cdot y.$

19.17 $\Omega: 1 \le x \le 5, 2 \le y \le 4, -3 \le z \le -1; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y \cdot z^2.$

19.18 $\Omega: 1 \le x \le 3, -2 \le y \le 2, 3 \le z \le 5; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y^2 \cdot z.$

19.19 $\Omega: -4 \le x \le -2, 1 \le y \le 3, 2 \le z \le 4; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot y^2.$

19.20 $\Omega: -4 \le x \le -1, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 5; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot y \cdot z.$

19.21 $\Omega: 2 \le x \le 6, -3 \le y \le -2, -2 \le z \le 1; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y^2 \cdot z^2.$

19.22 $\Omega: -1 \le x \le 1, 1 \le y \le 6, -3 \le z \le -3; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot y \cdot z^2.$

19.23 $\Omega: -4 \le x \le -2, -3 \le y \le -1, -5 \le z \le -3; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2.$

19.24 $\Omega: 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 2 \le z \le 3; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot z^2.$

19.25 $\Omega: 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -2 \le z \le 2; \quad \rho(x,y,z) = y^2 \cdot z^2.$

19.26 $\Omega: 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 4, -2 \le z \le 0; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y.$

19.27 $\Omega: -1 \le x \le 0, 1 \le y \le 3, 2 \le z \le 3; \quad \rho(x,y,z) = y \cdot z.$

19.28 $\Omega: 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 2, 1 \le z \le 3; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot z.$

19.29 $\Omega: 2 \le x \le 4, 1 \le y \le 4, 3 \le z \le 6; \quad \rho(x,y,z) = x \cdot y \cdot z.$

19.30 $\Omega: 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 4, 1 \le z \le 5; \quad \rho(x,y,z) = x^2 \cdot y^2 \cdot z.$

РАЗДЕЛ 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
2. Методы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
3. Поверхностный интеграл первого рода и его свойства.
4. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
5. Механические приложения криволинейных интегралов: масса однородной дуги, координаты центра масс и моменты инерции однородной дуги, работа силы, под действием которой определяется перемещение тела.
6. Скалярное поле и его характеристики.
7. Векторное поле и его геометрические характеристики.
8. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
9. Методы вычисления криволинейного интеграла второго рода. Формула Грина.
10. Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.
11. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

12. Интегральные характеристики векторных полей: поток и циркуляция.

13. Дифференциальные характеристики векторных полей: дивергенция, её физический смысл и метод вычисления.

14. Дифференциальные характеристики векторных полей: ротор, его смысл и метод вычисления в декартовой системе координат.

15. Теорема Остроградского-Гаусса.

16. Теорема Стокса.

17. Потенциальное векторное поле. Потенциал поля.

18. Соленоидальное векторное поле.

19. Гармоническое векторное поле.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

20. Вычислить криволинейный интеграл.

20.1 $\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2}\, dl$, где γ – дуга линии $y = \ln x,\ \ \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}.$

20.2 $\int\limits_{\gamma} (y + x)\, dl$, где γ – дуга линии $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ \ \frac{3\pi}{2} \le t \le \frac{7\pi}{4}.$

20.3 $\int\limits_{\gamma} \left(x^2 + y^2\right) dl$, где γ – дуга линии $\rho = 1 - \cos\varphi,\ \ -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0.$

20.4 $\int\limits_{\gamma} \left(x^2 + y^2 - z\right) dl$, где γ – дуга линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{6}.$

20.5 $\int\limits_{\gamma} y\, dl$, где γ – дуга линии $y = e^{2x},\ \ 0 \le x \le 1.$

20.6 $\int\limits_{\gamma} x^2\, dl$, где γ – дуга линии $x = 6(t - \sin t),\ y = 6(1 - \cos t),\ \ \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}.$

20.7 $\int\limits_{\gamma} \left(x^2 + y^2\right) dl$, где γ – дуга линии $\rho = 7e^{\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le \ln 7.$

20.8 $\int\limits_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, где γ – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0;0)$ и $A(1;2;3)$.

20.9 $\int\limits_{\gamma} \cos x\, dl$, где γ – дуга линии $y = \ln\sin x,\ \ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

20.10 $\int\limits_{\gamma} (y + 2x)\, dl$, где γ – дуга линии $x = \sqrt{2}\cos^2 t,\ y = \sqrt{2}\sin^2 t,\ \ \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{6}.$

20.11 $\int\limits_{\gamma} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dl$, где γ – дуга линии $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}},\ \ 0 \le \varphi \le 1.$

20.12 $\int\limits_{\gamma}(x+y+z)\,dl$, где γ – дуга линии $x=\cos 2t,\ y=\sin 2t,\ z=8t,\ \ \dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{\pi}{4}.$

20.13 $\int\limits_{\gamma}\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\,dl$, где γ – дуга линии $y=\ln\dfrac{1}{x},\ \ \dfrac{1}{e}\le x\le e.$

20.14 $\int\limits_{\gamma}x\,dl$, где γ – дуга линии $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ \ 2\pi\le t\le 3\pi.$

20.15 $\int\limits_{\gamma}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dl$, где γ – дуга линии $\rho=\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\sqrt{3}.$

20.16 $\oint\limits_{\gamma}\left(y^2+z^2\right)dl$, где γ – окружность $y^2+z^2=9.$

20.17 $\int\limits_{\gamma}y\,dl$, где γ – дуга линии $y=\operatorname{ch}x,\ \ 0\le x\le 1.$

20.18 $\int\limits_{\gamma}xy\,dl$, где γ – дуга линии $x=\sin t,\ y=\cos t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

20.19 $\int\limits_{\gamma}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dl$, где γ – дуга линии $\rho=1+\sin\varphi,\ \ 2\pi\le\varphi\le 3\pi.$

20.20 $\oint\limits_{\gamma}\left(x^2+y^2\right)dl$, где γ – окружность $x^2+y^2=16.$

20.21 $\int\limits_{\gamma}\dfrac{y}{1+\operatorname{ch}^2x}\,dl$, где γ – дуга линии $y=\operatorname{sh}x,\ \ 0\le x\le 1.$

20.22 $\int\limits_{\gamma}\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\,dl$, где γ – дуга линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ \dfrac{2\pi}{3}\le t\le\dfrac{5\pi}{6}.$

20.23 $\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2y^2}\,dl$, где γ – дуга линии $\rho=\sin\varphi,\ \ \dfrac{3\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{5\pi}{6}.$

20.24 $\int\limits_{\gamma}\dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где γ – отрезок прямой, соединяющей точки $O(2;1;3)$ и $A(5;-1;9).$

20.25 $\int\limits_{\gamma}y^2\,dl$, где γ – дуга линии $y=e^x,\ \ 0\le x\le\ln 2.$

20.26 $\int\limits_{\gamma}(x+y)\,dl$, где γ – дуга линии $x=4\cos^3 2t,\ y=4\sin^3 2t,\ \ \dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{3\pi}{8}.$

20.27 $\int\limits_{\gamma}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}\,dl$, где γ – дуга линии $\rho=1-\sin\varphi,\ \ 3\pi\le\varphi\le 4\pi.$

20.28 $\oint\limits_{\gamma}\left(x^2+z^2\right)dl$, где γ – окружность $x^2+z^2=16.$

20.29 $\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2}\,dl$, где γ – дуга линии $\rho=\cos\varphi,\ \ \dfrac{2\pi}{3}\le\varphi\le\pi.$

20.30 $\int\limits_{\gamma}\dfrac{\sqrt{y^2}}{1+\sin^2 x}\,dl$, где γ – дуга линии $y=\cos x,\ \ \dfrac{5\pi}{6}\le x\le\pi.$

21. Вычислить работу A силы $\vec{F}$ вдоль дуги линии l от точки S до точки T (линия l задана либо уравнением $y=f(x)$, если уравнение в условии задачи данного варианта указано, либо является прямой, проходящей через две точки S и T).

21.1 $\vec{F}=\left(2x^2-3y\right)\vec{i}+\left(3x-y\right)\vec{j}+z\vec{k}$, $S(2;3;5)$, $T(5;1;4)$.

21.2 $\vec{F}=\left(3x-y\right)\vec{i}+\left(2x+5y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=x^2$, $S(1;1)$, $T(2;4)$.

21.3 $\vec{F}=\left(4x^2+3y^2\right)\vec{i}+\left(2x-y\right)\vec{j}$, $S(1;4)$, $T(2;5)$.

21.4 $\vec{F}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(2x^2-6y^3\right)\vec{j}$, $f(x)=x^2+4x-1$, $S(1;4)$, $T(2;11)$.

21.5 $\vec{F}=\left(4x-y\right)\vec{i}+\left(3x^3-5z\right)\vec{j}+\left(2x+6z\right)\vec{k}$, $S(4;3;2)$, $T(2;5;1)$.

21.6 $\vec{F}=\left(5x+3y\right)\vec{i}+\left(4x+4y^3\right)\vec{j}$, $f(x)=x^3$, $S(2;8)$, $T(3;27)$.

21.7 $\vec{F}=\left(x^3+5y\right)\vec{i}+\left(x^2+2y\right)\vec{j}$, $S(5;4)$, $T(6;7)$.

21.8 $\vec{F}=\left(x+y\right)\vec{i}+\left(x-y\right)\vec{j}$, $f(x)=2x^2+5x+2$, $S(0;2)$, $T(1;9)$.

21.9 $\vec{F}=\left(x^2-z\right)\vec{i}+\left(3z-y\right)\vec{j}+\left(2x+z\right)\vec{k}$, $S(3;3;4)$, $T(6;7;8)$.

21.10 $\vec{F}=\left(2x+5y\right)\vec{i}+\left(2x-4y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=x^2-x$, $S(2;2)$, $T(4;12)$.

21.11 $\vec{F}=\left(3x^2+5y^2\right)\vec{i}-\left(x^2-4y\right)\vec{j}$, $S(2;1)$, $T(4;3)$.

21.12 $\vec{F}=\left(2x-5y\right)\vec{i}+\left(3x+2y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=3x^2-10x+3$, $S(1;-4)$, $T(3;0)$.

21.13 $\vec{F}=\left(y^2-z\right)\vec{i}+\left(3z-x\right)\vec{j}+\left(2y+z\right)\vec{k}$, $S(2;1;6)$, $T(4;5;4)$.

21.14 $\vec{F}=\left(x^2-3y\right)\vec{i}-\left(4x-5y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=4-x^2$, $S(2;0)$, $T(1;3)$.

21.15 $\vec{F}=\left(2x^2+y^3\right)\vec{i}-\left(x^3-y^3\right)\vec{j}$, $S(3;7)$, $T(-2;-1)$.

21.16 $\vec{F}=x\vec{i}+\left(4x-y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=x^2-10x+9$, $S(1;0)$, $T(2;-7)$.

21.17 $\vec{F}=\left(y^2-x\right)\vec{i}+\left(x+y-z\right)\vec{j}+x\vec{k}$, $S(3;2;1)$, $T(8;5;2)$.

21.18 $\vec{F}=\left(x^3-2y^2\right)\vec{i}-\left(5x+4y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=x-x^2$, $S(1;0)$, $T(5;-20)$.

21.19 $\vec{F}=\left(4x+2y^2\right)\vec{i}+2\left(3x^2-y^2\right)\vec{j}$, $S(2;5)$, $T(3;7)$.

21.20 $\vec{F}=y\vec{i}+\left(2x+3y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=2x^2-9x+1$, $S(2;-9)$, $T(0;1)$.

21.21 $\vec{F}=\left(y^2-z^3\right)\vec{i}+\left(x^2+y-z\right)\vec{j}+\left(x+z\right)\vec{k}$, $S(4;1;2)$, $T(2;4;7)$.

21.22 $\vec{F}=\left(x^3+4y^2\right)\vec{i}+3\left(2x-3y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=x^2+3x$, $S(0;0)$, $T(3;18)$.

21.23 $\vec{F}=\left(2x+4y^2\right)\vec{i}-5\left(4x^2+y^3\right)\vec{j}$, $S(3;9)$, $T(6;9)$.

21.24 $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\left(x^2-5y^2\right)\vec{j}$, $f(x)=3x^2-2x-1$, $S(1;0)$, $T(2;7)$.

21.25 $\vec{F}=\left(y^3-z^2\right)\vec{i}+\left(x^2+2y-3z\right)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$, $S(5;1;0)$, $T(4;2;1)$.

21.26 $\vec{F}=(x+4y)\vec{i}+3x\vec{j}$, $f(x)=\sin x$, $S(0;0)$, $T\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$.

21.27 $\vec{F}=\cos x\,\vec{i}-x\sin y\,\vec{j}$, $S(2;2)$, $T(7;7)$.

21.28 $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+2xy\vec{j}$, $f(x)=\sin 3x$, $S\left(\dfrac{\pi}{3};0\right)$, $T\left(\dfrac{\pi}{2};-1\right)$.

21.29 $\vec{F}=\sin x\,\vec{i}+\cos y\,\vec{j}+\operatorname{tg} z\,\vec{k}$, $S(2;4;1)$, $T(5;1;2)$.

21.30 $\vec{F}=\cos x\,\vec{i}+\sin x\,\vec{j}$, $f(x)=x^2$, $S(-1;1)$, $T(-2;4)$.

22. Вычислить массу части поверхности сферы Ω, если поверхностная плотность в каждой её точке равна $\rho=\rho(x;y;z)$. В условии задачи число n равно сумме двух последних цифр номера зачётной книжки (если сумма равна нулю, то $n=1$).

22.1 $\Omega: z=\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x\ge 0, 0\le y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \rho=xy$.

22.2 $\Omega: x=-\sqrt{n^2-y^2-z^2}, 0\le y\le \dfrac{\sqrt{3}}{3}z, z\ge 0, \rho=y^2z$.

22.3 $\Omega: y=-\sqrt{n^2-x^2-z^2},\ z\le x\le \sqrt{3}\,z, z\ge 0, \rho=x^2+z^2$.

22.4 $\Omega: z=-\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x\ge 0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le \sqrt{3}x, \rho=xy^2$.

22.5 $\Omega: x=\sqrt{n^2-y^2-z^2}, -\sqrt{3}\,z\le y\le z, z\ge 0, \rho=y^2z$.

22.6 $\Omega: y=\sqrt{n^2-x^2-z^2}, -z\le x\le 0, z\ge 0, \rho=x^2z^2$.

22.7 $\Omega: z=\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x\ge 0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le 0, \rho=x-y$.

22.8 $\Omega: x=-\sqrt{n^2-y^2-z^2}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}z\le y\le \dfrac{\sqrt{3}}{3}z, z\le 0, \rho=y^2+z^2$.

22.9 $\Omega: y=\sqrt{n^2-x^2-z^2},\ 0\le x\le \dfrac{\sqrt{3}}{3}z, z\ge 0, \rho=x+z$.

22.10 $\Omega: z=-\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x\le 0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le 0, \rho=x^2+y^2$.

22.11 $\Omega: x=-\sqrt{n^2-y^2-z^2}, -z\sqrt{\frac{1}{3}} \le y \le 0,\ z \ge 0,\ \rho=-yz$.

22.12 $\Omega: y=-\sqrt{n^2-x^2-z^2}, x \le 0, -\sqrt{3}z \le x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}z,\ z \ge 0,\ \rho=x^2z$.

22.13 $\Omega: z=\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x \ge 0, \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le x,\ \rho=x^2y^2$.

22.14 $\Omega: x=\frac{1}{2}\sqrt{n^2-4y^2-4z^2}, -z \le y \le 0,\ z \ge 0,\ \rho=-yz^2$.

22.15 $\Omega: y=\frac{1}{3}\sqrt{n^2-9x^2-9z^2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}z \le x \le 0,\ z \le 0,\ \rho=x^2+z^2$.

22.16 $\Omega: z=-\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x \ge 0, -\sqrt{3}x \le y \le -x,\ \rho=-x^3y$.

22.17 $\Omega: x=-\frac{1}{3}\sqrt{n^2-9y^2-9z^2}, -\sqrt{3}\ z \le y \le 0,\ z \le 0,\ \rho=-y^2z$.

22.18 $\Omega: y=\frac{1}{5}\sqrt{n^2-25x^2-25z^2}, -z\sqrt{3} \le x \le z\sqrt{3},\ z \le 0,\ \rho=x^2z^2$.

22.19 $\Omega: z=\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x \le 0, 0 \le y \le x,\ \rho=-2x+3y$.

22.20 $\Omega: x=\sqrt{n^2-y^2-z^2}, -z \le y \le z\sqrt{3},\ z \ge 0,\ \rho=2y^2+2z^2$.

22.21 $\Omega: y=-\sqrt{n^2-x^2-z^2},\ -\sqrt{3}\ z \le x \le -\frac{1}{\sqrt{3}}z,\ z \le 0,\ \rho=-3x-6z$.

22.22 $\Omega: z=\frac{1}{4}\sqrt{n^2-16x^2-16y^2}, x \le 0, -x \le y \le -\frac{x}{\sqrt{3}},\ \rho=xy$.

22.23 $\Omega: x=\frac{1}{6}\sqrt{n^2-36y^2-36z^2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\ z \le y \le 0,\ z \ge 0,\ \rho=y^2z^2$.

22.24 $\Omega: y=\frac{1}{7}\sqrt{n^2-49x^2-49z^2}, 0 \le x \le z\sqrt{3},\ z \ge 0,\ \rho=x^2z$.

22.25 $\Omega: z=\sqrt{n^2-x^2-y^2}, x \ge 0, 0 \le y \le x\sqrt{3},\ \rho=x^3y$.

22.26 $\Omega: x=-\sqrt{n^2-y^2-z^2}, 0 \le y \le z,\ z \ge 0,\ \rho=y^3z$.

22.27 $\Omega: y=\sqrt{n^2-x^2-z^2},\ z \le x \le \sqrt{3}\ z,\ z \ge 0,\ \rho=2x^2+2z^2$.

22.28 $\Omega: z=-\frac{1}{8}\sqrt{n^2-64x^2-64y^2}, x \ge 0, x \le y \le x\sqrt{3},\ \rho=xy^2$.

22.29 $\Omega: x=\frac{1}{9}\sqrt{n^2-81y^2-81z^2}, -\sqrt{3}\ z \le y \le 0,\ z \ge 0,\ \rho=3\left(y^2+z^2\right)$.

22.30 $\Omega: y=\frac{1}{10}\sqrt{n^2-100x^2-100z^2}, 0 \le x \le z,\ z \ge 0,\ \rho=4x+5z$.

23. Вычислить поверхностный интеграл $\oiint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a},\overrightarrow{n^0}\right)d\sigma$, где Σ – замкнутая поверхность, $\overrightarrow{n^0}$ – внешняя нормаль к поверхности Σ, $\vec{a}$ – векторное поле.

23.1 $\vec{a}=(x-z^2)\vec{i}+(y+z^2)\vec{j}-x\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=1, z=0, z\le 0$.

23.2 $\vec{a}=(x+2z^2)\vec{i}+(y-z^2)\vec{j}-y\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=4, z=0, z\ge 0$.

23.3 $\vec{a}=(x-yz^2)\vec{i}+(xy+z^2)\vec{j}-xy\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=9, z=0, z\le 0$.

23.4 $\vec{a}=y\vec{i}+z^2\vec{j}+x\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=16, z=0, z\ge 0$.

23.5 $\vec{a}=(x-yz^2)\vec{i}+(y+xz^2)\vec{j}-y\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2=z^2, z\le 0, z=-1$.

23.6 $\vec{a}=(y-yz^2)\vec{i}+x\vec{j}+\left(x+z^2\right)\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2=z^2, z\ge 0, z=1$.

23.7 $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(y+z)\vec{j}-z\vec{k},\ \ \Sigma: z=-x^2-y^2, z=-1$.

23.8 $\vec{a}=(x-z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+\vec{k},\ \ \Sigma: z=x^2+y^2, z=1$.

23.9 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\ \ \Sigma: z=\sqrt{18-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

23.10 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k},\ \ \Sigma: z=-\sqrt{8-x^2-y^2}, z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

23.11 $\vec{a}=2x\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k},\ \ \Sigma: z=2-x^2-y^2, z^2=x^2+y^2, z\ge 0$.

23.12 $\vec{a}=2y\vec{i}+5z\vec{j}+x\vec{k},\ \ \Sigma: z=98-x^2-y^2, z^2=x^2+y^2, z\le 0$.

23.13 $\vec{a}=\left(x-y\right)\vec{i}+\left(y-z\right)\vec{j}+\left(z-x\right)\vec{k},\ \ \Sigma: z=x^2+y^2+1, x^2+y^2=1, z=0$.

23.14 $\vec{a}=\left(y-z\right)\vec{i}+\left(z-x\right)\vec{j}+\left(x-y\right)\vec{k},\ \ \Sigma: z=54-3\left(x^2+y^2\right), z=3\left(x^2+y^2\right)$.

23.15 $\vec{a}=zy\vec{i}+3xz\vec{j}+4xy\vec{k},\ \ \Sigma: z=x, x^2+y^2=4, z=0, z\ge 0$.

23.16 $\vec{a}=(x^2-z)\vec{i}+(y^2+z)\vec{j}-y\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=49, z=0, z\le 0$.

23.17 $\vec{a}=(y+z^2)\vec{i}+(x-z^2)\vec{j}-x\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=25, z=0, z\ge 0$.

23.18 $\vec{a}=(x+z^2)\vec{i}+(xy-z^2)\vec{j}-xyz\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=36, z=0, z\le 0$.

23.19 $\vec{a}=\left(xy\right)\vec{i}+yz^2\vec{j}+xy\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2+z^2=64, z=0, z\ge 0$.

23.20 $\vec{a}=(x^2-z^2)\vec{i}+(y^2+z^2)\vec{j}-xy\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2=z^2, z\le 0, z=-2$.

23.21 $\vec{a}=(y-z^2)\vec{i}+y\vec{j}+\left(x-z^2\right)\vec{k},\ \ \Sigma: x^2+y^2=z^2, z\ge 0, z=3$.

23.22 $\vec{a}=(3x+2z)\vec{i}+(3y-z)\vec{j}-2z\vec{k},\ \ \Sigma: z=-x^2-y^2, z=-4$.

23.23 $\vec{a}=(3x-2z)\vec{i}+(4y-2z)\vec{j}+x\vec{k},\ \ \Sigma: z=x^2+y^2, z=9$.

23.24 $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \ \Sigma: z=\sqrt{50-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

23.25 $\vec{a}=\left(x+z\right)\vec{i}+\left(x+2z\right)\vec{j}+\left(x+3z\right)\vec{k},\ \ \Sigma: z=-\sqrt{32-x^2-y^2}, z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

23.26 $\vec{a}=2y\vec{i}+2z\vec{j}+xy\vec{k},\ \ \Sigma: z=8-x^2-y^2, z^2=x^2+y^2, z\ge 0$.

23.27 $\vec{a}=y^2\vec{i}+z\vec{j}+x^2\vec{k},\ \ \Sigma: z=18-x^2-y^2, z^2=x^2+y^2, z\le 0$.

23.28 $\vec{a}=\left(y-z\right)\vec{i}+\left(z-x\right)\vec{j}+\left(y-x\right)\vec{k},\ \ \Sigma: z=x^2+y^2+2, x^2+y^2=4, z=0$.

23.29 $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k},\ \ \sum : z = 40 - 5\left(x^2 + y^2\right), z = 5\left(x^2 + y^2\right).$

23.30 $\vec{a} = zyx\vec{i} + 3x\vec{j} + y\vec{k},\ \ \sum : z = x, x^2 + y^2 = 9, z = 0, z \geq 0$.

24. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ по определению и с помощью формулы Остроградского – Гаусса через внешнюю поверхность пирамиды, ограниченную координатными плоскостями и заданной плоскостью π .

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по определению и с помощью формулы Стокса по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости π с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора указанной плоскости.

24.1 $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k},\ \ \pi : x + 2y + 3z = 6$.

24.2 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (2y - 4z)\vec{j} + (x - 5y + z)\vec{k},\ \ \pi : 2x - 3y + 4z = 12$.

24.3 $\vec{a} = (x + 2y - z)\vec{i} + (4x + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + 3z)\vec{k},\ \ \pi : 2x + 3y - 5z = 30$.

24.4 $\vec{a} = (5x + 4y)\vec{i} + (x - 2y - 3z)\vec{j} + (3x + 4z)\vec{k},\ \ \pi : -3x + 4y + 6z = 12$.

24.5 $\vec{a} = (2y + 5z)\vec{i} + (3y - 3z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k},\ \ \pi : 2x - 4y - 5z = 20$.

24.6 $\vec{a} = (3x - 4y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k},\ \ \pi : -3x + 2y - 7z = 42$.

24.7 $\vec{a} = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (-x - y + 3z)\vec{k},\ \ \pi : -x - 3y + 5z = 15$.

24.8 $\vec{a} = (2x + 4z)\vec{i} + (x - 4y + z)\vec{j} + (2x - 3y + z)\vec{k},\ \ \pi : x + 2y + 3z = -12$.

24.9 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (4y + 5z)\vec{j} + (6x - 2y + z)\vec{k},\ \ \pi : 2x + 3y + 6z = 1$.

24.10 $\vec{a} = (2x - 3z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + (2x - 3y + 7z)\vec{k},\ \ \pi : 5x - 4y + 2z = 20$.

24.11 $\vec{a} = (x + 3y - 2z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2x - 3y + 4z)\vec{k},\ \ \pi : 6x + y - 2z = 6$.

24.12 $\vec{a} = (4x + 5y)\vec{i} + (3x - y - 2z)\vec{j} + (4x + 3z)\vec{k},\ \ \pi : -4x + 2y + 5z = 20$.

24.13 $\vec{a} = (5y + 6z)\vec{i} + (7y - 4z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k},\ \ \pi : 3x - 5y - 6z = 30$.

24.14 $\vec{a} = (4x - y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2x - 2y + 3z)\vec{k},\ \ \pi : -4x + 7y - 7z = 28$.

24.15 $\vec{a} = 2y\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (3x - y + 2z)\vec{k},\ \ \pi : -3x - 4y + 6z = 12$.

24.16 $\vec{a} = (3x - 4z)\vec{i} + (2x - 4y + 3z)\vec{j} + (x - 4y + 3z)\vec{k},\ \ \pi : 2x + 4y + 5z = -40$.

24.17 $\vec{a} = (4x - 5z)\vec{i} + (3y + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k},\ \ \pi : 3x + y + 5z = 15$.

24.18 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (2y + 3z)\vec{j} + (3x + 2y + z)\vec{k},\ \ \pi : x - 2y + 3z = 6$.

24.19 $\vec{a} = (3x + 2y + z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k},\ \ \pi : 4x + 5y - 8z = 40$.

24.20 $\vec{a} = (6x + 3y)\vec{i} + (2x - 5y - z)\vec{j} + (4x + 5z)\vec{k},\ \ \pi : -4x + y + 2z = 4$.

24.21 $\vec{a} = (2y + 3z)\vec{i} + (3y - 7z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k},\ \ \pi : 3x - 4y - 5z = 60$.

24.22 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y - z)\vec{k},\ \ \pi : -2x + 4y - 3z = 24$.

24.23 $\vec{a} = 3z\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + (-3x - 3y + z)\vec{k},\ \ \pi : -2x - 5y + 10z = 10$.

24.24 $\vec{a} = (3x + 5z)\vec{i} + (6x - 3y + 2z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k},\ \ \pi : 2x + 2y + 3z = -18$.

24.25 $\vec{a}=(4x-z)\vec{i}+(4y+z)\vec{j}+(3x-y+z)\vec{k},\quad \pi:3x+2y+3z=24$.

24.26 $\vec{a}=(2x-5z)\vec{i}+(5y-2z)\vec{j}+(3x-2y+z)\vec{k},\quad \pi:3x-4y+2z=24$.

24.27 $\vec{a}=(4x+2y-3z)\vec{i}+(5x+6z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k},\quad \pi:3x+4y-z=12$.

24.28 $\vec{a}=(x+3y)\vec{i}+(2x-3y-4z)\vec{j}+(5x+z)\vec{k},\quad \pi:-4x+5y+z=20$.

24.29 $\vec{a}=(2y-3z)\vec{i}+(y-4z)\vec{j}+(3x-2y)\vec{k},\quad \pi:12x-4y-5z=60$.

24.30 $\vec{a}=(4x-3y)\vec{i}+(3x-2z)\vec{j}+(x-y+3z)\vec{k},\quad \pi:-6x+4y-3z=24$.

25. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности векторного поля найти его потенциал.

25.1 $\vec{a}=(2xy-2yz)\vec{i}+(x^2-2xz)\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$.

25.2 $\vec{a}=(z+x)\vec{i}+2yz\vec{j}+(x+y^2)\vec{k}$.

25.3 $\vec{a}=(2xy+2xz)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}+(z^2+x^2)\vec{k}$.

25.4 $\vec{a}=(x+z^2)\vec{i}+2yz\vec{j}+(y^2+2xz)\vec{k}$.

25.5 $\vec{a}=(3yz+2x)\vec{i}+(3xz+2yz^2)\vec{j}+(3xy+2y^2z)\vec{k}$.

25.6 $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

25.7 $\vec{a}=(y^2z-yz^2)\vec{i}+(2xyz-xz^2)\vec{j}+(xy^2-2xyz)\vec{k}$.

25.8 $\vec{a}=-2yz\vec{i}+(2yz-2xz)\vec{j}+(y^2-2xy)\vec{k}$.

25.9 $\vec{a}=4yz\vec{i}+(z^2+4xz)\vec{j}+(2yz+4xy)\vec{k}$.

25.10 $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

25.11 $\vec{a}=-yz\vec{i}+(yz^2-xz)\vec{j}+(y^2z-xy)\vec{k}$.

25.12 $\vec{a}=4yz\vec{i}+(4xz-yz^2)\vec{j}+(4xy-zy^2)\vec{k}$.

25.13 $\vec{a}=(3x+yz)\vec{i}+(3y^2z-z^3+xz)\vec{j}+(y^3-3z^2y+xy)\vec{k}$.

25.14 $\vec{a}=(6xyz-0,5\cdot y^2z^2)\vec{i}+(3x^2z+3y^2z-xyz^2)\vec{j}+(3x^2y+y^3-xy^2z)\vec{k}$.

25.15 $\vec{a}=(yz+2)\vec{i}+(xz-1)\vec{j}+(yz-3)\vec{k}$.

25.16 $\vec{a}=2yz\vec{i}+(2yz-z^2+2xz)\vec{j}+(2xy+y^2-2yz)\vec{k}$.

25.17 $\vec{a}=(4yz+4z)\vec{i}+(yz^2+4xz)\vec{j}+(4xy+y^2z)\vec{k}$.

25.18 $\vec{a}=2yz\vec{i}+(2xz+2yz)\vec{j}+(y^2+2xy)\vec{k}$.

25.19 $\vec{a}=-x^2\vec{i}+2yz\vec{j}+y^2\vec{k}$.

25.20 $\vec{a}=(3-y-z)\vec{i}+(4-x-z)\vec{j}+(5-x-y)\vec{k}$.

25.21 $\vec{a}=(y^2z+2xz^2)\vec{i}+(2xyz+2xz^2)\vec{j}+(xy^2+4xyz)\vec{k}$.

25.22 $\vec{a}=-y^2z\vec{i}+(z^2-2xyz)\vec{j}+(2yz-xy^2)\vec{k}$.

25.23 $\vec{a}=(y^2z^2-y^3z)\vec{i}+(2xyz^2-3xy^2z)\vec{j}+(2xy^2z-xy^3)\vec{k}$.

25.24 $\vec{a} = yz\vec{i} + (xz + 2yz + 2z^2)\vec{j} + (xy + y^2 + 4yz)\vec{k}$.

25.25 $\vec{a} = (1 - yz)\vec{i} + (2 - xz)\vec{j} + (3 - xy)\vec{k}$.

25.26 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (3yz^2 + 2xz)\vec{j} + (3y^2z + 2xy)\vec{k}$.

25.27 $\vec{a} = 2xyz\vec{i} + (x^2z + 3y^2z + z^3)\vec{j} + (x^2y + y^3 + 3yz^2)\vec{k}$.

25.28 $\vec{a} = (7 + yz)\vec{i} + (2 + xz)\vec{j} + (5 + xy)\vec{k}$.

25.29 $\vec{a} = yz\vec{i} + (xz - 2yz + z^2)\vec{j} + (xy - y^2 + 2yz)\vec{k}$.

25.30 $\vec{a} = (5 + 2y + 2z)\vec{i} + (7 + 2x + 2z)\vec{j} + (4 + 2x + 2y)\vec{k}$.

РАЗДЕЛ 5. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический ряд, гармонический ряд).
2. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный и интегральные признаки Коши).
5. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница и следствие из него.
7. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
8. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
9. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.
10. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.
11. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.
12. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функций: $f(x) = e^x, f(x) = \mathrm{ch}x, f(x) = \mathrm{sh}x$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $f(x) = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$, $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}x$.
13. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.
14. Вычисление определенного интеграла с помощью степенных рядов.
15. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
16. Понятие о степенных рядах в комплексной области.

17. Периодические функции и их свойства. Интеграл от периодической функции.

18. Понятие числового тригонометрического ряда.

19. Ортогональные системы тригонометрических функций.

20. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.

21. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

22. Теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

23. Формула Фурье. Интеграл Фурье.

24. Косинус и синус преобразование Фурье.

25. Применение формулы Фурье к вычислению несобственных интегралов, зависящих от параметра.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

26. Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

26.1 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$

26.2 $\frac{2+3+4}{12}+\frac{4+9+16}{12^2}+\frac{8+27+64}{12^3}+\frac{16+81+256}{12^4}+\frac{32+243+1024}{12^5}+\ldots$

26.3 $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 13}+\ldots$

26.4 $\frac{3-4+5}{60}+\frac{9-16+25}{60^2}+\frac{27-64+125}{60^3}+\frac{81-256+625}{60^4}+\ldots$

26.5 $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1}{10\cdot 13\cdot 16}+\frac{1}{13\cdot 16\cdot 19}+\ldots$

26.6 $\frac{4+5-7}{140}+\frac{16+25-49}{140^2}+\frac{64+125-343}{140^3}+\frac{256+625-2401}{140^4}+\ldots$

26.7 $\frac{1}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 9\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 13\cdot 17}+\frac{1}{13\cdot 17\cdot 21}+\frac{1}{17\cdot 21\cdot 25}+\ldots$

26.8 $\frac{5-3-1}{15}+\frac{25-9-1}{15^2}+\frac{125-27-1}{15^3}+\frac{625-81-1}{15^4}+\frac{3125-243-1}{15^5}+\ldots$

26.9 $\frac{1}{1\cdot 6\cdot 11}+\frac{1}{6\cdot 11\cdot 16}+\frac{1}{11\cdot 16\cdot 21}+\frac{1}{16\cdot 21\cdot 26}+\frac{1}{21\cdot 26\cdot 31}+\ldots$

26.10 $\frac{2+4+5}{20}+\frac{4+16+25}{20^2}+\frac{8+64+125}{20^3}+\frac{16+256+625}{20^4}+\frac{32+1024+3125}{20^5}+\ldots$

26.11 $\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1}{8\cdot 10\cdot 12}+\frac{1}{10\cdot 12\cdot 14}+\ldots$

26.12 $\frac{7-1+2}{14}+\frac{49-1+4}{14^2}+\frac{343-1+8}{14^3}+\frac{2401-1+16}{14^4}+\frac{16807-1+32}{14^5}+\ldots$

26.13 $\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 8\cdot 11}+\frac{1}{8\cdot 11\cdot 14}+\frac{1}{11\cdot 14\cdot 17}+\frac{1}{14\cdot 17\cdot 20}+\ldots$

26.14 $\frac{3+5-1}{15}+\frac{9+25-1}{15^2}+\frac{27+125-1}{15^3}+\frac{81+625-1}{15^4}+\frac{243+3125-1}{15^5}+...$

26.15 $\frac{1}{2\cdot6\cdot10}+\frac{1}{6\cdot10\cdot14}+\frac{1}{10\cdot14\cdot18}+\frac{1}{14\cdot18\cdot22}+\frac{1}{18\cdot22\cdot24}+...$

26.16 $\frac{2+3-7}{42}+\frac{4+9-49}{42^2}+\frac{8+27-343}{42^3}+\frac{16+81-2401}{42^4}+\frac{32+243-16807}{42^5}+...$

26.17 $\frac{1}{2\cdot7\cdot12}+\frac{1}{7\cdot12\cdot17}+\frac{1}{12\cdot17\cdot22}+\frac{1}{17\cdot22\cdot27}+\frac{1}{22\cdot27\cdot32}+...$

26.18 $\frac{5-6-2}{30}+\frac{25-36-4}{30^2}+\frac{125-216-8}{30^3}+\frac{625-1296-16}{30^4}+...$

26.19 $\frac{1}{2\cdot8\cdot14}+\frac{1}{8\cdot14\cdot20}+\frac{1}{14\cdot20\cdot26}+\frac{1}{20\cdot26\cdot32}+\frac{1}{26\cdot32\cdot38}+...$

26.20 $\frac{1+7+5}{70}+\frac{1+49+25}{70^2}+\frac{1+343+125}{70^3}+\frac{1+2401+625}{70^4}+\frac{1+16807+3125}{70^5}+...$

26.21 $\frac{1}{3\cdot6\cdot9}+\frac{1}{6\cdot9\cdot12}+\frac{1}{9\cdot12\cdot15}+\frac{1}{12\cdot15\cdot18}+\frac{1}{15\cdot18\cdot21}+...$

26.22 $\frac{6-7+3}{84}+\frac{36-49+9}{84^2}+\frac{216-343+27}{84^3}+\frac{1296-2401+81}{84^4}+...$

26.23 $\frac{1}{3\cdot7\cdot11}+\frac{1}{7\cdot11\cdot15}+\frac{1}{11\cdot15\cdot19}+\frac{1}{15\cdot19\cdot23}+\frac{1}{19\cdot23\cdot27}+...$

26.24 $\frac{2+3-1}{120}+\frac{4+9-1}{120^2}+\frac{8+27-1}{120^3}+\frac{16+81-1}{120^4}+\frac{32+243-1}{120^5}+...$

26.25 $\frac{1}{3\cdot8\cdot13}+\frac{1}{8\cdot13\cdot18}+\frac{1}{13\cdot18\cdot23}+\frac{1}{18\cdot23\cdot28}+\frac{1}{23\cdot28\cdot33}+...$

26.26 $\frac{2-6-7}{84}+\frac{4-36-49}{84^2}+\frac{8-216-343}{84^3}+\frac{16-1296-2401}{84^4}+...$

26.27 $\frac{1}{3\cdot9\cdot15}+\frac{1}{9\cdot15\cdot21}+\frac{1}{15\cdot21\cdot27}+\frac{1}{21\cdot27\cdot33}+\frac{1}{27\cdot33\cdot39}+...$

26.28 $\frac{2+7+3}{126}+\frac{4+49+9}{126^2}+\frac{8+343+27}{126^3}+\frac{16+2401+81}{126^4}+\frac{64+16807+243}{126^5}+...$

26.29 $\frac{1}{4\cdot9\cdot14}+\frac{1}{9\cdot14\cdot19}+\frac{1}{14\cdot19\cdot24}+\frac{1}{19\cdot24\cdot29}+\frac{1}{24\cdot29\cdot34}+...$

26.30 $\frac{5-4+3}{120}+\frac{25-16+9}{120^2}+\frac{125-64+27}{120^3}+\frac{625-256+81}{120^4}+\frac{3125-1024+243}{120^5}+...$

27. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При исследовании рядов с положительными членами применить достаточные признаки сходимо-

сти числового ряда, а при исследовании рядов с произвольными членами установить их условную или абсолютную сходимость.

27.1 а) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}$; б) $a_n = \dfrac{n^n}{7^n n!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{5n+3}{5n+2}\right)^{n^2-3n}$;

г) $a_n = \dfrac{3}{(5n+1)\cdot\ln(7n+2)\cdot\ln\ln(7n+2)}$; д) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n}{4+n^2}$; е) $a_n = \dfrac{n\cdot\sin n\alpha}{n^3+3}$.

27.2 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{32n-1}}{\sqrt[4]{81n^9+3n^7-2}}$; б) $a_n = \dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$; в) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{2n+5}{2n+7}\right)^{2n^2+4n}$;

г) $a_n = \dfrac{4}{(3n+1)\cdot\ln(2n+1)\cdot\ln^2\ln(2n+1)}$; д) $a_n = \dfrac{n\cdot\cos n\alpha}{n^5+2}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{3n^2}{5+3n^3}$.

27.3 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[7]{128n^3-n-1}}{\sqrt[21]{n^2-4n}}$; б) $a_n = \dfrac{4^n}{5^n(3n+2)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{85^n}\left(\dfrac{3n-15}{3n-17}\right)^{5n^2-6n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{(5n-4)\cdot\ln(6n+2)\cdot\sqrt[4]{\ln^3\ln(6n+2)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sqrt[4]{n^5}+3}$; е) $a_n = (-1)^n\dfrac{7\sqrt[3]{n}}{2-\sqrt[3]{n^4}}$.

27.4 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{32n^3}}{\sqrt[4]{16n^9-3n^3+1}}$; б) $a_n = \dfrac{7^n(2n-1)}{3^n(3n+2)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{2n-3}{2n-6}\right)^{2n^2-6n}$;

г) $a_n = \dfrac{8}{(2n+3)\cdot\ln(n+1)\cdot\sqrt[4]{\ln^5\ln(n+1)}}$; д) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt[4]{n^5}}{3+5\sqrt[4]{n^9}}$; е) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{n\alpha}{2}}{\sqrt[7]{n^8}+4}$.

27.5 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2401n^7-2n+1}}{\sqrt{49n+64}}$; б) $a_n = \dfrac{4^n}{5^n(3n+2)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{4n}{4n+7}\right)^{2n^2+7n}$;

г) $a_n = \dfrac{4}{(3n-2)\cdot\ln(3n-1)\cdot\sqrt[5]{\ln^2\ln(3n-1)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{3}}{\sqrt[5]{n^6}+2}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}}$.

27.6 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^7+13n-27}}{\sqrt[4]{81n^{17}-17n^2-16}}$; б) $a_n = \dfrac{3n-1}{6^{2n+1}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{81^n}\left(\dfrac{n-30}{n-34}\right)^{6n^2-8n}$;

г) $a_n = \dfrac{6}{(2n+4)\cdot\ln(2n+1)\cdot\ln^7\ln(2n+1)}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{n\alpha}{3}}{\sqrt[4]{n^7}+6}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{n^4+6}$.

27.7 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{32n^6-n-243}}{\sqrt[4]{81n^3-3n+16}}$; б) $a_n = \dfrac{7^{n+4}(4n-3)}{3^{n+2}(2n-1)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n^2-n}$;

г) $a_n = \dfrac{2}{(4n+3)\cdot\ln(5n+1)\cdot\sqrt[7]{\ln^6\ln(5n+1)}}$; д) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^4}{n^7+7}$; е) $a_n = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{4}}{\sqrt[7]{n^8}+7}$.

27.8 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[8]{256n^{17}+4n-1}}{\sqrt[3]{8n^4-n+81}}$; б) $a_n = \dfrac{4n-2}{5^{5n+2}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{4n+3}{4n-2}\right)^{2n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{5}{(9n-2)\cdot\ln(4n+1)\cdot\sqrt[5]{\ln^6\ln(4n+1)}}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\frac{n\alpha}{4}}{\sqrt[8]{n^9}+8}$; е) $a_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt[5]{n^3}}{2-\sqrt[5]{n^8}}$.

27.9 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[8]{n^4+7n-256}}{\sqrt[6]{64n^2-7n-64}}$; б) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{3^n(n+1)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{35^n}\left(\dfrac{6n-5}{6n-7}\right)^{-n^2-n}$;

г) $a_n = \dfrac{2}{(7n+1)\cdot\ln(9n+2)\cdot\sqrt[5]{\ln^3\ln(9n+2)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{5}}{\sqrt[9]{n^{10}}+9}$; е) $a_n = (-1)^n\dfrac{2n}{9+n^2}$.

27.10 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{32n^5-243}}{\sqrt[6]{64n^7-729}}$; б) $a_n = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{9^n}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{-n^2+2n}$;

г) $a_n = \dfrac{7}{(3n+2)\cdot\ln(2n+1)\cdot\sqrt[4]{\ln^5\ln(2n+1)}}$; д) $a_n = (-1)^n\dfrac{7\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}+1}$. е) $a_n = \dfrac{\cos\frac{n\alpha}{5}}{\sqrt[3]{n^5}+10}$.

27.11 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^4-n^2+6n-81}}{\sqrt[3]{81n^3-4n^2+4n+8}}$; б) $a_n = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{6^n}\left(\dfrac{1-3n}{2-3n}\right)^{n^2-7n}$;

г) $a_n = \dfrac{5}{(8n+1)\cdot\ln(9n+2)\cdot\sqrt{\ln\ln(9n+2)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{6}}{\sqrt[7]{n^9}+2}$; е) $a_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[5]{n^6}+3}$.

27.12 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^4-16}}{\sqrt[7]{128n^8+1}}$; б) $a_n = \dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{4n+3}{4n-1}\right)^{n^2-9n}$;

г) $a_n = \dfrac{8}{(4n+1)\cdot\ln(3n+1)\cdot\ln^2\ln(3n+1)}$; д) $a_n = \dfrac{n\cdot\cos\frac{n\alpha}{6}}{n^4+7}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^5}{n^6-9}$.

27.13 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{n^9-3n^6+3n^3+1}}{2n}$; б) $a_n = \dfrac{7^n(3n^2+4)}{9^n(2n^2+5)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{8^n}\left(\dfrac{6n-1}{6n-4}\right)^{2n^2+5n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{(6n-5)\cdot\ln(7n+3)\cdot\sqrt[5]{\ln^4\ln(7n+3)}}$; д) $a_n = (-1)^n\dfrac{5n}{n^2+1}$; е) $a_n = \dfrac{n\cdot\sin\frac{2n\alpha}{3}}{\sqrt[5]{n^{11}}+3}$.

27.14 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^3 - 9n^2 - 4}}{\sqrt[6]{729n^3 - 3n}}$; б) $a_n = \dfrac{6^n\left(2n^3 - 4\right)}{2^n(6n+12)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{81^n}\left(\dfrac{3n-11}{3n-14}\right)^{-n^2-n}$;

г) $a_n = \dfrac{9}{\left(3n+4\right)\cdot\ln\left(n+2\right)\cdot\sqrt[5]{\ln^6\ln\left(n+2\right)}}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{2n\alpha}{3}}{\sqrt[6]{n^7}+2}$; е) $a_n = \left(-1\right)^n\dfrac{7\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^7}-2}$.

27.15 а) $a_n = \dfrac{\sqrt{1024n}}{\sqrt[3]{729n+3}}$; б) $a_n = \dfrac{\left(n+1\right)!}{7^n(6n+5)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{2n-7}{2n-1}\right)^{3n^2+4n}$;

г) $a_n = \dfrac{5}{\left(4n-3\right)\cdot\ln\left(4n-1\right)\cdot\sqrt[6]{\ln^5\ln\left(4n-1\right)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{3n\alpha}{7}}{\sqrt[5]{n^7}+1}$; е) $a_n = \left(-1\right)^n\dfrac{n+1}{n^2+1}$.

27.16 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 - 3n - 27}}{\sqrt[4]{81n^8 - 16}}$; б) $a_n = \dfrac{8n+1}{7^{16n^2-12}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{27^n}\left(\dfrac{2n+3}{2n+5}\right)^{-3n^2+5n}$;

г) $a_n = \dfrac{7}{\left(3n+5\right)\cdot\ln\left(3n+2\right)\cdot\ln^8\ln\left(3n+2\right)}$; д) $a_n = \left(-1\right)^{n-1}\dfrac{5\sqrt[4]{n^5}}{1-\sqrt[4]{n^9}}$; е) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{3n\alpha}{7}}{\sqrt[7]{n^9}+1}$.

27.17 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[6]{n^9+64}}{\sqrt[4]{625n^4+16}}$; б) $a_n = \dfrac{5\cdot 11\cdot 17\cdot\ldots\cdot\left(6n-1\right)}{4\cdot 11\cdot 18\cdot\ldots\cdot\left(7n-3\right)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{n-15}{n-17}\right)^{5n^2-6n}$;

г) $a_n = \dfrac{3}{\left(n+4\right)\cdot\ln\left(6n+5\right)\cdot\sqrt[8]{\ln^7\ln\left(6n+5\right)}}$; д) $a_n = \dfrac{n\cdot\sin\dfrac{n\alpha}{8}}{n^5+1}$; е) $a_n = \left(-1\right)^n\dfrac{5\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5}-2}$.

27.18 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[5]{-32n^{15} - n - 1}}{\sqrt[4]{81n^8 - 4n^4 + 16}}$; б) $a_n = \dfrac{6n-2}{9^{2n^2+2}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{4n-1}{4n-7}\right)^{4n^2-2n}$;

г) $a_n = \dfrac{6}{\left(10n-3\right)\cdot\ln\left(5n+2\right)\cdot\sqrt[6]{\ln^7\ln\left(5n+2\right)}}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{n\alpha}{8}}{\sqrt[6]{n^{11}}+4}$; е) $a_n = \left(-1\right)^n\dfrac{2n^3}{n^4-3}$.

27.19 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[6]{1296n^7 - 5n - 64}}{\sqrt[4]{16n^2 - 81}}$; б) $a_n = \dfrac{\left(n+2\right)^{n+2}}{4^n\left(n+2\right)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{7n+3}{7n-5}\right)^{6n^2-5n}$;

г) $a_n = \dfrac{3}{\left(8n+2\right)\cdot\ln\left(10n+3\right)\cdot\sqrt[6]{\ln^4\ln\left(10n+3\right)}}$; д) $a_n = \left(-1\right)^n\dfrac{2n}{n^2+5}$; е) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{9}}{\sqrt[8]{n^9}+9}$.

27.20 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[7]{128n^6 - 1}}{\sqrt[3]{27n^3 + 8}}$; б) $a_n = \dfrac{6\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot\left(5n+1\right)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot\left(3n-1\right)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{7n-3}{7n-4}\right)^{2n^2+6n}$;

г) $a_n = \dfrac{8}{(4n+3)\cdot\ln(3n+2)\cdot\sqrt[3]{\ln^7\ln(3n+2)}}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{n\alpha}{9}}{\sqrt[3]{n^8}+4}$; е) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{3-\sqrt{n^3}}$.

27.21 а) $a_n = \dfrac{4\cdot\sqrt[7]{n^9-n-128}}{5\cdot\sqrt[4]{625n^3-4n^2-16}}$; б) $a_n = \dfrac{(n+2)^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{35^n}\left(\dfrac{n-13}{n-19}\right)^{-7n^2+6n}$;

г) $a_n = \dfrac{6}{(8n+2)\cdot\ln(9n+3)\cdot\sqrt{\ln\ln(9n+3)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{10}}{\sqrt[5]{n^7}+2}$; е) $a_n = (-1)^n \dfrac{5\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{n^7}+1}$.

27.22 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[11]{-n^3+2048}}{\sqrt[11]{-2048n^4-1}}$; б) $a_n = \dfrac{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{3n-3}{3n-2}\right)^{2n^2-6n}$;

г) $a_n = \dfrac{9}{(5n+2)\cdot\ln(4n+2)\cdot\ln^3\ln(4n+2)}$; д) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{2+\sqrt[3]{n^8}}$; е) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{n\alpha}{10}}{\sqrt[10]{n^{11}}+4}$.

27.23 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[7]{128n^8-n-1}}{\sqrt[5]{-243n^4+5n+32}}$; б) $a_n = \dfrac{6^n(5n^3+n)}{7^n(2n^3+5)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{9^n}\left(\dfrac{4n-7}{4n-8}\right)^{9n^2-n}$;

г) $a_n = \dfrac{2}{(7n-6)\cdot\ln(8n+4)\cdot\sqrt[6]{\ln^5\ln(8n+4)}}$; д) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{3n\alpha}{11}}{\sqrt{n^5}+3}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^5}{n^6+2}$.

27.24 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{625n^{12}-n^3-1296}}{\sqrt[3]{1296n^3-4n^2+27}}$; б) $a_n = \dfrac{9^n(2n^4-n)}{4^n(9n+18)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{34^n}\left(\dfrac{2n+5}{2n+2}\right)^{3n^2+9n}$;

г) $a_n = \dfrac{10}{(4n+5)\cdot\ln(3n+3)\cdot\sqrt[6]{\ln^7\ln(3n+3)}}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{3n\alpha}{11}}{\sqrt[8]{n^9}+7}$; е) $a_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt[4]{n^3}}{2-\sqrt[4]{n^7}}$.

27.25 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n^3-n-1}}{\sqrt[5]{-32n^2-5n}}$; б) $a_n = \dfrac{(n+2)!}{7^{n+1}(3n-2)}$; в) $a_n = \dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{4n-8}{4n-3}\right)^{8n^2-3n}$;

г) $a_n = \dfrac{6}{(5n-4)\cdot\ln(5n-2)\cdot\sqrt[7]{\ln^6\ln(5n-2)}}$; д) $a_n = (-1)^n\dfrac{8\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}+2}$; е) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{5n\alpha}{12}}{n^{12}+1}$.

27.26 а) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^3-n^2-1}}{\sqrt[4]{81n^2+3n}}$; б) $a_n = \dfrac{7n-3}{8^{16n^4-n}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{6^n}\left(\dfrac{7n-1}{7n-3}\right)^{3n^2-5n}$;

г) $a_n = \dfrac{8}{(4n+6)\cdot\ln(4n+3)\cdot\ln^9\ln(4n+3)}$; д) $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{5n\alpha}{12}}{\sqrt[5]{n^{12}}+3}$; е) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^4}{n^5+2}$.

27.27 а) $a_n=\dfrac{\sqrt[6]{64n^3-1}}{\sqrt[3]{8n-3}}$; б) $a_n=\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$; в) $a_n=\dfrac{1}{6^n}\left(\dfrac{2n+7}{2n-6}\right)^{6n^2-9n}$;

г) $a_n=\dfrac{4}{(6n+5)\cdot\ln(7n+5)\cdot\sqrt[9]{\ln^8\ln(7n+5)}}$; д) $a_n=\dfrac{\sin\dfrac{6n\alpha}{13}}{\sqrt[6]{n^{13}}+2}$; е) $a_n=(-1)^n\dfrac{7\sqrt[4]{n}}{1+\sqrt[4]{n^5}}$.

27.28 а) $a_n=\dfrac{\sqrt[5]{32n^3-2n-32}}{\sqrt[3]{8n-4}}$; б) $a_n=5\cdot\dfrac{5n-1}{5^{5n^5+5}}$; в) $a_n=\dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{4n^2-7n}$;

г) $a_n=\dfrac{7}{(11n-4)\cdot\ln(6n+1)\cdot\sqrt[7]{\ln^8\ln(6n+1)}}$; д) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{6n^2}{n^3+4}$; е) $a_n=\dfrac{\cos\dfrac{6n\alpha}{13}}{\sqrt[3]{n^5}+9}$.

27.29 а) $a_n=\dfrac{\sqrt[4]{625n^5-n^4-625}}{\sqrt[7]{128n^2-4n+128}}$; б) $a_n=\dfrac{(n+3)^{n+3}}{8^n(n+3)!}$; в) $a_n=\dfrac{1}{25^n}\left(\dfrac{2-3n}{7-3n}\right)^{7n^2-8n}$;

г) $a_n=\dfrac{4}{(9n+3)\cdot\ln(11n+4)\cdot\sqrt[7]{\ln^5\ln(11n+4)}}$; д) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n^2+9}$; е) $a_n=\dfrac{\sin\dfrac{3n\alpha}{14}}{\sqrt[4]{n^9}+5}$.

27.30 а) $a_n=\dfrac{\sqrt{16n^3-4}}{\sqrt[3]{125n^2-8}}$; б) $a_n=\dfrac{4\cdot10\cdot16\cdot\ldots\cdot(6n-2)}{4\cdot9\cdot14\cdot\ldots\cdot(5n-1)}$; в) $a_n=\dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{5n-15}{5n-25}\right)^{3n^2-5n}$;

г) $a_n=\dfrac{9}{(5n+4)\cdot\ln(4n+3)\cdot\sqrt[5]{\ln^6\ln(4n+3)}}$; д) $a_n=\dfrac{\cos\dfrac{3n\alpha}{14}}{\sqrt[7]{n^9}+3}$; е) $a_n=(-1)^n\dfrac{\sqrt{8n^5}}{\sqrt{n^7}+3}$.

28. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$.

28.1 $c_n=(-1)^n\dfrac{2^n\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^4+1}}$, $x_0=1$.

28.2 $c_n=(-1)^n\dfrac{5^{n-1}}{7^n(\sqrt{n+2}+4)}$, $x_0=9$.

28.3 $c_n=(-1)^n\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, $x_0=2$.

28.4 $c_n=(-1)^n\dfrac{5^{n+2}\left(\sqrt{n}+1\right)}{n+4}$, $x_0=-8$.

28.5 $c_n=(-1)^n\dfrac{3^n\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^7+2}}$, $x_0=3$.

28.6 $c_n=(-1)^n\dfrac{4^n\cdot\sqrt[3]{n+5}}{7^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n^4+7}}$, $x_0=-7$.

28.7 $c_n=(-1)^n\dfrac{n^2+3n+2}{5^n\cdot(n^3+1)}$, $x_0=4$.

28.8 $c_n=(-1)^n\dfrac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+4)}}$, $x_0=6$.

28.9 $c_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n(\sqrt{n+1}+2)}$, $x_0=5$.

28.10 $c_n=(-1)^n\dfrac{3^n\sqrt{n+2}}{(n+2)2^{n+1}}$, $x_0=-5$.

28.11 $c_n=(-1)^n\frac{6^{n+4}\left(n+1\right)}{n^2+2n+2}, x_0=6.$

28.12 $c_n=(-1)^n\frac{10^n}{\sqrt[5]{n^4+8}}, x_0=-4.$

28.13 $c_n=(-1)^n\frac{1}{3^n(n+2)\ln(n+2)}, x_0=7.$

28.14 $c_n=(-1)^n\frac{7^n}{6^n\sqrt[4]{n^3+1}}, x_0=-3.$

28.15 $c_n=(-1)^n\frac{4^n}{5^n\sqrt[3]{n^2+1}}, x_0=8.$

28.16 $c_n=(-1)^n\frac{4^{n+3}\left(n+2\right)}{n^2+4n+5}, x_0=-2.$

28.17 $c_n=(-1)^n\frac{5^n}{\sqrt[4]{n^3+7}}, x_0=9.$

28.18 $c_n=(-1)^n\frac{1}{(n+5)\ln(n+5)}, x_0=8.$

28.19 $c_n=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}, x_0=-1.$

28.20 $c_n=(-1)^n\frac{1}{4^n(\sqrt{n+2}+3)}, x_0=6.$

28.21 $c_n=(-1)^n\frac{1}{(n+3)\lg(n+3)}, x_0=-2.$

28.22 $c_n=(-1)^n\frac{n^3+3n^2+2}{2^n\cdot(n^4+8)}, x_0=5.$

28.23 $c_n=(-1)^n\frac{2^n\cdot\sqrt[3]{n+7}}{5^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n^4+6}}, x_0=-3.$

28.24 $c_n=(-1)^n\frac{5^n\sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^9+2}}, x_0=4.$

28.25 $c_n=(-1)^n\frac{6^{n+5}\sqrt{n}}{n+3}, x_0=-4.$

28.26 $c_n=(-1)^n\frac{1}{4^n(n+3)\ln(n+3)}, x_0=3.$

28.27 $c_n=(-1)^n\frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln(n+3)}}, x_0=-5.$

28.28 $c_n=(-1)^n\frac{3^n\sqrt{n+1}}{\sqrt[5]{n^6+1}}, x_0=2.$

28.29 $c_n=(-1)^n\frac{4^{n-1}}{5^n(\sqrt{n+1}+3)}, x_0=-6.$

28.30 $c_n=(-1)^n\frac{1}{(3n+8)\lg(3n+8)}, x_0=1.$

29. Используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции, вычислить указанную величину с заданной степенью точности ε.

29.1 $\sqrt[5]{34}, \quad \varepsilon=0,001.$

29.2 $\mathrm{sh}1, \quad \varepsilon=0,001.$

29.3 $\ln 1,3, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.4 $\sqrt[3]{e}, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.5 $\mathrm{arctg}0,2, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.6 $\sqrt[5]{245}, \quad \varepsilon=0,001.$

29.7 $\sin 58^0, \quad \varepsilon=0,001.$

29.8 $\lg 3, \quad \varepsilon=0,001.$

29.9 $\sqrt{84}, \quad \varepsilon=0,001.$

29.10 $\cos 18^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.11 $\ln 3, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.12 $\mathrm{arctg}0,5, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.13 $\cos 28^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.14 $\sin 18^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.15 $\sqrt[3]{29}, \quad \varepsilon=0,001.$

29.16 $\sin 91^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.17 $\sin 88^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.18 $\sqrt{98}, \quad \varepsilon=0,001.$

29.19 $\cos 2^0, \quad \varepsilon=0,0001.$

29.20 $\lg 9, \quad \varepsilon=0,001.$

29.21 $\pi, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

29.22 $\cos 57^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

29.23 $\sqrt{e}, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

29.24 $\ln 6, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

29.25 $\lg 2, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

29.26 $\sqrt[7]{15}, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

29.27 $\operatorname{arc}tg\dfrac{2}{3}, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

29.28 $\sqrt[6]{67}, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

29.29 $\operatorname{ch}1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

29.30 $\ln 1{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

30. Вычислить определённый интеграл с точностью 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

30.1 $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2}\,dx.$

30.2 $\int\limits_0^{0,2} \sin 4x^2\,dx.$

30.3 $\int\limits_0^{0,3} \cos 9x^2\,dx.$

30.4 $\int\limits_0^{0,4} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

30.5 $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)}{x}\,dx.$

30.6 $\int\limits_0^{0,6} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\,dx.$

30.7 $\int\limits_0^{0,7} \dfrac{e^{-3x}-1}{x}\,dx.$

30.8 $\int\limits_0^{0,8} \dfrac{x-\sin x}{x}\,dx.$

30.9 $\int\limits_0^{0,9} \dfrac{1-\cos x}{x}\,dx.$

30.10 $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

30.11 $\int\limits_0^{0,1} \ln\left(1+x^2\right)dx.$

30.12 $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}\,dx.$

30.13 $\int\limits_0^{0,3} e^{-3x^2}\,dx.$

30.14 $\int\limits_0^{0,4} \sin 16x^2\,dx.$

30.15 $\int\limits_0^{0,5} \cos 25x^2\,dx.$

30.16 $\int\limits_0^{0,6} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$

30.17 $\int\limits_0^{0,6} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{x}\,dx.$

30.18 $\int\limits_0^{0,7} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

30.19 $\int\limits_0^{0,8} \dfrac{2-2e^{-5x}}{x}\,dx.$

30.20 $\int\limits_0^{0,9} \dfrac{\sin 2x}{x}\,dx.$

30.21 $\int\limits_0^{1} \dfrac{3-3\cos x}{x}\,dx.$

30.22 $\int\limits_0^{0,9} e^{-2x^2}\,dx.$

30.23 $\int\limits_0^{0,8} \sin 36x^2\,dx.$

30.24 $\int\limits_0^{0,7} \cos 49x^2\,dx.$

30.25 $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^3}\,dx.$

30.26 $\int\limits_0^{0,16} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$

30.27 $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[3]{27-x^3}\,dx.$

30.28 $\int\limits_0^{0,7} \dfrac{3e^{-5x}-3}{x}\,dx.$

30.29 $\int\limits_0^{0,9} \dfrac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

30.30 $\int\limits_0^{1} \dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx.$

31. Записать четыре первых члена, отличных от нуля, разложения в степенной ряд, решения дифференциального уравнения первого порядка.

31.1 $y' - \cos y - y\cos x = 0,\ y(0) = 0..$

31.2 $y' - e^x - yx = 0,\ y(0) = -1.$

31.3 $y' - y^2 - x^2 = 0,\ y(0) = 1.$

31.4 $y' - x^2y^2 - y\cos x = 0,\ y(0) = 2.$

31.5 $y' - 2\sin x - yx - y = 0,\ y(0) = 1.$

31.6 $y' - e^{2x} - 2y^2x = 0,\ y(0) = 1.$

31.7 $y' - xe^x - 2y^2 = 0,\ y(0) = 2.$

31.8 $y' - e^y - yx = 0,\ y(0) = 0.$

31.9 $y' - e^{\sin x} - y = 0,\ y(0) = 0.$

31.10 $y' - x^2 - y^2 - yx = 0,\ y(0) = 1.$

31.11 $y' - x^2y^2 - 1 = 0,\ y(0) = 3.$

31.12 $y' - e^y - y^2 = 0,\ y(0) = 0.$

31.13 $y' - e^x - 2yx = 0,\ y(0) = 4.$

31.14 $y' - 2y^2 - ye^x = 0,\ y(0) = 3.$

31.15 $y' - 2y^2 - 2x^2 = 0,\ y(0) = 2.$

31.16 $y' - 2y^2 - 2x^2 = 0,\ y(0) = 2.$

31.17 $y' - y^2 - x^2 - x = 0,\ y(0) = 5.$

31.18 $y' - e^x - 2x - 4y^2 = 0,\ y(0) = -2.$

31.19 $y' - y^2 - 2xy = 0,\ y(0) = 3.$

31.20 $y' - x^2 - y = 0,\ y(0) = -4.$

31.21 $y' - y^2 - x\sin x = 0,\ y(0) = -1.$

31.22 $y' - y^2 - x^2 - xy = 0,\ y(0) = -4.$

31.23 $y' - y^2 - 4x^2 = 0,\ y(0) = 2.$

31.24 $y' - 4y^2 - 6x^2 = 0,\ y(0) = 2.$

31.25 $y' - \cos y - x\cos x = 0,\ y(0) = 0.$

31.26 $y' - e^y - x^2 = 0,\ y(0) = 0.$

31.27 $y' - 2\cos x - yx - y = 0,\ y(0) = -1.$

31.28 $y' - x^2 - 2y = 0,\ y(0) = 3.$

31.29 $y' - e^{\sin x} - 2y = 0,\ y(0) = 1.$

31.30 $y' - e^y - e^x = 0,\ y(0) = 0.$

32. Найти разложение в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

32.1 $f(x) = \begin{cases} \pi - 2x & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ 2\pi & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6} & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.3 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.4 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{7} - \dfrac{2x}{7} & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{2\pi}{7} & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.5 $f(x) = \begin{cases} 2\pi - 4x & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ 4\pi & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.6 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{5} & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{\pi}{5} & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.7 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{7} & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{2x}{7} + \dfrac{\pi}{7} & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.8 $f(x) = \begin{cases} 8\pi - 16x & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ 16\pi & \text{при } \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

32.9 $f(x)=\begin{cases}5\pi-10x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 10\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.10 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.11 $f(x)=\begin{cases}\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ x+\dfrac{\pi}{2} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.12 $f(x)=\begin{cases}3\pi-6x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 6\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.13 $f(x)=\begin{cases}7\pi-14x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 14\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.14 $f(x)=\begin{cases}4\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 4x+2\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.15 $f(x)=\begin{cases}16\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 16x+8\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.16 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.17 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{2x}{5} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{2\pi}{5} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.18 $f(x)=\begin{cases}12\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 12x+6\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.19 $f(x)=\begin{cases}8\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 8x+4\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.20 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.21 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{3} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{3} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.22 $f(x)=\begin{cases}10\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 10x+5\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.23 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{\pi}{3} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.24 $f(x)=\begin{cases}4\pi-8x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 8\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.25 $f(x)=\begin{cases}6\pi-12x & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 12\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.26 $f(x)=\begin{cases}14\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 14x+7\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.27 $f(x)=\begin{cases}6\pi & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 6x+3\pi & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.28 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2x}{3} & \text{при } -\pi\le x<0,\\ \dfrac{2\pi}{3} & \text{при } \ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

32.29 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{3} & \text{при } -\pi \le x<0,\\ \dfrac{\pi}{3} & \text{при } 0\le x\le \pi.\end{cases}$ 32.30 $f(x)=\begin{cases}2\pi & \text{при } -\pi \le x<0,\\ 2x+\pi & \text{при } 0\le x\le \pi.\end{cases}$

33. Найти разложение в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$ на указанном интервале.

33.1 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -6\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } 0\le x\le 6,\end{cases}$ $-6\le x\le 6,\ l=6.$

33.2 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -12\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } 0\le x\le 12,\end{cases}$ $-12\le x\le 12,\ l=12.$

33.3 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } -20\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } 0\le x\le 20,\end{cases}$ $-20\le x\le 20,\ l=20.$

33.4 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } -30\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } 0\le x\le 30,\end{cases}$ $-30\le x\le 30,\ l=30.$

33.5 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } -42\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } 0\le x\le 42,\end{cases}$ $-42\le x\le 42,\ l=42.$

33.6 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } -56\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } 0\le x\le 56,\end{cases}$ $-56\le x\le 56,\ l=56.$

33.7 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } -72\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } 0\le x\le 72,\end{cases}$ $-72\le x\le 72,\ l=72.$

33.8 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } -90\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{10} & \text{при } \ \ 0\le x\le 90,\end{cases}$ $-90\le x\le 90,\ l=90.$

33.9 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -10\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } \ \ 0\le x\le 10,\end{cases}$ $-10\le x\le 10,\ l=10.$

33.10 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -21\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } \ \ 0\le x\le 21,\end{cases}$ $-21\le x\le 21,\ l=21.$

33.11 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } -36\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } \ \ 0\le x\le 36,\end{cases}$ $-36\le x\le 36,\ l=36.$

33.12 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } -35\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } \ \ 0\le x\le 35,\end{cases}$ $-35\le x\le 35,\ l=35.$

33.13 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -14\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } \ \ 0\le x\le 14,\end{cases}$ $-14\le x\le 14,\ l=14.$

33.14 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -15\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } \ \ 0\le x\le 15,\end{cases}$ $-15\le x\le 15,\ l=15.$

33.15 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } -45\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } \ \ 0\le x\le 45,\end{cases}$ $-45\le x\le 45,\ l=45.$

33.16 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } -24\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } \ \ 0\le x\le 24,\end{cases}$ $-24\le x\le 24,\ l=24.$

33.17 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } -18\le x<0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } \ 0\le x\le 18, \end{cases}$ $-18\le x\le 18,\ l=18.$

33.18 $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -30\le x<0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{10} & \text{при } \ 0\le x\le 30, \end{cases}$ $-30\le x\le 30,\ l=30.$

33.19 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -24\le x<0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } \ 0\le x\le 24, \end{cases}$ $-24\le x\le 24,\ l=24.$

33.20 $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -8\le x<0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } \ 0\le x\le 8, \end{cases}$ $-8\le x\le 8,\ l=8.$

33.21 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -12\le x<0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } \ 0\le x\le 12, \end{cases}$ $-12\le x\le 12,\ l=12.$

33.22 $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{3} & \text{при } -27\le x<0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } \ 0\le x\le 27, \end{cases}$ $-27\le x\le 27,\ l=27.$

33.23 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } -18\le x<0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{9} & \text{при } \ 0\le x\le 18, \end{cases}$ $-18\le x\le 18,\ l=18.$

33.24 $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -16\le x<0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } \ 0\le x\le 16, \end{cases}$ $-16\le x\le 16,\ l=16.$

33.25 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } -28\le x<0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{7} & \text{при } \ 0\le x\le 28, \end{cases}$ $-28\le x\le 28,\ l=28.$

33.26 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{5} & \text{при } -40\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{8} & \text{при } \ \ 0\le x\le 40,\end{cases}$ $-40\le x\le 40,\ l=40.$

33.27 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } -24\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{12} & \text{при } \ \ 0\le x\le 24,\end{cases}$ $-24\le x\le 24,\ l=24.$

33.28 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } -72\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } \ \ 0\le x\le 72,\end{cases}$ $-72\le x\le 72,\ l=72.$

33.29 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{4} & \text{при } -48\le x<0,\\ \cos\dfrac{\pi x}{24} & \text{при } \ \ 0\le x\le 48,\end{cases}$ $-48\le x\le 48,\ l=48.$

33.30 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } -40\le x<0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{10} & \text{при } \ \ 0\le x\le 40,\end{cases}$ $-40\le x\le 40,\ l=40.$

34. Используя разложение в ряд Фурье по синусам и косинусам кратных дуг функции $f(x)$, заданную на интервале $[0;\pi]$, доопределив её предварительно нечётным и чётным образом с периодом $T=2\pi$, найти сумму указанного ряда.

34.1 $f(x)=10^{-x},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^{\pi}\cdot(-1)^{n-1}+1}{(2n-1)^2+\ln^2 10}\cdot\dfrac{2n-1}{10^{\pi}}.$

34.2 $f(x)=x^2+2x+1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}.$

34.3 $f(x)=\operatorname{sh}\dfrac{x}{5},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{ch\frac{x}{5}\cdot(-1)^{n-1}+1}{25n^2+1}.$

34.4 $f(x)=4^{\frac{x}{3}},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{\frac{\pi}{3}}-(-1)^n}{9n^2+\ln^2 4}.$

34.5 $f(x)=x^2-10x+25,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(25(2n-1)^2-2\right)\cdot(-1)^{n-1}-2+(2n-1)^2\cdot(5-\pi)^2}{\left(2n-1\right)^3}.$

34.6 $f(x)=e^{x},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}+(-1)^{n+1}}{1+n^{2}}.$

34.7 $f(x)=5^{-x},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-\pi}+(-1)^{n+1}}{n^{2}+\ln^{2}5}.$

34.8 $f(x)=x^{2}+1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)^{2}}.$

34.9 $f(x)=4x^{2}-4x+1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((2n-1)^{2}-8\right)\cdot(-1)^{n-1}-8+(3-4n)^{2}}{(2n-1)^{3}}.$

34.10 $f(x)=\operatorname{ch}x,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\pi+(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2}+1}\cdot(2n-1).$

34.11 $f(x)=x^{2}-2\pi x+\pi^{2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\pi^{2}(2n-1)^{2}+2\right)+(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{3}}.$

34.12 $f(x)=6^{\frac{x}{4}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}6^{\frac{\pi}{4}}-1}{16n^{2}+\ln^{2}6}.$

34.13 $f(x)=x^{2}-4x+4,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}.$

34.14 $f(x)=\operatorname{ch}4x,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}4\pi+(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2}+16}\cdot(2n-1).$

34.15 $f(x)=x^{2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}.$

34.16 $f(x)=2^{x},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}2^{\pi}-1}{n^{2}+\ln^{2}2}.$

34.17 $f(x)=e^{-x},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\pi}-(-1)^{n}}{4n^{2}-4n+2}\cdot(2n-1).$

34.18 $f(x)=x^{2}-2x+1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}.$

34.19 $f(x)=3^{-\frac{x}{2}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 3^{\frac{\pi}{2}}-1}{4n^{2}+\ln^{2}3}.$

34.20 $f(x)=\operatorname{sh}2x,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}2\pi\cdot(-1)^{n-1}+1}{n^{2}+4}.$

34.21 $f(x)=e^{2x},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi}-(-1)^{n}}{4n^{2}-4n+5}\cdot(2n-1).$

34.22 $f(x) = \mathrm{sh}3x,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}3\pi \cdot (-1)^{n+1} + 1}{n^2 + 9}.$

34.23 $f(x) = e^{4x},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{4\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 32} \cdot \left(2n - 1\right).$

34.24 $f(x) = e^{-\frac{x}{4}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}(-1)^n - 1}{16n^2 + 1}.$

34.25 $f(x) = e^{-3x},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 10} \cdot \left(2n - 1\right).$

34.26 $f(x) = 7^{-\frac{x}{7}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7^{-\frac{\pi}{7}} - 1}{49n^2 + \ln^2 7}.$

34.27 $f(x) = e^{-\frac{2x}{3}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi}{3}} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{9n^2 + 4}.$

34.28 $f(x) = \mathrm{ch}\frac{x}{\pi},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1 + n^2\pi^2}.$

34.29 $f(x) = e^{\frac{4x}{3}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{4\pi}{3}} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{9n^2 + 16}.$

34.30 $f(x) = x,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 4n + 1}.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + x\right)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + x\right)}{x} = \log_a e.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \to +0} x^\alpha \ln x = 1\left(\alpha > 0\right).$$

Приложение 2. Производные основных элементарных функций и правила дифференцирования функций одной переменной

$C' = 0.$ $\qquad$ $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1},\ n \neq 0.$

$\left(a^x\right)' = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1;\ \left(e^x\right)' = e^x.$ $\qquad$ $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1;\ \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}.$

$\left(\sin x\right)' = \cos x.$ $\qquad$ $\left(\cos x\right)' = -\sin x.$

$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $\qquad$ $\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z.$

$\left(\arcsin x\right)' = -\left(\arccos x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ |x| < 1.$ $\qquad$ $\left(\mathrm{arctg}x\right)' = -\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

$\left(\mathrm{sh}x\right)' = \mathrm{ch}x.$ $\qquad$ $\left(\mathrm{ch}x\right)' = \mathrm{sh}x.$

$\left(\mathrm{th}x\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$ $\qquad$ $\left(\mathrm{cth}\ x\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x},\ x \neq 0.$

Правила дифференцирования функций одной переменной

$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'.$

$\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ v \neq 0.$

Приложение 3. Интегралы элементарных функций и основные правила интегрирования функций одной переменной

$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0.$

$\displaystyle\int a^x dx = a^x + C,\ a > 0,\ a \neq 1;\quad \int e^x dx = e^x + C.$

$\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$ $\qquad$ $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}x + C,\ x \neq \pi n,\ n \in Z.$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C,\ x \neq \pi n,\ n \in Z.$

$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C,\ a \neq 0.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, |x| > |a|.$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C. \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C. \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, x \neq 0.$$

Правила интегрирования функций одной переменной

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \qquad \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, k \neq 0.$$

$$\int \left(\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot \varphi(x)\right)dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int \varphi(x)dx, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла:
$\int udv = uv - \int vdu.$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла:
$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Приложение 4. Свойства преобразования Лапласа и некоторые предельные соотношения

Преобразование Лапласа

Прямое преобразование Лапласа (изображение)	$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t}\, dt$
Обратное преобразование Лапласа (оригинал)	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \cdot e^{p \cdot t}\, dt$

Свойства преобразования Лапласа

$(f(t) \mathrel{\dot{=}} F(p),\ \varphi(t) \mathrel{\dot{=}} \Phi(p))$

Свойство однородности	$\alpha \cdot f(t) \mathrel{\dot{=}} \alpha \cdot F(p)$
Свойство аддитивности	$f(t) + \varphi(t) \mathrel{\dot{=}} F(p) + \Phi(p)$
Свойство подобия	$f(\alpha t) \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$

Теорема запаздывания оригинала	$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p),\ \tau>0$
Теорема упреждения оригинала	$f(t+\tau) \risingdotseq e^{p\tau}\left[F(p)-\int\limits_0^{\tau} f(t)e^{-pt}dt\right],\ \tau>0$
Теорема смещения изображения	$e^{\lambda t}\cdot f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$
Дифференцирование оригинала	а) $f'(t) \risingdotseq p\cdot F(p)-f(+0)$, б) $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(+0)-$ $-p^{n-2}\cdot f'(+0)-\ldots-p\cdot f^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0)$
Дифференцирование изображения	а) $-t\cdot f(t) \risingdotseq F'(p)$, б) $(-t)^n\cdot f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$
Интегрирование оригинала	$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$
Интегрирование изображения	$\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(z)\,dz$
Изображение свертки оригиналов (умножение изображений)	$f(t)*\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F(p)\cdot\Phi(p)$
Интеграл Дюамеля	$\dfrac{d}{dt}\big(f(t)*\varphi(t)\big)=\dfrac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau\right) \risingdotseq pF(p)\Phi(p)$
Формула Дюамеля	$f(t)\cdot\varphi(+0)+\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)$

Предельные соотношения

$$\lim_{p\to\infty} pF(p)=f(+0),\ \lim_{p\to 0} pF(p)=f(\infty)$$

Оригиналы и их изображения

Оригинал	Изображение
$\eta(t)=1(t)=\begin{cases}0, \text{при } t<0;\\ 1, \text{при } t>0\end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Приложение 5. Интегралы от функций нескольких переменных

Приложения двойного интеграла

Площадь плоской фигуры: $S=\iint\limits_G dxdy.$

Объём цилиндроида: $V=\iint\limits_G f\left(x;y\right)dxdy.$

Площадь поверхности: $S=\iint\limits_G \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right)^2}\,dxdy.$

Масса плоской пластины: $m=\iint\limits_G \rho(x;y)dxdy$, где $\rho(x;y)$ – плотность.

Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x=\iint\limits_G y\rho(x;y)dxdy,\quad M_y=\iint\limits_G x\rho(x;y)dxdy.$$

Координаты центра масс пластины: $x_c=\dfrac{M_y}{m},\ y_c=\dfrac{M_x}{m}.$

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x=\iint\limits_G y^2\rho(x;y)dxdy,\quad I_y=\iint\limits_G x^2\rho(x;y)dxdy,\ I_0=\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)\rho(x;y)dxdy.$$

Приложения тройного интеграла

Объём тела: $V=\iiint\limits_\Omega f\left(x;y;z\right)dxdydz.$

Масса тела: $m=\iiint\limits_\Omega \rho(x;y;z)dxdydz$, где $\rho(x;y;z)$ – плотность.

Координаты центра масс тела: $x_c=\dfrac{1}{m}\iiint\limits_\Omega x\rho(x;y;z)dxdydz,$

$$y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega y\rho(x;y;z)dxdydz,\ z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega z\rho(x;y;z)dxdydz.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат: $I_{xy}=\iiint\limits_\Omega z^2\rho(x;y;z)dxdydz,$

$$I_{yz}=\iiint\limits_\Omega x^2\rho(x;y;z)dxdydz,\ I_{xz}=\iiint\limits_\Omega y^2\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_x = \iiint_\Omega \left(y^2 + z^2 \right) \rho(x;y;z) dxdydz, \quad I_y = \iiint_\Omega \left(x^2 + z^2 \right) \rho(x;y;z) dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 \right) \rho(x;y;z) dxdydz, I_0 = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \rho(x;y;z) dxdydz.$$

Приложения криволинейных и поверхностных интегралов

Длина кривой: $l = \int_r dl.$

Масса кривой: $m = \int_r \rho(x;y;z) dl.$

Координаты центра масс дуги с плотностью $\rho(x;y;z)$:

$$x_c = \frac{1}{m} \int_r x \rho(x;y;z) dl, \; y_c = \frac{1}{m} \int_r y \rho(x;y;z) dl, \; z_c = \frac{1}{m} \int_r z \rho(x;y;z) dl.$$

Работа силы $\vec{F} = \left(P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z) \right)$ вдоль дуги r:

$$A = \int_r P(x;y;z) dx + Q(x;y;z) dy + R(x;y;z) dz.$$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}(x;y;z)$ вдоль замкнутого контура r:

$$Ц = \oint_r \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}.$$

Поток векторного поля $\vec{a}(x;y;z)$ через поверхность $\sum$ в направлении нормали $\overrightarrow{n^0}\left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma \right)$: $П = \iint_\Sigma \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} \right) d\sigma.$

Теорема Стокса: $\oint_r \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_\Sigma \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} \right) d\sigma.$

Теорема Остроградского – Гаусса: $\iint_\Sigma \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} \right) d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{a} \, dxdydz.$

Приложение 6. Функциональные ряды

Разложения основных функций в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad x \in R.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad x \in R.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad x \in R.$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad x \in R.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad x \in R.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad x \in (-1;1].$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \quad x \in (-1;1).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad x \in (-1;1).$$

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad x \in (-1;1).$$

Функциональный ряд Фурье

Для периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 2l$ на интервале $(-l;l)$ ряд имеет вид: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, где коэффициенты ряда определяются по формулам:

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн. : Выш. шк. 1984. – Ч. 3 – 5.

2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988 . – 432 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985 . – Т. 2. – 456 с.

4. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1980. – 336 с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1990. – Ч. 2 – 3.

6. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.

СОДЕРЖАНИЕ