Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема4. «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

4.1 Равномерное распределение.

Распределение вероятности, называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, функция плотности распределения сохраняет постоянное значение.

Найдем плотность равномерного распределения *f(x)*, считая что все возможные значения случайной величины заключены в интервале $[a,b],$

на котором функция *f(x)* сохраняет сохраняет постоянное значение, т.е. *f(x)=C.*

Найдем постоянную C из свойств функции распределения

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Или

$$\int_a^b C dx = 1,$$

$$Cx\Big|_a^b = 1, \quad C(b-a) = 1.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{b-a}.$$

Таким образом непрерывная случайная величина *X* называется распределенной по *равномерному закону* на интервале $[a,b]$

если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ при \ \ x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, \ при \quad a \le x \le b; \\ 0, \ при \ x > b. \end{cases} \quad (4.1)$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины *X* имеет вид (см. пример из вопроса 3.4)

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; при \;\; x<0; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \; при \quad a\le x\le b; \\ 0, \; при \; x>b. \end{cases} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Числовые характеристики для равномерного распределения:

а) Учитывая выражение (3.9)

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx,$$

получим

$$M(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

б) Учитывая выражение (3.13)

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2,$$

получим

$$D(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left[\frac{b+a}{2}\right]^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=$$

$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом

$$M(X)=\frac{a+b}{2} \qquad (4.3)$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (4.4)$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (4.5)$$

Вероятность того, что случайная величина, равномерно распределенная в интервале (α,β), **принадлежащем** $[a,b]$, **выражается формулой**

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a} \qquad (4.6)$$

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина *X* принимает значения в конечном промежутке $[a,b]$.

Все значения из этого промежутка возможны в одинаковой степени, причем ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими.

Например, время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого; ошибка отсчета показаний стрелочного прибора распределена равномерно на отрезке, равном цене деления.

Пример 1.

Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут?

Решение.

Пусть *X* — время начала работы передатчика в часах.

Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, следует считать, что *X* — случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [12; 14].

Тогда ее плотность распределения примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ при\ x < 12; \\ \dfrac{1}{14-12} = 0{,}5\ ,\ при\ 12 \le x \le 14; \\ 0,\ при\ x > 14. \end{cases}$$

Искомую вероятность находим по формуле (4.6

$$P(12 < X < 12{,}25) = \int\limits_{12}^{12.25} 0{,}5dx = 0{,}125$$

При этом учтено, что 15 мин.=0,25 ч.

Пример 2.

Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 ампера. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,03 ампера. Найти математическое ожидание, дисперсию ошибки округления отсчета и функцию *f(x)*.

Решение.

Ошибку округления отсчета можно считать распределенной равномерно на *[0; 0,1], т.е.* $a=0$, $b=0,1$.

Тогда функция распределения *f(x).* будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ npu\ x<0; \\ \dfrac{1}{0,1-0}=10,\ \ npu\ 0\le x\le 0,1; \\ 0,\ npu\ x>0,1. \end{cases}$$

Найдем

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+0,1}{2}=\frac{0,1}{2}=0,05;$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(0.1-0)^2}{12}=\frac{0,01}{12}=0,0008.$$

$$P(0,03 < X < 0,07) =$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{0,07 - 0,03}{0,1 - 0} = \frac{0,04}{0,1} = 0,004.$$

4.2 . Нормальное распределение

Нормальным, называют распределение вероятности непрерывной случайной величины, которая описывается плотностью

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.7)}$$

Нормальное распределение (4.7) определяется двумя параметрами: a **и** σ.

Вероятностный смысл этих параметров:

a **-математическое ожидание,**

σ **- среднее квадратическое отклонение нормального распределения.**

Действительно по определению математического ожидания непрерывной случайной величины

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Учитывая (4.7) можно записать

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = z, x = \sigma z + a \\ dx = \sigma dz, \\ x \to \infty, z \to \infty, \\ x \to -\infty, z \to -\infty, \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right) =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx \sqrt{2\pi}\right] =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{e^{\frac{z^2}{2}}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + a = a.$$

Вычислим дисперсию непрерывной случайной величины. Для этого воспользуемся выражением (3.12):

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx,$$

т.к.

$$M(x) = a,$$

$$D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x-a}{\sigma} = z, x = \sigma z + a \\ dx = \sigma dz, \\ x \to \infty, z \to \infty, \\ x \to -\infty, z \to -\infty \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a - a)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$
=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\left[\begin{array}{l} u=z, du=dz, \\ d\upsilon = z e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \\ \upsilon=\int z e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\int e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)=-e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array}\right]=
$$

применим формулу интегрирования по частям

$$
\int_a^b u\,d\upsilon = u\,\upsilon\Big|_a^b-\int_a^b \upsilon\,du
$$

$$
=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(z(-e^{-\frac{z^2}{2}})\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=
$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx \sqrt{2\pi} \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Замечание.

Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами a **и** σ.

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma = 1.$

Плотность нормированного распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (4.8)$$

Эта функция табулирована.

График плотности нормального распределения, называется нормальной кривой или кривой Гаусса.

Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

1.Функция определена на всей числовой оси *X;*

2. При всех значениях *x* принимает положительное значение, т.е. нормальная кривая расположена выше оси *Ox;*

3. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b,$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{xe^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} y =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0.$$

Т.е. мы получили, что

$$y = kx + b, \qquad y = 0,$$

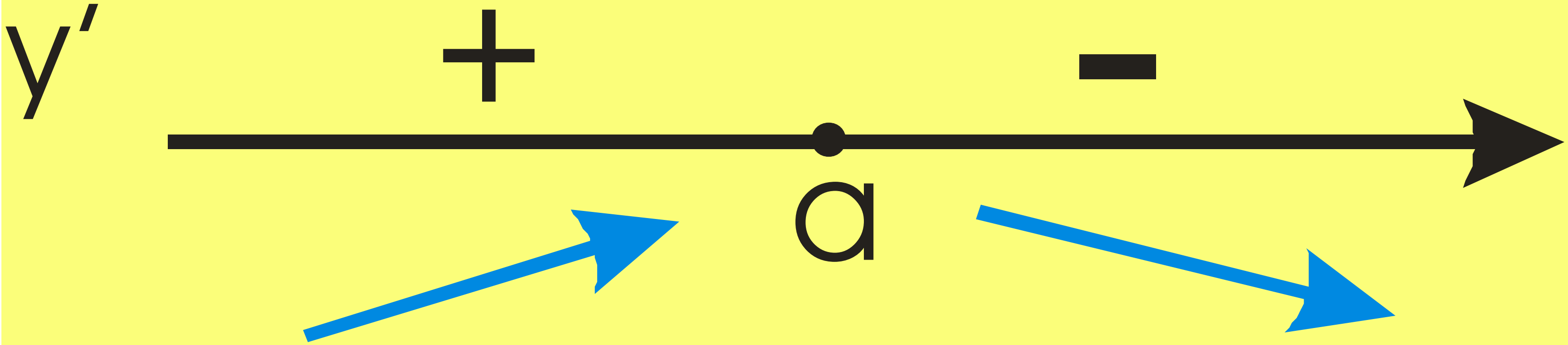
является горизонтальной асимптотой.

4. Вычислим производную и исследуем функцию на экстремум

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} (x-a).$$

Положим $y' = 0.$ **Находим критические точки**

$$x = a.$$



Следовательно при $x = a$

функция имеет максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$

5. Разность $x - a$ **содержится в выражении функции в квадрате, т.е.**

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Поэтому график функции симметричен относительно прямой

$$x = a.$$

6. **Найдем точки перегиба. Вычислим вторую производную**

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} (x-a),$$

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2} \right) (x-a) + e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right),$$

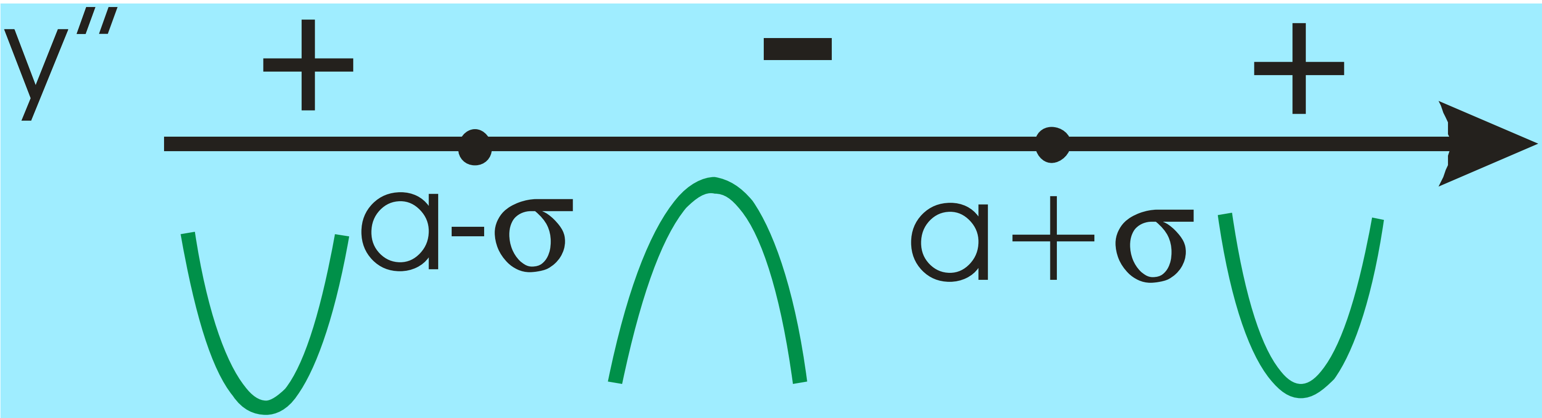
Приравняем вторую производную к нулю

$$1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}=1,\qquad (x-a)^2=\sigma^2,\qquad |x-a|=|\sigma|,$$

$$x-a=\sigma,\qquad -(x-a)=\sigma,$$

$$x=\sigma+a,\qquad x=-\sigma+a.$$



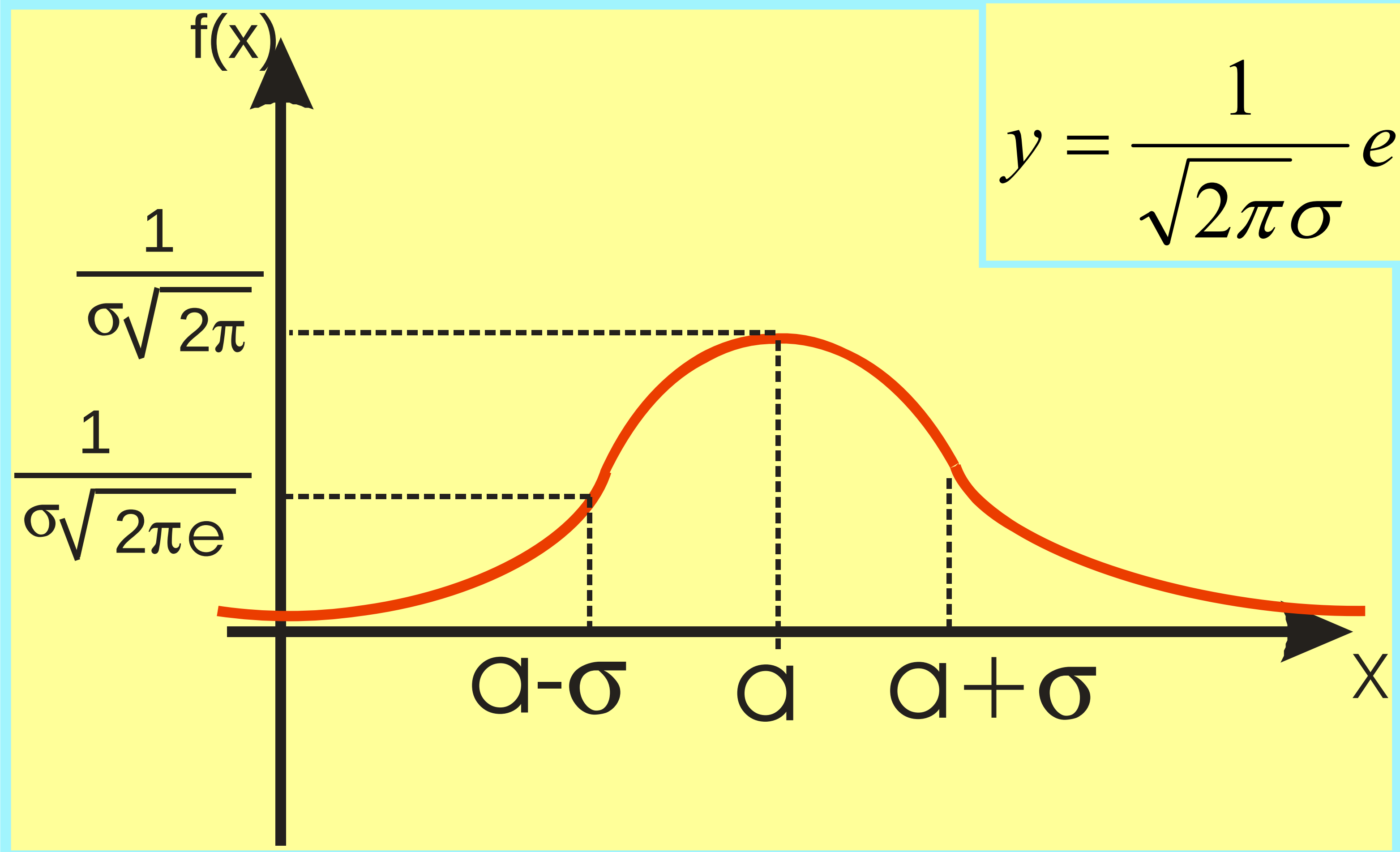
Мы получили, что $x=a+\sigma, x=a-\sigma$

являются точками перегиба.

Вычислим значение функции в этих точках

$$y(a+\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(a+\sigma-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-\sigma^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}},$$

$$y(a+\sigma) = y(a-\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}},$$



$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Выясним как влияют на форму и расположение нормальной кривой значения параметров a **и** σ.

Графики функций $f(x)$ **и** $f(x-a)$ **имеют одинаковую форму.**

График функции $f(x-a)$ **получается из графика функции** $f(x)$, **путем сдвига в положительном направлении оси *x*, если** $a>0$ **и в противоположном направлении, если** $a<0$

Таким образом, изменение величины a **(математическое ожидание) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси x.**

По иному обстоит дело со средним квадратическим отклонением σ.

Максимум функции нормального распределения равен $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

Отсюда следует, что с возрастанием σ, **максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой.**

При убывании σ, **нормальная кривая становится более островершинной и растягивается в положительном направлении оси *Oy*.**

При любых значениях параметров a **и** σ **площадь ограниченная нормальной кривой и осью *Ox* остается равной единице.**

4.3 . Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Известно, что если случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x)$,

то вероятность того, что *x* примет значение, принадлежащее интервалу (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = z,\;\; x=\alpha,\;\; \dfrac{\alpha-a}{\sigma} = z, \\ \qquad\qquad x=\beta,\;\; z = \dfrac{\beta-a}{\sigma}, \\ x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz, \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}\sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}dz + \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}dz\right) =$$

$$=\begin{bmatrix} \Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz, \\ \Phi(-x)=-\Phi(x), \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx, \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz-\int_0^{\frac{\alpha-a}{2}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Таким образом, получили

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (4.9)$$

Пример 1.

Случайная величина *X* распределена по нормальному закону, причем

$$M(X)=10, \qquad D(X)=4.$$

Найти $P(12<X<14)$, $P(8<X<12)$,

$$P(X>12).$$

Решение. **Из условия следует, что** $a=10,$

$\sigma=\sqrt{D(X)}=2.$ **В соответствии с формулой (4.9)**

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

находим

$$P(12 < X < 14) = \Phi(\frac{14-10}{2}) - \Phi(\frac{12-10}{2}) = \Phi(2) - \Phi(1) \approx 0{,}1359$$

$$\Phi(2) = 0{,}4772 \quad \Phi(1) = 0{,}3413$$

$$P(8 < X < 12) = \Phi(\frac{12-10}{2}) - \Phi(\frac{8-10}{2}) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6826$$

$$\Phi(1) = 0{,}3413$$

$$P(12 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(\frac{12-10}{2}) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(1) \approx 0.5 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$$

$$\Phi(1) = 0{,}3413$$

Пример 2. **Случайная величина *X* распределена по нормальному закону, причем** $M(X) = 10.$

Найти $P(0 < X < 10),$ **если известно**

$$P(10 < X < 20) = 0.3$$

Решение.

При нахождении искомой вероятности будем пользоваться формулой (4.9), условием

$a = 10,$ **нечетностью функции Лапласа.**

По условию $P(10 < X < 20) = 0.3,$ **поэтому**

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0 = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3$$

Так как $P(0 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) =$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)$$

и $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3,$ **то** $P(0 < X < 10) = 0{,}3$

4.5 . Вычисление вероятности заданного отклонения. Правило трех сигм.

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X, по модулю меньше заданного положительного числа δ,

т.е. требуется найти вероятность осуществления неравенства

$$|x - a| < \delta$$

Заменим это неравенство равносильным ему двойным

$$-\delta < x - a < \delta,$$

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

$$P(|x - a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta),$$

Применим к правой части выражение (4.9)

$$P(|x - a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (4.10)$$

При $a=0,$ $$P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad (4.11)$$

Если две случайные величины распределены нормалью и $a=0,$

то вероятность принять значение принадлежащее интервалу $(-\delta,\delta)$

больше у той величины, которая имеет меньшее значение $\sigma.$

Преобразуем формулу (4.10).

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (4.10)$$

Пусть $\delta=\sigma t.$

$$P(|x-a|<\sigma t)=2\Phi\left(\frac{\sigma t}{\sigma}\right)=2\Phi(\mathrm{t}).$$

Пусть $t=3$

$$P(|x-a|<3\delta)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного средне квадратичного отклонения, будет равно 0,9973

На практике многие случайные величины распределены нормально. Примеры: ошибки измерений физических величин; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала.

***Пример*.**

Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры *X*.
Считая, что случайная величина *X* распределена нормально, с параметрами

$$a = 10 \quad \text{мм}, \qquad \sigma = 0{,}1 \ \text{мм},$$

найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение.

Воспользуемся формулой (4.9). В данном случае известно $a = 10,$ $\sigma = 0{,}1$

$$2\Phi(\delta/\sigma) = 0{,}9973$$

требуется определить δ **и интервал**

$$(a - \delta, a + \delta)$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta/\sigma = 3.$

Это вытекает из равенства

$$\Phi(\delta/\sigma) = 0{,}9973 / 2 = 0{,}4987.$$

Следовательно, $\delta = 3\sigma = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$

Из неравенства $|X - 10| < 0{,}3$ получаем

$$9{,}7 < X < 10{,}3$$

Значит, искомым является интервал(9,7; 10,3).

4.4 . Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Ассиметрия и эксцесс.

Эмпирическим называют распределение относительно частот, теоретическим, называют распределение вероятностей.

При изучении распределений отличного от нормального возникает необходимость качественно оценить это различие, в связи с этим вводят две новые характеристики: асимметрия и эксцесс.

Для нормального распределения эти характеристики равны нулю, поэтому если для изучаемого распределения они малы, то можно предположить близость этого распределения к нормальному.

Для симметричного распределения (график такого распределения симметричен относительно прямой $x = M(x)$), каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю.

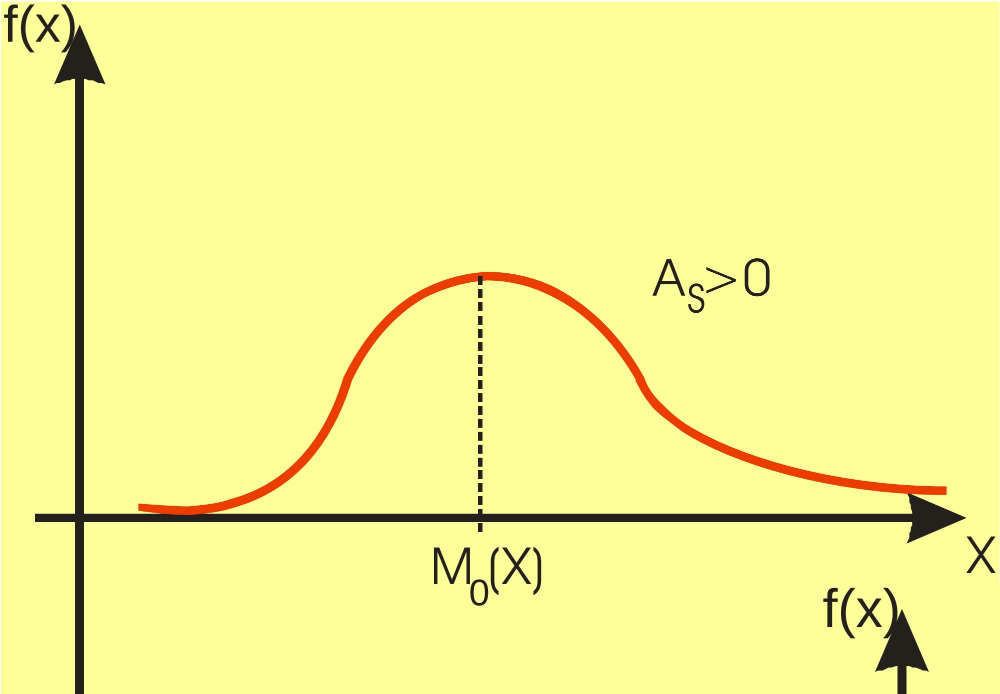
Для несимметричных распределений центральные моменты нечетного порядка отличны от нуля.

Обычно для оценки асимметрии берут центральный момент третьего порядка μ_3.

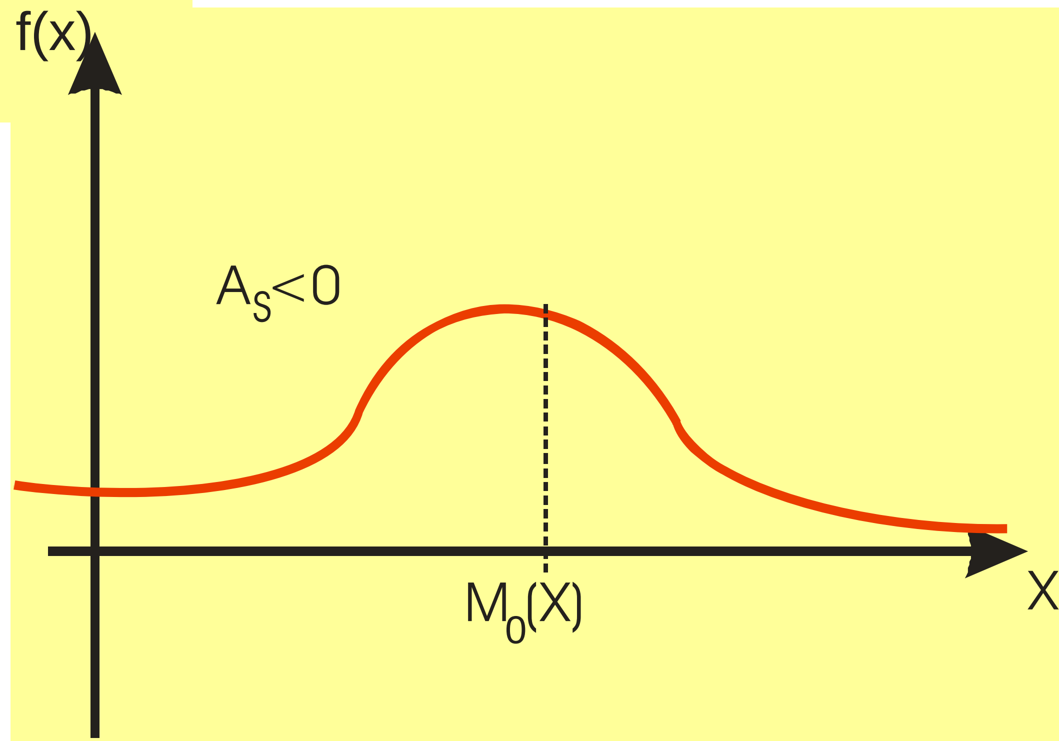
Для того, что бы характеристика была безразмерной величиной в качестве асимметрии берут выражение

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Асимметрия положительна, если длинная часть кривой распределения расположена справа от математического ожидания.



Если длинная часть кривой расположена слева от математического ожидания, то асимметрия отрицательна.



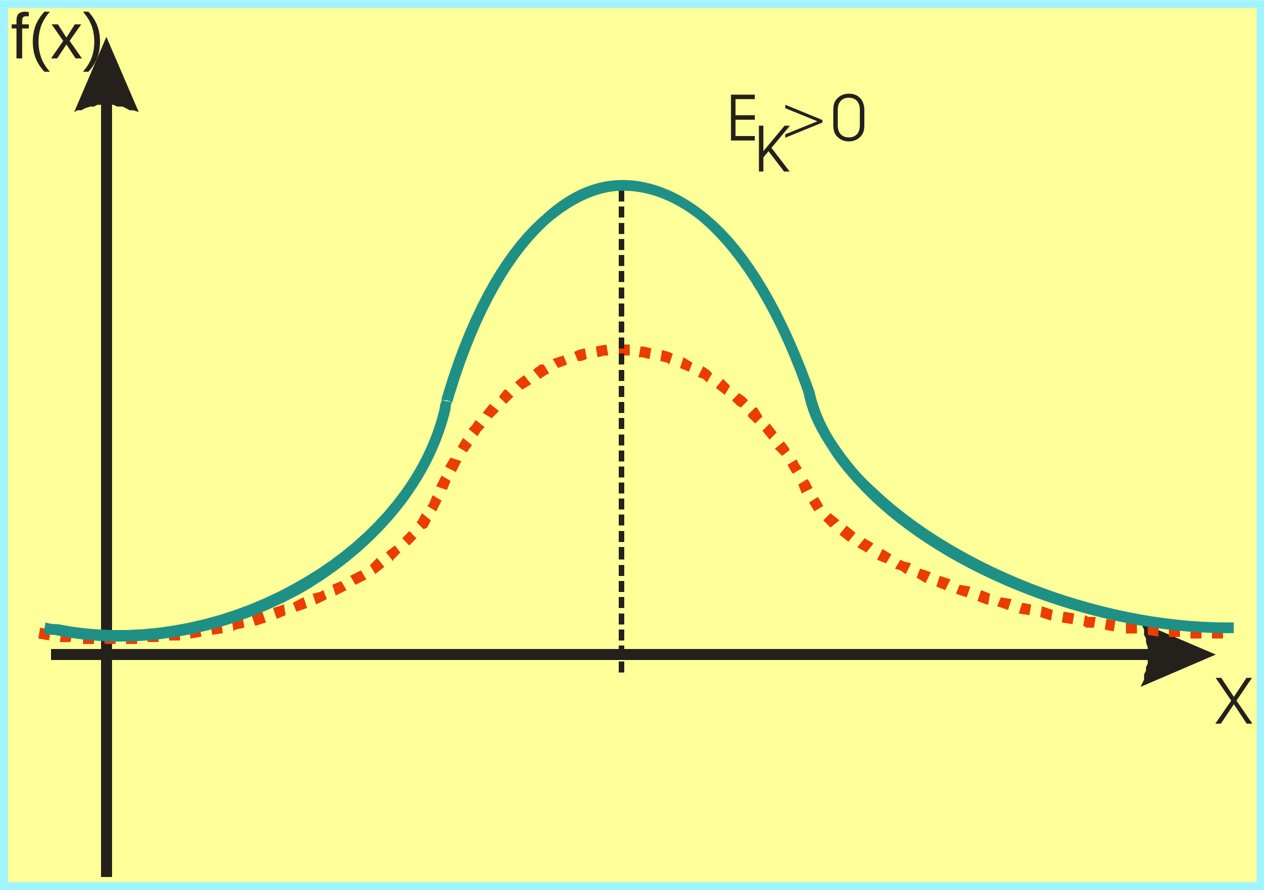
Для оценки «крутости», т.е. большего или меньшего подъема кривой теоретического распределения по сравнению с нормальной кривой, вводят новую величину - эксцесс

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3,$

а поэтому для нормального распределения эксцесс равен 0.

Если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая, если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низкую вершину.



Модой $M_0(X)$ **называют то возможное значение *X* при котором плотность распределения имеет максимум.**

Для нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Первая производная

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}(x-a),$$

равна нулю при *x=a.* Следовательно

$$M_0(X)=a.$$

Медианой $M_e(X)$ **называют то возможное значение *x,* при котором *f(x)* делит площадь попалам, ограниченную кривой распределения.**

Т.к. кривая нормальная, то график *f(x)* симметричен относительно прямой *x=a* и ордината *f(a)* делит площадь пополам

$$M_e(X) = a.$$

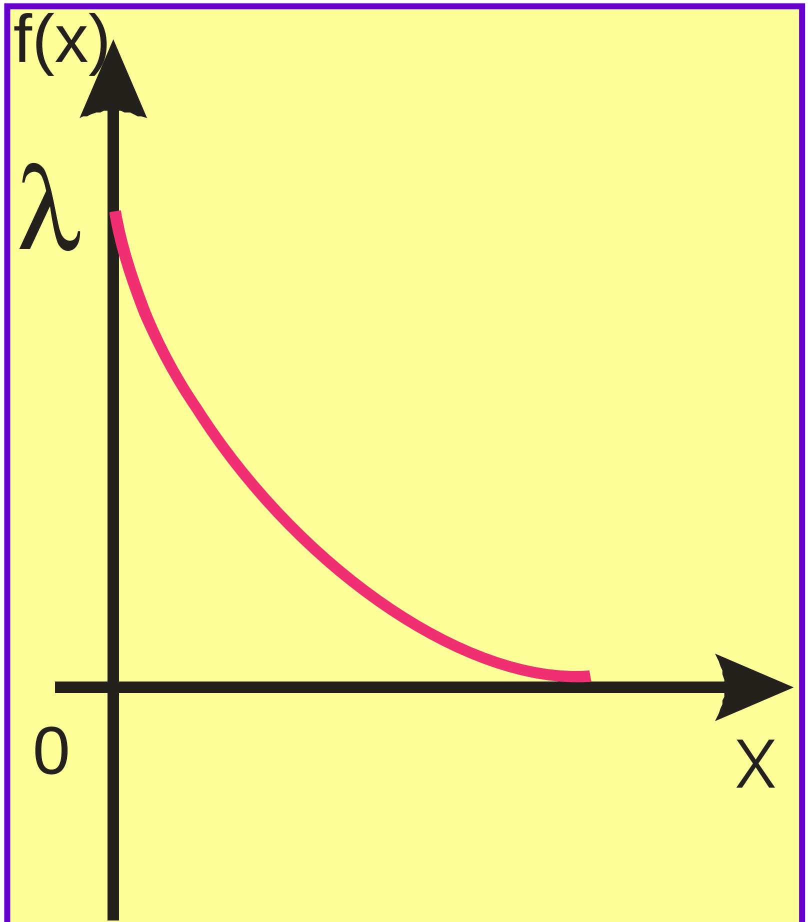
4.6 . Показательное распределение

а) Определение показательного распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которая описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases} \qquad (4.12)$$

где λ **-постоянная положительная величина.**



Показательное распределение определяется одним показателем λ**.**

Найдем функцию распределения показательного закона

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

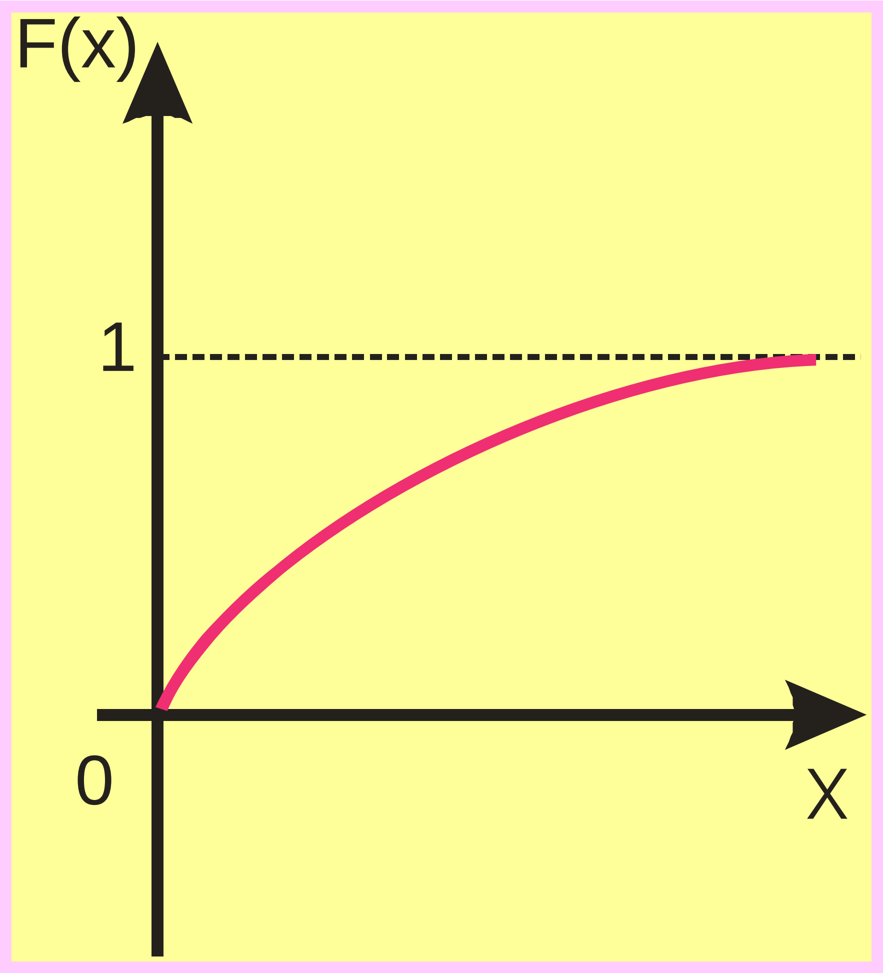
$x < 0,$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = 0,}$$

$x \geq 0,$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) =$$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{x} = -e^{-\lambda x} + e^{0} = 1 - e^{-\lambda x},$$



$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0,\end{cases}$$

Найдем вероятность попадания в интервал (a,b) **непрерывной случайной величины *X*, которая распределена по показательному закону:**

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=[x\geq 0,\quad F(x)=1-e^{-\lambda x}]=$$

$$=1-e^{-\lambda b}-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b},$$

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (4.13)$$

б) Числовые характеристики показательного распределения

Пусть непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону (4.12). Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \lambda \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = \left[\begin{array}{l} x = u, dx = du, \\ d\upsilon = e^{-\lambda x}dx, \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{array} \right] =$$

$$=\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{e^{\lambda x}}\Bigg|_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{\lambda}\cdot 1\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (4.14)$$

Таким образом, математическое ожидание показательного распределения, равно обратной величине параметра λ

Вычислим дисперсию

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2,$$

Учитывая выражение (4.12), т.е. что при

$$x<0, f(x)=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2=\lambda\int_{0}^{\infty}x^2 e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=$$

$$=\begin{bmatrix} x^2 = u, \quad 2x\,dx = du, \\ d\upsilon = e^{-\lambda x}dx, \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} =$$

$$=\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} = 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$=\begin{bmatrix} x = u, \quad dx = du, \\ d\upsilon = e^{-\lambda x}dx \\ \upsilon = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = 2\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{2}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\boxed{D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (4.15)}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}, \quad (4.16)}$$

$$\boxed{M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.17)}$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону:

длительность работы прибора до первого отказа; длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания; продолжительность телефонного разговора; срок службы радиоэлектронной аппаратуры; длина пути молекулы между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами и т.д.

Пример 1.

Случайная величина *X* — время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов?

Решение.

Так как $M(X) = 400$ **, то по формуле (4.17)**

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (4.17)$$

$$\lambda = \frac{1}{400}$$

Искомая вероятность

$$P(X \geq 800) = 1 - P(X < 800) = 1 - F(800) =$$

$$= 1 - (1 - e^{-\frac{800}{400}}) = e^{-2} \approx 0{,}135$$

Пример 2.

Время исполнения заказа на ремонт телеаппаратуры имеет показательный закон распределения со средним временем исполнения в 5 суток. Какова вероятность того, что сданный Вами в мастерскую телевизор починят не ранее чем через 4 суток?

Решение.

Случайная величина *X* – время неисполнения заказа.

Так как по формуле (4.13)

$$P(0 < X < 4) = e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} - e^{-\frac{1}{5}\cdot 4} = 1 - e^{-\frac{4}{5}} \approx 0,55$$

то искомая вероятность

$$P(X > 4) = 1 - P(0 < X < 4) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

Пример 3.

Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 20 мин. Какова вероятность того, что покупатель потратит на покупку не менее 10 и не более 15 мин?

Решение.

Случайная величина *X* – время ожидания в очереди.

Т.к. $M(X) = \frac{1}{3},$ **то по формуле (4.17)**

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (4.17)$$

$$\lambda = 3.$$

По формуле (4.13) $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (4.13)$

$$P\left(\frac{1}{6} < X < \frac{1}{4}\right) = e^{-3\frac{1}{6}} - e^{-3\frac{1}{4}} \approx 0{,}134.$$

4.7. Функция надежности. Показательный закон надежности.

Будем называть *элементом* некоторое устройство независимо от того сложное оно или простое.

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0,$

а по истечению времени *t* происходит отказ в работе.

Обозначим через *T* - непрерывную случайную величину - длительность времени безотказной работы элемента.

Если элемент проработал безотказно время, меньшее *t*, то следовательно, за время длительностью *t* наступит отказ в работе.

Функция распределения $F(t) = P(T < t),$

определяет вероятность отказа за время длительностью *t*.

Тогда вероятность безотказной работы, т.е. вероятность противоположного события можно записать в виде

$$\boxed{R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).}$$

Функцией надежности $R(t)$

называют функцию определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью *t*.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Показательным законом надежности называют функцию надежности определяемую равенством

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}, \quad (4.18)}$$

где λ - интенсивность отказов. Причем

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{t_{cp}} \qquad (4.19)}$$

t_{cp} — среднее время безотказной работы системы.

Пример1.

Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону

$$f(t) = 0.02e^{-0.02t}, t \geq 0, (t - \textit{время}).$$

Найти вероятность того, что элемент проработает без отказа 100 часов.

Решение.

По условию $\lambda = 0.02.$

Воспользовавшись формулой (4.18)

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0.02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}14.$$

Пример 2.

Устройство состоит из двух последовательно соединенных независимо работающих блоков. Зная, что среднее время безотказной работы для первого и второго блоков составляет соответственно 200 ч., 150 ч. найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов.

Решение.

Найдем функции надежности для каждого блока. **Учитывая, что** $t_{cp1} = 200\ ч,$ $t_{cp2} = 150\ ч$ **имеем согласно (4.18) и (4.19)**

$$R_1(t) = e^{-\frac{t}{t_{cp1}}} = e^{-\frac{t}{200}}$$ **и** $$R_2(t) = e^{-\frac{t}{t_{cp2}}} = e^{-\frac{t}{150}}$$

Находим вероятности безотказной работы каждого блока в течение 100 часов. Получаем

$$p_1 = R_1(100) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}607$$

$$p_2 = R_2(100) = e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}513$$

Значит, вероятность работы всего устройства равна

$$p_1 \cdot p_2 = 0{,}607 \cdot 0{,}513 \approx 0{,}311.$$

Пример 3.

Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение

$$F_1(t) = 1 - e^{-0,02t},$$

второго

$$F_2(t) = 1 - e^{-0,05t},$$

t **— время в часах.**

Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Решение.

Пусть A_i **- событие, состоящее в безотказной работе *i*-го элемента в течение 6 часов** $(i = 1, 2)$

Найдем вероятность безотказной работы элементов в течение 6 часов

$$P(A_1) = F_1(6) = 1 - e^{-0,02 \cdot 6} = 1 - e^{-0,12} \approx 0,113$$

$$P(A_2) = F_2(6) = 1 - e^{-0,05 \cdot 6} = 1 - e^{-0,3} \approx 0,259$$

Тогда вероятности отказа в течение 6 часов первого и второго элементов составят

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,113 = 0,887$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,259 = 0,741$$

Поэтому вероятность отказа двух независимо работающих элементов составит по теореме умножения

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}887\cdot 0{,}741 \approx 0{,}657$$

Вероятность безотказной работы двух независимо работающих элементов по теореме умножения

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0{,}113\cdot 0{,}259 \approx 0{,}029$$

Вероятность отказа только одного элемента

$$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = 0{,}113\cdot 0{,}741 + 0{,}887\cdot 0{,}259 \approx 0{,}313.$$

Вероятность отказа хотя бы одного элемента

$$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - P(A_1 A_2) = 1 - 0{,}029 = 0{,}971$$

4.8 Распределение Пуассона.

Пусть нужно найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых *вероятность события очень мала*, событие наступит ровно *k* раз.

Сделаем важное допущение: произведение *np* сохраняет постоянное значение, а именно

$$\boxed{np = \lambda.}$$

Это означает, что среднее число появлений события при различных значениях *n*, остается неизменным.

В этом случае применяют *закон Пуассона*.

Дискретная случайная величина *X* называется распределенной по *закону Пуассона*, если свои возможные значения $0, 1, 2, 3, \ldots$ (счетное множество значений) она принимает с вероятностями

$$P(X = k) = P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad (4.20)$$

где *k*=0, 1, 2, 3… и λ – называют параметром Распределения.

Случайная величина X имеет ряд распределения:

$$P(X=k)=P_n(k)=\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

x	0	1	2	3	…	m	…
$P_n(k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	…

При этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)=1.$$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X)=\lambda \quad (4.21)$$

$$D(X) = \lambda, \quad (4.22)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \quad (4.23)$$

Примеры дискретных случайных величин, распределенных по закону Пуассона: число вызовов на телефонной станции за время *t*; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии и т.д.

При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром

$$\lambda = np.$$

Пример.

Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна $p = 0{,}002.$

Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет более чем на трех веретенах .

Решение. **В соответствии с условием имеем**

$$n = 1000, \quad p = 0{,}002, \quad \lambda = np = 2.$$

Распределение Пуассона приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число испытаний $n = 1000$

велико, а вероятность $p = 0{,}002$

очень мала и $\lambda = np = 2$

— среднее число появлений события в *n* испытаниях.

Пусть *X* — число обрывов нити за 1 минуту.

Тогда

$$P_n(X > 3) = 1 - P_n(X \le 3) =$$
$$= 1 - P_n(0) - P_n(1) - P_n(2) - P_n(3).$$

Применяя формулу (4.20), находим

$$P_n(X > 3) \approx 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!} - e^{-2}\frac{2^2}{2!} - e^{-2}\frac{2^3}{3!} =$$
$$= 0{,}1428$$

Таблица значений для функций

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000