ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ТЕОРИЯ.

Оглавление (по темам)

1. Формула классического определения вероятности

Предположим зафиксирована некоторая совокупность условий, в которых производится опыт.

Производим опыт. Предположим, что все исходы опыта **равновозможные**.

Обозначим буквой ***A*** некотрое **событие**.

Предположим, что n − число **всех** исходов опыта.

m − число исходов, **благоприятствующих** событию A,

то есть число исходов, при которых событие A происходит.

Вероятностью события ***A*** называется число, которое обозначается $P(A)$ и равно

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}} \qquad \textbf{(1)}$$

Формула (1) − **классическая** формула определения вероятности.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Имеется 10 **одинаковых** карточек.

Семь карточек обозначены цифрой « **1** » и три карточки обозначены цифрой « **0** ».

1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Переворачиваем карточки **цифрами вниз**, **перемешиваем**, располагаем в ряд.

Наудачу выбираем одну карточку (то есть случайным образом, любую).

Очевидно, что $n = 10$ − число всех возможных (и **равновозможных**) исходов опыта.

Обозначим буквой ***A*** событие, которое состоит в том, что попадет карточка с **единицей**.

Число исходов, **благоприятствующих** событию ***A***, равно $m = 7$, так как 7 различных карточек обозначены **единицей**.

Вероятностью события ***A*** равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{7}{10}=0,7$.

Пример 2. Выбрасываем игральную кость − кубик, грани которого обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Найти вероятности событий:

A – появилась грань с номером 2; B – выпал четный номер; C – выпал номер кратный числу 3.

Решение. Всех исходов опыта $n = 6$, так как всех различных граней может выпасть 6.

Багоприятствующие исходы:

для события A, $m_A = 1$, так как **одна** грань с № 2;

для события B, $m_B = 3$, так как **три** грани с четным номером: № 2, № 4, № 6;

для события C, $m_C = 2$, так как **две** грани с номером, кратным числу 3: № 3 и № 6.

Искомые вероятности событий равны: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{6} = 0,5$, $P(A) = \frac{m_C}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Замечание. При выбрасывании игральной кости предполагается “**классическое**” выбрасывание, при котором выпадание всех граней с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6 **равновозможны**.

Можно же выбрасывать кубик “неправильно”, например так, что всегда будет выпадать одна и таже грань (если бросать с высоты меньшей, чем длина ребра кубика).

В таком “неправильном” опыте классическая формула вероятности **не работает**.

Пример 3. Имеется 7 шаров из которых 5 белых и 2 черных. Извлекаем 1 шар.
Какова вероятность того, что извлеченный шар черный.

Решение. 7 шаров = 5 белых + 2 черных.

Опыт: извлекаем 1 шар из 7. Всех исходов $n = 7$. Исходы равновозможные.

Событие A – извлечен черный шар. Число благоприятствующих исходов $m = 2$. $P(A) = m/n = 2/7$.

Ответ. 2/7.

Пример 4. Монета имеет две стороны, обозначенные цифрой и гербом.
Выбрасываем один раз монету. Найти вероятность выпадения герба.

Решение. Опыт: выбрасываем монету. Всех исходов $n = 2$. Исходы равновозможные.

Событие A –выпал герб. Число благоприятствующих исходов $m = 1$. $P(A) = m/n = 1 / 2 = 0,5$.

Ответ. 0,5.

Пример 5. Выбрасываем 3 монеты. Какова вероятность того, что выпадет ровно 2 герба.

Решение. Опыт: выбрасываем 3 монеты. Событие A – выпало ровно 2 герба.

Ц Ц Ц	0 гербов
Ц Ц Г	1 герб
Ц Г Ц	1 герб
Ц Г Г	**2 герба**
Г Ц Ц	1 герб
Г Ц Г	**2 герба**
Г Г Ц	**2 герба**
Г Г Г	3 герба

Представим для удобства, что исходы − это тройки символов составленных из Ц и Г. (Ц – цифра, Г – герб)

Исходы равновозможные. Перебираем исходы (см. схему слева).

Возможный исход для 1-й монеты пишем в тройке (*,*,*) на 1-м месте

для 2-й монеты − на 2-м месте

для 3-й монеты − на 3-м месте

$n = 8$, $m = 3$ (тройки с двумя гербами), $P(A) = 3 / 8 = 0,375$. **Ответ**. 0,375.

Пример 6. Задумано 2-значное положительное число. Найти вероятность того, что с первой попытки оно будет угадано.

Решение. Опыт: называем (угадываем) задуманное 2-значное положительное число.

Все исходы − числа 10, 11, 12, …, 98, 99. Число всех исходов $n = 99 - 9 = 90$

(из **99** чисел 1, .. 9, 10, 11, …, 99 **выбросим 9** чисел 1, .. 9)

Событие A – названо задуманное число. $m = 1$, так как задумано **одно** число. $P(A) = 1/90$.

Ответ. 1/90.

Так как всегда $0 \le m \le n$, то из формулы $P(A) = \dfrac{m}{n}$ следует, что всегда $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$ **(2)**.

Событие называется **достоверным**, если оно в результате опыта **обязательно происходит**.

Событие называется **невозможным**, если оно в результате опыта **не может произойти**.

Событие называется **случайным**, если оно в рез. опыта **может произойти и может не произойти**.

Событие A − достоверное	$\Leftrightarrow$	$P(A) = 1$.
Событие A − невозможное	$\Leftrightarrow$	$P(A) = 0$.
Событие A − случайное	$\Leftrightarrow$	$0 < P(A) < 1$.

(3)

Пример 7. Выбрасываем игральную кость. Обозначим события:

A – появилась грань с номером 2; − **случайное** событие

B – появилась грань с номером меньшим, чем 7; − **достоверное** событие

C – появилась грань с номеромбольшим, чем 7. − **невозможное** событие.

2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций подчиняющихся заданным условиям можно составить из данных объектов.

1. **Перестановка** – это множество, составленное из n элементов, в котором **зафиксирован порядок** расположения элементов. Две различные перестановки отличаются друг от друга только **порядком** расположения элементов.

Число всех перестановок равно: $\boxed{P_n = n!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... (n-1) \cdot n$ **(1)**

Пример 1. Имеется 5 карточек обозн цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Располагая эти карточки по-разному будем получать различные перестановки: 12345, 53241, 23154, 12534, … .

Число всех перестановок из 5-ти цифр равно $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5. = 120$.

2. **Размещение** − это **подмножество** заданного конечного множества, в котором **зафиксирован порядок** расположения элементов. Два различных размещения отличаются друг от друга либо **составом** элементов, либо их **порядком**.

Число всех размещений из n по k равно: $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} \quad \text{или} \quad A_n^k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ множителей}}}$ **(2)**

Пример 2. Размещения из 5 карточек с номерами 1, 2, 3, 4, 5 по 3 карточки − это тройки цифр: 123, 132, 145, 542, 415, … . Число всех размещений из 5 по 3 равно:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2}} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60 \quad \text{или} \quad A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60\,.$$

3. **Сочетание** − это **подмножество** заданного конечного множества, в котором **не учитывается порядок** расположения элементов. Два различных сочетания отличаются друг от друга только **составом** элементов. Число всех сочетаний из n по k равно:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}} \qquad \textbf{(3)}$$

Пример 3. Выпишем сочетания из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 по 3: 123, 541, 412 … . Число всех сочетаний из 5 по 3 равно: $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot 2} = 10$ или $C_5^3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$.

Легко проверить, что $C_n^1 = n,\ \ C_n^n = 1,\ \ C_n^0 = 1$ (по определению принято $0! = 1$) и $C_n^{n-k} = C_n^k$

Пример 4. Сколько различных команд по три человека можно составить из 7 шахматистов?

Решение. Из 7 шахматистов 1,2,3,4,5,6,7 выбираем 3 любых. **Порядок** их номеров **не важен** $\Rightarrow$ тройки шахматистов из 7 − это **сочетания** и их число равно: $C_7^3 = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$. **Ответ**. 56.

4. **Основное правило комбинаторики** (Правило произведения)

Предположим, что имеется n элементов $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$ и каждый из них независимо от остальных может принимать несколько различных значений:

a_1 – k_1 значений, a_2 – k_2 значений, … , a_m – k_m значений.

Тогда число всех различных совокупностей значений элементов $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_m$ равно:

$$\boxed{N = k_1\cdot k_2\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ k_m} \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 5. Сколько 2-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

Решение. Нужно посчитать числа 11, 12, 13, 14, … ,43, 44.

ц1	**ц2**
1	1
2	2
3	3
4	4

----
4 · 4 = 16

Можно простым перебором их сосчитать. Мы сделаем это по формуле (4). Посмотрим на 2-значное число как на систему из двух цифр **ц1** и **ц2**, которые независимо друг от друга принимают значения 1, 2, 3, 4.

Тогда $k_1 = 4,\ k_2 = 4$ и $N = k_1\cdot k_2 = 4\cdot 4 = 16$.

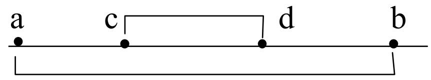
Ответ. 16.

3. Геометрическая вероятность

I) На прямой заданы отрезки $[c, d] \subset [a, b]$. На $[a, b]$ наудачу ставим точку.

Обозначим событие A − точка попадет на отрезок $[c, d]$.

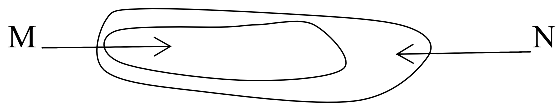
$$P(A) = \frac{\text{длина } [c; d]}{\text{длина } [a; b]}.$$



I I) На плоскости заданы фигуры M и N, $M \subset N$. На фигуре N наудачу ставим точку.

Обозначим событие A − точка попадет на фигуру M.

$$P(A) = \frac{\text{площадь } M}{\text{площадь } N}$$



I I I) В пространстве заданы фигуры U и V, $V \subset U$. На фигуре U наудачу ставим точку.

Событие A − точка попадет на фигуру U. $P(A) = \dfrac{\text{Объём } V}{\text{Объём } U}$

4. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения событий

Суммой событий A и B называется событие обозначаемое A + B, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие <u>A или событие B</u> (происходит только A или только B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие обозначаемое AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие <u>A и событие B.</u>

Отрицанием события A называется событие обозначаемое $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда событие <u>A не происходит.</u>

События A и B наз **несовместимыми**, если они **<u>не могут</u> одновременно произойти** в одном опыте.

События A и B называются **совместными** если они **<u>могут</u> одновременно произойти**.

Теорема 1. Для любых событий A и B верна формула $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Теорема 2. Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2а. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместные (т.е A_i, A_j несовместные для $i \neq j$),

то $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Теорема 3. Для любого события A верна формула $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Следствие. Для любого события A верна формула $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Пример 1. Имеется 10 шаров 6 из которых белые и 4 черных. Извлекаем 4 шара. Найти вероятности событий:

A − из этих 4 шаров хотя бы 3 шара будут белыми;

B − из этих 4 шаров хотя бы 1шар будет белым.

РЕШЕНИЕ. Из 10 шаров извлекаем 4 $\Rightarrow$ всех исходов $n = C_{10}^4 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$.

Обозначим вспомагательные события:

A_0 − из этих 4 шаров 0 белых;

A_1 − −/ −/ −/ −/− 1 белый;

A_2 − −/ −/ −/ −/− 2 белых;

A_3 − −/ −/ −/ −/− 3 белых;

A_4 − −/ −/ −/ −/− 4 белых.

Это простые события. Их вероятности легко найти.

Заметим также, что A_0 , … , A_4 **попарно несовместные** (никакие два из них не могут произойти одновременно).

Запишем событие A с помощью событий A_0 , … , A_4 .

A = { хотя бы 3 ш белые } = { ровно 3 ш белые } **или** { ровно 4 ш белые } = $A_3 + A_4$;

Таким образом, $A = A_3 + A_4$. $\Rightarrow$ $P(A) = P(A_3 + A_4)$

A_3 и A_4 несовместны $\Rightarrow$ по теореме 2 $P(A) = P(A_3 + A_4) = P(A_3) + P(A_4)$

Найдем вероятности $P(A_3)$ и $P(A_4)$.

По формуле **(5)** (см. задачи к теме 2)

10 ш = 6 бел + 4 син

4 ш = 3 бел + 1 син − **событие A_3**, $m_3 = C_6^3\cdot C_4^1 = 20\cdot 4 = 80$, $P(A_3) = m_3 / n = 80/210$

4 ш = 4 бел + 0 син − **событие A_4**, $m_4 = C_6^4\cdot C_4^0 = 15\cdot 1 = 15$, $P(A_4) = m_4 / n = 15/210$

$\Rightarrow$ **P(A)** = $P(A_3) + P(A_4) = 80/210 + 15/210 = 95/210 =$ **19 / 42 ≈ 0,45**.

Вероятность события B можно найти двуми методами.

Метод 1. (обычный)

B = { хотя бы 1 ш белый } =

= { ровно 1 бел } **или** { ровно 2 бел } **или** { ровно 3 бел } **или** { ровно 3 бел } $\Rightarrow$

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. (составляем аналогично событию A)

Из теоремы 2а получим

$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \ldots$

$P(A_3)$ и $P(A_4)$ вычислены ранее. Нужно ещё вычислить $P(A_1)$ и $P(A_2)$ и подставить.

Метод 2. (специальный)

Используем следствие из теоремы 3: $P(B)=1-P(\overline{B})$.

B − из 4 извлеченнвх шаров хотя бы 1 шар будет белым = один или более белых.

$\overline{B}$ − из 4 извлеченнвх шаров ни одного белого = из 4 шаров 0 белых = $\mathbf{A_0}$

Итак $\overline{B}$ = A_0 ,

10 ш = 6 бел + 4 син

4 ш = 0 бел + 4 син − **событие A_0**, $m_0 = C_6^0 \cdot C_4^4 = 1\cdot 1 = 1,$ $P(A_0) = m_0 / n = 1/210$

$P(\overline{B}) = P(A_0) = 1/210,$ $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 1/210 = 209/210 \approx 0{,}99$

ОТВЕТ: P(A) = 19 / 42 ≈ 0,45, P(B) = 209 / 210 = ≈ 0,99

Иногда в процессе проведения опыта становится ясно, что например, событие А произошло. В этом случае вероятность всех остальных событий можно уточнить используя эту дополнительную информацию о событии А. **Условной вероятностью** называется вероятность события В при условии, что событие А произошло и обозначается $P_A(B)$.

Вероятность $P_A(B)$ может отличаться от вероятности P(B), вычисленной до опыта.

Теорема 4. Для любых событий A, B вероятность $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P_A(B)$.

События A и B называются **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

Если A, B независимы, то $P_A(B) = P(B),$ $P_B(A) = P(A)$.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **независимыми**, если:

−) независимы A_1 и любая комбинация остальных событий $A_2, \dots, A_n$;

−) независимы A_2 и любая комбинация остальных событий $A_1, A_3, \dots, A_n$;

. . . .

−) независимы A_n и любая комбинация остальных событий $A_1, A_3, \dots, A_{n-1}$.

Теорема 5. Если события A, B независимы, то вероятность $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$.

Теорема 5а. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно независимые события,

то верна формула $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Теорема 6. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ − независимые события,

то верно равенство $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Пример 2. События C и D независимы, $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}8$. Вычислить $P(C+D)$.

Решение. $P(C+D) = P(C) + P(D) - P(CD)$ по общей теореме сложения 1.

Так как C и D независимы, то $P(CD) = P(C) \cdot P(D)$ $\Rightarrow$

$P(C+D) = P(C) + P(D) - P(CD) = P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D) = 0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}9$.

Ответ. 0,9

Пример 3. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания стрелками в мишень соответственно равны $p_1 = 0{,}8$ и $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятности событий:

A − оба стрелка попадут; B − ровно один стрелок попадет; C − хотя бы один стрелок попадет.

Решение. Опыт: два выстрела по мишени.

Обозначим вспомогательные события:

A_1 − первый стрелок попадёт; $P(A_1) = 0{,}8$;

A_2 − второй стрелок попадёт; $P(A_2) = 0{,}9$.

События A_1 и A_2 − независимы (**почему?**)

A = { оба стрелка попадут } = { 1-й попадёт } **и** { 2-й попадёт } = $A_1 \cdot A_2$.

P(A) = $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}72}$.

B = { ровно один стрелок попадет } = <u>{ 1-й попадёт } **и** { 2-й нет }</u> **или** <u>{ 1-й нет } **и** { 2-й попадёт }</u> =

$= A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$.

События $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$ − несовместны (**почему?**) $\Rightarrow$

$$\mathbf{P(B)} = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2\right) = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) =$$

$$= P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2 =$$

$$= 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}9) + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}9 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}26}.$$

C = { хотя бы один стрелок попадет } = { одно или более попаданий }.

$\overline{C}$ = { ни одного попадания } = {0 попаданий } =

= { 1-й не попадёт } **и** { 2-й не попадёт } = $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$

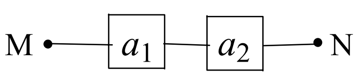
$$P\left(\overline{C}\right) = P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$$

$$\mathbf{P(C)} = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}02 = \mathbf{0{,}98}$$

Ответ. $P(A) = 0{,}72$; $P(B) = 0{,}26$; $P(C) = 0{,}98$.

Пример 4. Задана последовательная электрическая схема. Элементы a_1 и a_2 работают независимо и пропускают ток с вероятностями $p_1 = 0{,}3$ и $p_2 = 0{,}6$.

Найти вероятность того, что ток проходит из точки M в точку N.



Решение. Обозначим события

A_1 − ток проходит через элемент a_1, $P(A_1) = 0{,}3$,

A_2 − ток проходит через элемент a_2, $P(A_2) = 0{,}6$.

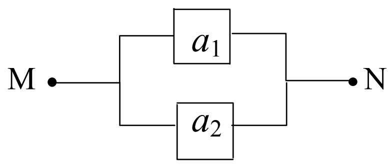
По условию A_1 и A_2 независимы.

A = { ток проходит из точки M в точку N } = { одновременно <u>через a_1 **и** через a_2</u> }

$\Rightarrow \quad A = A_1 \cdot A_2, \ \Rightarrow \ P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18.$

Ответ. 0,18.

Пример 5. Задана параллельная электрическая схема. Элементы a_1 и a_2 работают независимо и пропускают ток с вероятностями $p_1 = 0{,}5$ и $p_2 = 08$. Найти вероятность того, что ток проходит из точки M в точку N.



Решение. Обозначим события

A_1 − ток проходит через элемент a_1, $P(A_1) = 0{,}5$,

A_2 − ток проходит через элемент a_2, $P(A_2) = 0{,}8$.

По условию A_1 и A_2 независимы.

A = { ток проходит из точки M в точку N } = { через a_1 **или** через a_2} $\Rightarrow$ $A = A_1 + A_2$,

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}9$$

5 Формула Бернулли

Опыт производим n раз. В каждом опыте вероятность фиксированного события A происходит с одной и той же вероятностью $p = P(A)$. Требуется найти вероятность того, что в n опытах событие A произойдет ровно k раз.

Указанная вероятность вычисляется по формуле $\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$ − формула Бернулли.

Здесь $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Пример 1. Производим 7 выстрелов. Вероятность попадания в мишень в каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что будет ровно 4 попадания.

Решение. Семь раз производим опыт − один выстрел. Число опытов n = 7. Событие A в одном опыте − попадание в мишень − происходит с одной и той же вероятностью $p = P(A) = 0{,}8$. Нужно найти вероятность того, что 7 опытах событие A произойдёт ровно 4 раза $\Rightarrow$ k = 4.

Таким образом $n = 7$, $p = P(A) = 0{,}8$, $q = 1 - P(A) = 0{,}2$, $k = 4$

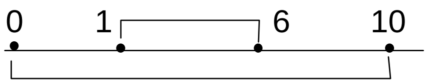
$$P_7(4) = C_7^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{7-4} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4^4}{5^7} = \frac{7 \cdot 4^4}{5^6} \approx 0{,}11.$$

Ответ. $\approx 0{,}11$.

Пример 2. На отрезок [0; 10] наудачу ставим 5 точек.

Найти вероятность того, что ровно 4 из них попадут на отрезок [1;6].

Решение.



Пять раз производим **опыт** – ставим **одну** точку на отрезок [0;10]. ($n = 5$)

Событие A в одном опыте – попадание на [1;6] – происходит с одной и той же вероятностью

$$p = P(\mathrm{A}) = \frac{\text{длина } [1;6]}{\text{длина } [0;10]} = \frac{6-1}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Число “удачных” опытов равно $k = 4$.

Таким образом $n = 5$, $p = \mathrm{P(A)} = 0{,}5$, $q = 1 - \mathrm{P(A)} = 0{,}5$, $k = 4$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^{5-4} = \frac{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}}{1\cdot \cancel{2\cdot 3\cdot 4}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} = 0{,}15625$$

Ответ. 0,15625.

Пример 3. Игральную кость выбрасываем 8 раз. Найти вероятность того, что не менее 6 раз появится четное число.

Решение. Производим $n = 8$ раз опыт – выбрасываем одну кость.

Событие A в одном опыте – появление четного числа – происходит с одной и той же вероятностью $p = P(A) = \dfrac{3\,(\text{четных номеров})}{6\,(\text{всех номеров})} = \dfrac{1}{2}$. Итак $n = 8$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$.

По условию требуется найти вероятность события B – появление четного числа не менее 6 раз.

Обозначим вспомогательные события B_k – появление четного числа <u>ровно k раз</u>.

Тогда $\mathrm{B} = \mathrm{B}_6 + \mathrm{B}_7 + \mathrm{B}_8$, причем события $\mathrm{B}_6, \mathrm{B}_7, \mathrm{B}_8$ несовместны (почему?).

$$\Rightarrow \mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(\mathrm{B}_6 + \mathrm{B}_7 + \mathrm{B}_8) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_6) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_7) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_8) =$$

$$= \mathrm{P}_8(6) + \mathrm{P}_8(7) + \mathrm{P}_8(8) =$$

$$= C_8^6 \cdot p^6 \cdot q^2 + C_8^7 \cdot p^7 \cdot q^1 + C_8^8 \cdot p^8 \cdot q^0 =$$

$$= (\text{подставить } p = 0{,}5,\ q = 0{,}5, \text{ вычислить}) \approx 0{,}14.$$

Ответ. $\approx 0{,}14$.

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Совокупность событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется **полной группой событий**, если:

1. они попарно несовместны: H_i, H_j – несовместны, $i \neq j$,
   т.е никакие два из них не могут произойти одновременно.
2. сумма событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – достоверное событие,
   т.е в каждом опыте хотя бы одно из них происходит.

Тогда для вычисления вероятности любого события А можно применить формулу

$\boxed{P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)}$ − **формула полной вероятности**.

События $H_1, H_2, \dots, H_n$ – называют гипотезами.

Пример 1. Три станка изготавливают одинаковые детали, неразличимые по внешнему виду.

Производительности 1-го, 2-го и 3-го станков относятся как 1 : 3 : 4. Вероятность того, что на первом станке изготовлена бракованная деталь равна $p_1 = 0{,}02$. Для второго и третьего станка эти вероятности соответственно равны $p_2 = 0{,}06$, $p_3 = 0{,}09$. На складе наугад взята деталь.

Найти вероятность того, что она бракованная.

Решение. Опыт: наугад взята деталь.

Событие А − взятая деталь окажется бракованной.

Обозначим гипотезы (предположения о том, где изготовлена деталь):

H1 − взятая деталь изготовлена на 1-м станке,

H2 − −/− /−/ −/ −/ −/ − на 2-м станке,

H3 − −/− /−/ −/ −/ −/ − на 3-м станке.

События H1, H2, H3 несовместны, (почему?)

Сумма H1 + H2 + H3 достоверное событие (почему?)

⇒ H1, H2, H3 − полная группа событий

⇒ для вычисления P(A) можно применить формулу полной вероятности

$$P(A) = P(H1)\cdot P_{\mathbf{H1}}(A) + P(H2)\cdot P_{\mathbf{H2}}(A) + P(H3)\cdot P_{\mathbf{H3}}(A).$$

Осталось вычислить величины, входящие в эту формулу.

Из соотношения производительностей станков 1 : 3 : 4 следует, что

от 1-го станка выходит 1/ 8 числа всех деталей, ⇒ P(H1) = 1/ 8

от 2-го станка −/ −/ − 3/ 8 −/ −/ −/ −/ −/ −, ⇒ P(H2) = 3/ 8

от 3-го станка −/ −/ − 4/ 8 −/ −/ −/ −/ −/ −, ⇒ P(H3) = 4/ 8

$P_{H1}(A)$ = { вер. того, что дет. бракована. если она с 1-го станка } = $p_1 = 0{,}02$

$P_{H2}(A)$ = { вер. того, что дет. бракована. если она с 2-го станка } = $p_2 = 0{,}06$

$P_{H3}(A)$ = { вер. того, что дет. бракована. если она с 3-го станка } = $p_3 = 0{,}09$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P(A)} = P(H_1)\cdot P_{H1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H3}(A)$$

$$= 1/8 \cdot 0{,}02 + 3/8 \cdot 0{,}06 + 4/8 \cdot 0{,}09 = \mathbf{0{,}07}$$

Ответ. 0,07.

Предположим, что имеется полная группа гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ и задано событие A. Вычислим вероятности $P(H_1), \dots, P(H_n)$. Произведем опыт. Предположим событие A произошло. Требуется знать, какое из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ произошло в процессе опыта.

Вероятность того, что имело место гипотеза H_k, при условии, что событие A произошло обозначается $P(H_K/A)$ и вычисляется по **формуле Байеса**

$$\boxed{P_A(H_K) = \frac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)}}$$

Пример 2. (см предыдыдущий пример 1)

Три станка изготавливают одинаковые детали. Производительности 1-го, 2-го и 3-го станков относятся как 1 : 3 : 4. Вероятность того, что на 1-м станке изготовлена бракованная деталль. Равна $p_1 = 0{,}02$. Для 2-го и 3-го станков эти вероятности соответственно равны $p_2 = 0{,}06$, $p_3 = 0{,}09$. На складе наугад взята деталь, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на втором станке.

Решение. Используем обозначения из примера 1.

Событие A − взятая деталь окажется бракованной, P(A) = 0,07.

Гипотезы:

H1 − деталь изготовлелена. на 1-м станке, $P(H1) = 1/8$, $P_{H1}(A) = 0{,}02$

H2 − −/− /− −/− /− на 2-м станке, $P(H2) = 3/8$, $P_{H2}(A) = 0{,}06$

H3 − −/− /− −/− /− на 3-м станке, $P(H3) = 4/8$, $P_{H3}(A) = 0{,}09$

Нужно найти вероятность

$$\mathbf{P_A(H_2)} = \frac{P(H2)\cdot P_{H2}(A)}{P(H1)\cdot P_{H1}(A) + P(H2)\cdot P_{H2}(A) + P(H3)\cdot P_{H3}(A)} =$$

$$= \frac{(3/8)\cdot 0{,}06}{(1/8)\cdot 0{,}02 + (3/8)\cdot 0{,}06 + (4/8)\cdot 0{,}09} = \frac{0{,}375\cdot 0{,}06}{0{,}07} \approx \mathbf{0{,}32}$$

Ответ. ≈ 0,32.

7. Дискретные случайные величины

Случайной величиной (СВ) называется правило, которое каждому исходу опыта ставит в соответствие единственное действительное число.

Обозначают случайные величины большими буквами X, Y, Z, …, а их значения – строчными буквами $x_1, x_2, x_3 \dots$.

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые она принимает с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически.

При табличном способе заданий случайной величины X в первой строке таблицы указывают возможные значения x_i, а во второй – вероятности p_i появления этих значений, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Равенство $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ удобно применять для контроля вычислений.

Пример 1.

Построить закон распределения числа выпавших гербов при выбрасывании 3-х монет.

Решение. Выбрасываем 3 монеты.

Случайная величина X − число всех выпавших гербов, X = 0; 1; 2; 3.

Требуется построить закон распределения СВ X, то есть заполнить таблицу:

X	0	1	2	3
P	p_0	p_1	p_2	p_3

Вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 найдем по формуле Бернулли.

Три раза производим опыт − выбрасываем монету, n = 3.

Событие A в одном опыте − выпадение герба. p = P(A) = 0,5, q = 1 − p = 0,5.

Применим формулу Бернулли $p_k = P(X=k) = P_n(k) = P_3(k) = C_3^k \cdot p^k \cdot q^{3-k}$.

$$p_0 = P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$p_1 = P(X=1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$p_2 = P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$p_3 = P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

Получили требуемый закон распределения

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Обратим внимание, что 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1**.**

Определим **числовые характеристики** дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием ДСВ X, принимающей конечное множество значений и заданной законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности, то есть число

$$\boxed{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно **среднему арифметическому наблюдаемых значений** случайной величины.

Дисперсией СВ X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания: $D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right)$

Дисперсия $D(X)$ характеризует **рассеяние** значений X вокруг матожидания $M(X)$.

Если дискретная случайная величина X задана таблицей вида

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

то $$\boxed{D(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n - \left(M(X)\right)^2}$$

Средним квадратическим отклонением СВ X называется корень квадратный из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример 2. Найти числовые характеристики числа выпавших гербов при выбрасывании 3-х монет.

Решение. . Выбрасываем 3 монеты. Пусть X – число гербов.

В примере 1 построен закон распределения X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{0+3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$D(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n - \left(M(X)\right)^2 =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{0+3+12+9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$$

Ответ. $M(X) = 1{,}5$, $D(X) = 0{,}75$, $\sigma(X) \approx 0{,}87$.