Министерство образования Республики Беларусь
УО «Витебский государственный технологический университет»

Гийом Франсуа Лопиталь

Тема3 «Дифференциал функции»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

3.1 Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ **имеет в точке *x*, отличную от нуля, производную**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0.$$

Тогда, по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции, можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ **- бесконечно малая функция и**

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

Причем, т.к. $f'(x) \neq 0,$ произведение $f'(x)\Delta x$

есть бесконечно малая величина **первого порядка** относительно $\Delta x.$

Произведение $\alpha(x)\Delta x$ - бесконечно малая

более высокого порядка относительно $\Delta x.$

Первое слагаемое в приращении функции $f'(x)\Delta x$

называют **главной частью** приращения функции.

Определение: **Дифференциалом функции** $y = f(x)$

в точке *x* называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента и обозначается ***dy:***

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (3.1)$$

Найдем дифференциал функции *y=x.* Т.к. $y' = x' = 1,$

то согласно (3.1) $dy = dx = \Delta x,$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной

$$dx = \Delta x.$$

Поэтому формулу (3.1) можно записать

$$dy = f'(x)dx \qquad (3.2)$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

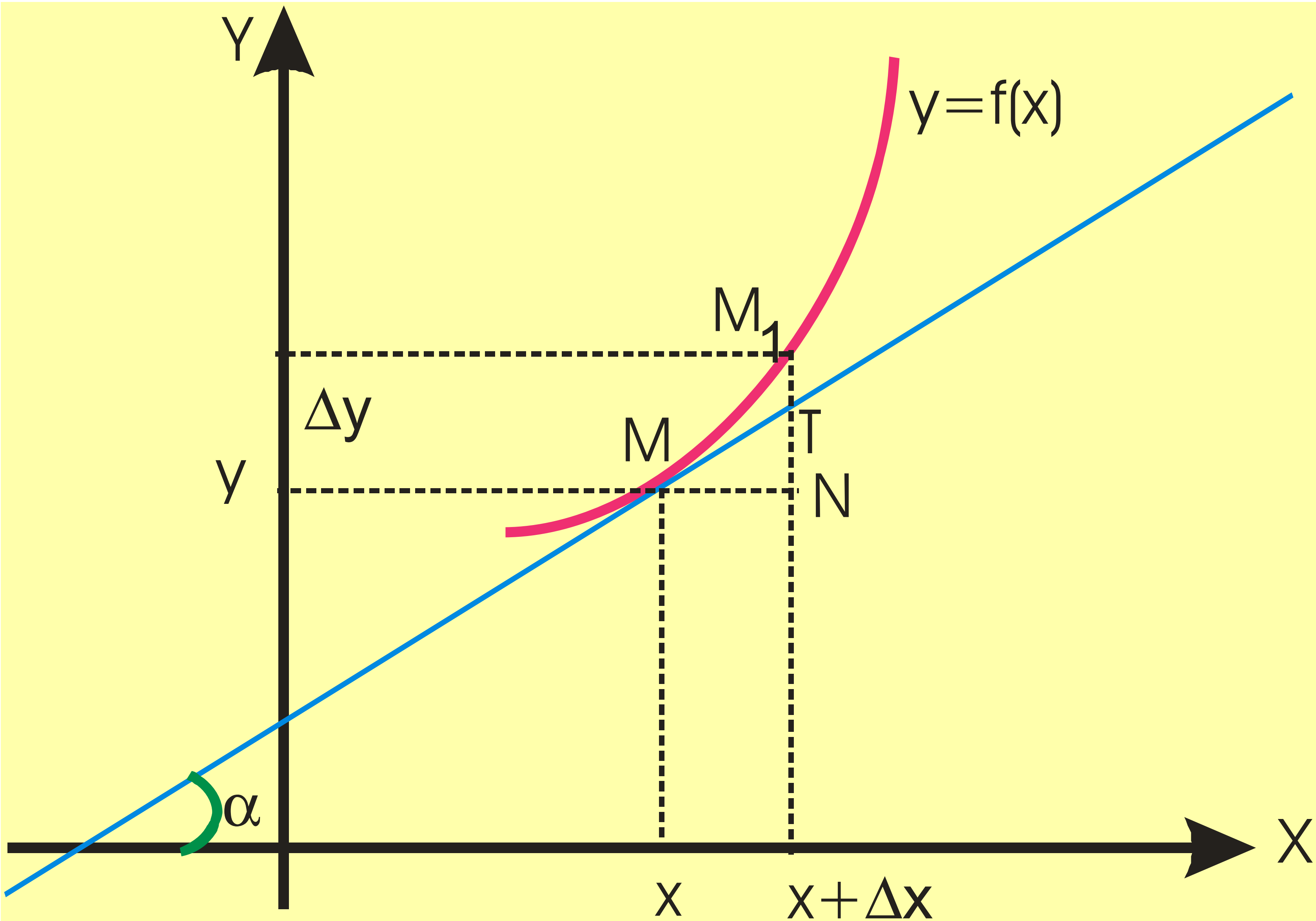
Пример: **Найти дифференциал функции**

$$y = 3x^2 - \sin(1+2x)$$

Решение:

$$dy = (3x^2 - \sin(1+2x))'dx = (6x - 2\cos(1+2x))dx$$

Выясним геометрический смысл дифференциала функции.



Возьмем точку *M(x,y)*, к точке *M* проведём касательную. Пусть касательная образует угол α с положительным направлением *x*.

Дадим *x* координате приращение Δx, тогда y получит приращение Δy,

$$M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Рассмотрим ΔMNT, из треугольника видно, что $NT = \Delta x \cdot tg\alpha$

Согласно геометрическому смыслу первой производной

$$tg\alpha = f'(x),$$ **таким образом**

$$NT = f'(x)\Delta x, \quad \Delta x \approx dx \quad NT = f'(x)dx$$

Но согласно определению дифференциала $dy = f'(x)dx$

Таким образом $NT = dy,$ **т.е. дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда *x* получит приращение Δx.**

3.2 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Т.к. $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$ **и** $dy = f'(x)\Delta x,$

то можно записать $\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x.$

Т.к. второе слагаемое является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем первое слагаемое, то

$$\Delta y = dy, \qquad f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) используется для вычисления приближенных значений функций.

Пример:

Вычислить приближенно $\sin 46^0.$

Решение:

Пусть $f(x) = \sin x,$ **тогда** $f'(x) = \cos x.$

На основании (3.3) $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$

В нашем случае $x = \dfrac{\pi}{4}(45^0), \Delta x = \dfrac{\pi}{180}(\textit{соответствует}\ \text{углу в}\ 1^0)$

Получим

$$\sin 46^0 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4};$$

$$\sin 46^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}0175 = 0{,}7194.$$

3.3 Правила для отыскания дифференциала

$$1.\ d(cu) = c\,du,$$ c=const, $u = u(x).$

$$2.\ d(u+\upsilon) = du + d\upsilon,$$

$$3.\ d(u\cdot\upsilon) = du\cdot\upsilon + u\cdot d\upsilon,$$

$$4.\ d\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{du\cdot\upsilon - u\cdot d\upsilon}{\upsilon^2},$$

$$5.\ dc = 0.$$

Докажем, например, третью формулу

$$d(u\cdot\upsilon)=du\cdot\upsilon+u\cdot d\upsilon$$

Доказательство:

$$d(u\cdot\upsilon)=(u\cdot\upsilon)'dx=(u'\upsilon+u\upsilon')dx=$$
$$=\upsilon\cdot u'dx+u\cdot\upsilon'dx=du\cdot\upsilon+u\cdot d\upsilon$$

Таблица дифференциалов

$$1.\ d(u^{\alpha})=\alpha\cdot u^{\alpha-1}du,$$

$$2.\ d(a^{u})=a^{u}\ln a\cdot du,$$

$$3.\ d(e^{u})=e^{u}\cdot du$$

$$4.\ d(\ln u)=\frac{1}{u}\cdot du$$

$$5.\ d(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} du,$$

$$6.\ d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

$$7.\ d(\cos u) = -\sin u \cdot du,$$

$$8.\ d(tgu) = \frac{1}{\cos^2 u} du,$$

$$9.\ d(ctgu) = -\frac{1}{\sin^2 u} du,$$

$$10.\ d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du,$$

$$11.\ d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du,$$

$$12.\ d(arctgu) = \frac{1}{1+u^2} du,$$

$$13.\ d(arcctgu) = -\frac{1}{1+u^2} du,$$

$$14.\ dc = 0,$$

c=const.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть

$y = f(u)$ **а** $u = \varphi(x)$ **или** $y = f(\varphi(x))$.

По правилу дифференцирования сложной функции можно записать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Умножим левую и правую часть равенства на *dx*, получим

$$y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx$$

Но $dy = y'_x dx,$ $u'_x dx = du$

следовательно

$$dy = y'_u du$$

Формулы $dy = f'(x)dx$ и $dy = y'_u du$

по внешнему виду совпадают, но между ними есть принципиальное различие: в первой формуле *x*- независимая переменная и $dx = \Delta x,$

во второй формуле *u* функция от *x*, т.е. $u = \varphi(x)$

а поэтому $du \neq \Delta u.$

Это свойство неизменности формы дифференциала первого порядка называется инвариантностью.

3.4 Дифференциалы высших порядков

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x),$

тогда $dy = f'(x)dx$ **или** $dy = y'_x dx.$

От переменной *x* может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$

второй же сомножитель *dx* является приращением независимого переменного *x* и от значения этого переменного не зависит.

Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом, **называется дифференциал от дифференциала первого порядка:**

$$d^2 y = d(dy).$$

Найдем выражение для второго дифференциала

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx =$$

$$= f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

(Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки)

Третьим дифференциалом называется дифференциал от второго дифференциала

$$d^3y = d(d^2y) = (f''(x)dx^2)'dx = f'''(x)dx^3$$

Дифференциалом *n-ого* порядка называется первый дифференциал от дифференциала *(n-1)*-ого порядка

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (3.5)$$

Пусть задана сложная функция $y = F(u), \; u = \varphi(x),$

поскольку дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности, то

$$dy = F'_u(u)du$$

Второй дифференциал и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Действительно $d^2y = d(F'_u(u)du)$

здесь $du = \varphi'(x)dx$ **зависит от *x* и поэтому**

$$d^2y = d(F'_u(u))du + F'_u(u)d(du) =$$

$$= F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2u,$$

где $d^2u = \varphi''(x)(dx)^2$

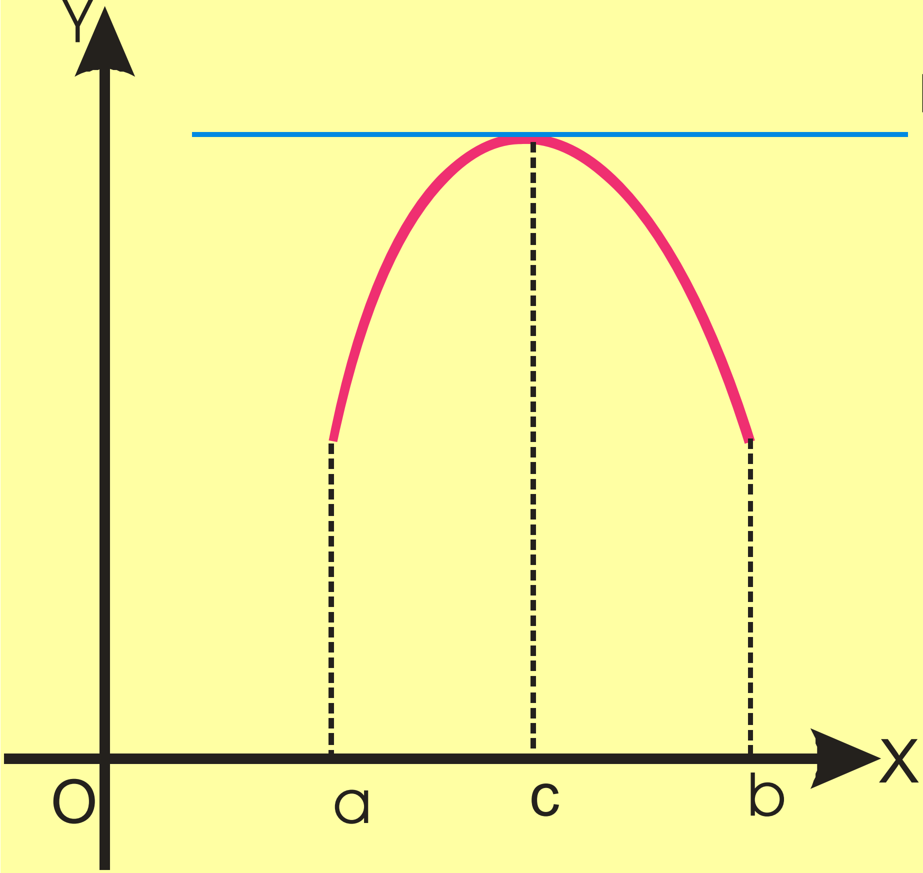
3.5 Основные теоремы дифференцирования

1.Теорема Ферма: Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке и во внутренней точке принимает наибольшее или наименьшее значение, то если существует конечная производная в этой точке, то она равна нулю.

Доказательство:

Пусть для определенности функция $y = f(x)$ принимает в точке ***x=c*** наибольшее значение, т.е. для любого ***x*** принадлежащего данному промежутку справедливо равенство

$$f(x) \leq f(c)$$



По определению производной

$$f'(c) = \lim_{x-c\to 0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

1. **при *x>c, x-c>0*,**

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$$

т.е $f'(c) \le 0$

2. **при *x<c, x-c<0***

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0,$$

т.е. $f'(c) \ge 0.$

Этим двум условиям одновременно удовлетворяет $f'(c) = 0$

Т.е. касательная, приведённая к кривой *x=c*, будет параллельна *Ox*.

что и требовалось доказать

2.Теорема Ролля (теорема о корнях производной): Если функция

$$y = f(x)$$ **непрерывна на отрезке** $$[a,b]$$

и дифференцирована во всех внутренних точках этого отрезка и на концах отрезка

$$x = a, x = b$$

принимает одинаковые значения $$f(a) = f(b),$$

то внутри отрезка существует по крайне мере одна точка *x=c*, в которой производная обращается в нуль, т.е.

$$f'(c) = 0$$

С геометрической точки зрения теорема Ролля означает, что на графике функции

$$y = f(x)$$

найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси *Ox*.

3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши):

Пусть $f(x)$ **и** $\varphi(x)$ **две непрерывные на отрезке** $[a,b]$ **функции и дифференцируемые на интервале** (a,b), **причём** $\varphi'(x) \neq 0$, **то найдётся хотя бы одна точка *c*,** $c \in (a,b)$, **что выполняется условие:**

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (3.6)$$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a))$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Роля и на концах отрезка она принимает одинаковые значения

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0,$$

На основании теоремы Ролля найдется внутри отрезка точка *x=c*, в которой производная

$$F'(c) = 0,$$

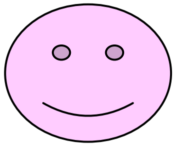
но $$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$$

Следовательно

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$



4.Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа):

Если функция $y = f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$ **и дифференцируема на интервале** (a, b),

то найдётся хотя бы одна точка с, $c \in (a, b)$,

что выполняется условие:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (3.7)$$

Доказательство:

Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши, положим $\varphi(x) = x$, **тогда**

$$\varphi(b) - \varphi(a) = b - a,$$

$$\varphi'(x) = 1, \; \varphi'(c) = 1.$$

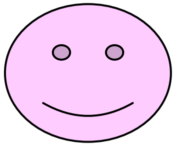
Подставим эти значения в формулу $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)},$

получаем $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f'(c)}{1}.$

Отсюда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

что и требовалось доказать



Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл:

запишем (3.7) в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad \text{где}\ \ a<c<b$$

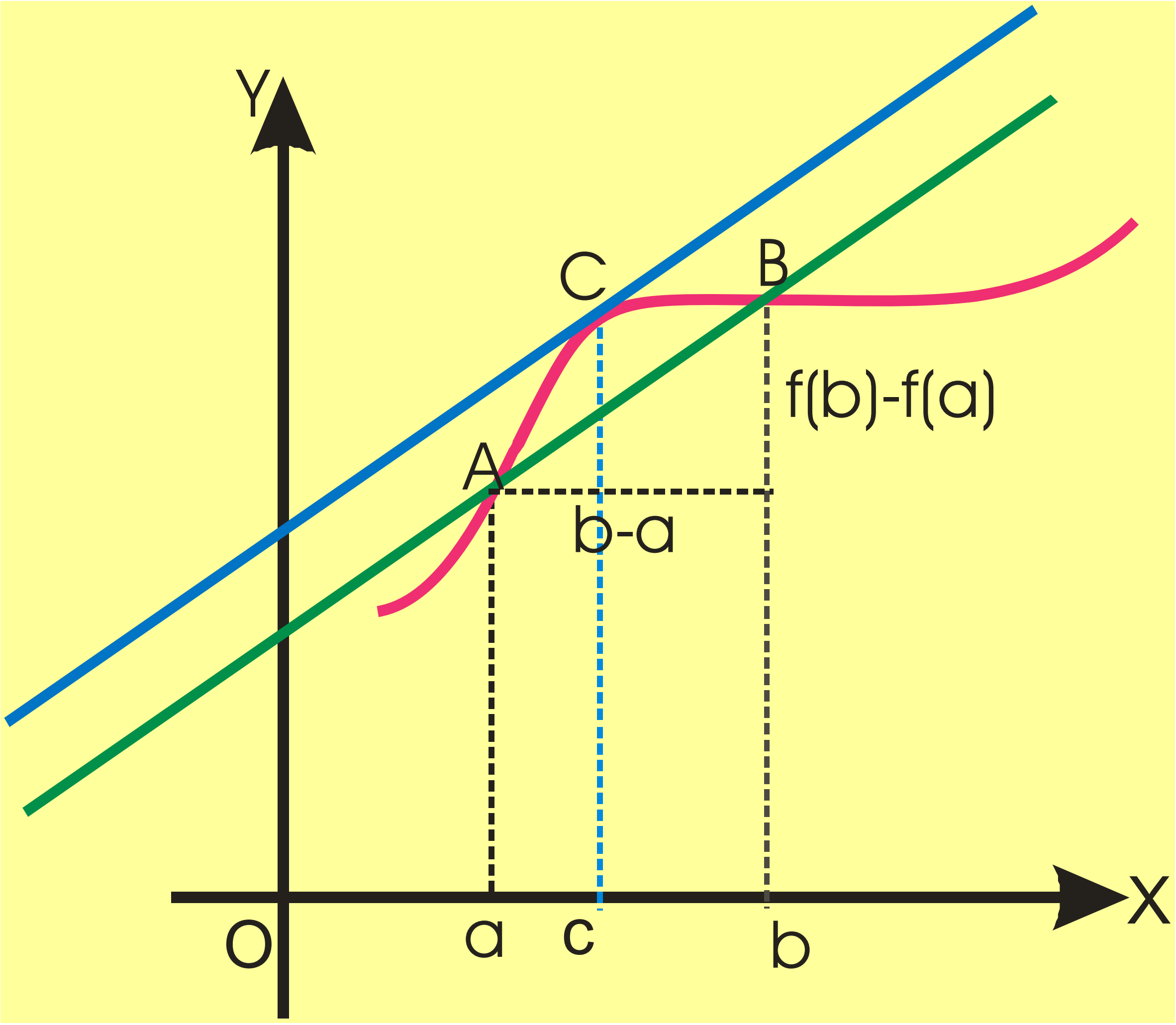
Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **есть угловой коэффициент секущей *AB*,**

а величина $f'(c)$ **- угловой коэффициент касательной к кривой в точке *x=c.***

Следовательно: на графике функции $y=f(x)$

найдется точка с координатами $(c, f(c))$

в которой касательная к графику функции параллельна секущей *AB*.


Y
C
B
f(b)-f(a)
A
b-a
X
O
a
c
b

3.6 Правила Лопиталя

Теорема 1 (правило Лопиталя раскрытие неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$)

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и в этой точке обращаются в нуль, т.е.

$$f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$$ **и пусть** $$\varphi'(x) \neq 0.$$

Тогда если существует $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l,$$ **тогда существует предел**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$ **и он равен** $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$$

Доказательство:

Применим к функциям $f(x)$ **и** $\varphi(x)$ **теорему Коши на отрезке**

$[x_0, x]$, $c \in (x_0, x)$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

по условию теоремы $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0,$

выражение примет вид:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

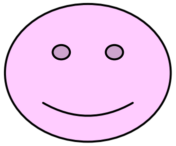
Перейдем к пределу при $x \to x_0$, **в этом случае** $c \to x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

По условию теоремы сказано, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$

а значит $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$$

что и требовалось доказать



Пример 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)'}{(x \cdot \ln x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1 \cdot \ln x + x \dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1$$

Пример 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3\sin 6x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{18\cos 6x}{2}=9$$

Теорема 2 (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**)**

Пусть функции $f(x)$ **и** $\varphi(x)$

непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0

и в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,\quad \varphi'(x)\neq 0.$

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$

Пример:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(tg3x)'}{(tg5x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}{\dfrac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5}=$$

$$\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 5x)'}{(\cos^2 3x)'}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 5x(-\sin 5x)5}{2\cos 3x(-\sin 3x)3}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x\sin 5x}{\cos 3x\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 5x\sin 5x)'}{(\cos 3x\sin 3x)'}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5(-\sin 5x)\sin 5x+5\cos 5x\cos 5x}{3(-\sin 3x)\sin 3x+3\cos 3x\cos 3x}=\frac{5}{3}.$$

Правила Лопиталя применяют для раскрытия неопределённности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ **и** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, **которые называются** ***основными.***

Неопределённости вида $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

и т.д. сводятся к основным путем торжественных преобразований:

1. Пусть $f(x) \to 0$ **а** $\varphi(x) \to \infty$ **при** $x \to x_0$

Тогда необходимо выполнить следующие преобразования:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Пример :

$$\lim_{x\to 2} tg\frac{\pi x}{4}\cdot(2-x) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\dfrac{1}{tg\dfrac{\pi x}{4}}} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{ctg\dfrac{\pi x}{4}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)'}{(ctg\dfrac{\pi x}{4})'} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}\cdot\dfrac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}\lim_{x\to 2}\sin^2\frac{\pi x}{4} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Пусть $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$,

нужно вычислить

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - \varphi(x)) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

На практике этот приём выглядит намного проще.

Пример:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{(\ln x\cdot(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\frac{1}{x})'}{(\frac{x-1}{x}+\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

3. Рассмотрим предел вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$

пусть $f(x)\to 0,\quad \varphi(x)\to\infty,$ **или**

$f(x)\to 0,\quad \varphi(x)\to 0,$ **или**

$f(x)\to\infty,\quad \varphi(x)\to 0.$

При вычислении такого предела, поступают следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\ln f(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)} = \exp(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x))$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)} = \exp(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)) =$$

$$= \exp(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}) = \left(\frac{0}{0}\right) = \exp(\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos 2x))'}{(x^2)'}) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{2x} \right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x}{x} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-(\sin 2x)'}{(x)'} \right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos 2x}{1} \right) = \exp(-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$