МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»
Кафедра Т и П М

МАТЕМАТИКА
Методические указания к выполнению типового расчёта № 3 для студентов специальности 1 36 01 01

ВИТЕБСК
2014

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ЧАСТЬ III:

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
3. Определение двойного интеграла.
4. Определение тройного интеграла.
5. Свойства кратных интегралов.
6. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
7. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
8. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
9. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.
10. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.
11. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.
12. Геометрические приложения кратных интегралов.
13. Механические приложения кратных интегралов. Вычисление центра масс плоской пластины и пространственного тела.
14. Механические приложения кратных интегралов. Вычисление момента инерции плоской пластины и пространственного тела.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
2. Методы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
3. Поверхностный интеграл первого рода и его свойства.
4. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
5. Скалярное поле и его характеристики.
6. Векторное поле и его геометрические характеристики.
7. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
8. Методы вычисления криволинейного интеграла второго рода. Формула Грина.
9. Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.
10. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
11. Интегральные характеристики векторных полей: поток и циркуляция.
12. Дифференциальные характеристики векторных полей: дивергенция, её физический смысл и метод вычисления.
13. Дифференциальные характеристики векторных полей: ротор, его смысл и метод вычисления в декартовой системе координат.
14. Теорема Остроградского-Гаусса.
15. Теорема Стокса.
16. Потенциальные поля. Потенциал поля.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический ряд).
2. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (гармонический ряд).
3. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда.
4. Свойства сходящихся рядов.
5. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак сравнения).
6. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (предельный признак сравнения).
7. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак Даламбера).
8. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (радикальный признак Коши).
9. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (интегральный признак Коши).
10. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
11. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница и следствие из него.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
2. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
3. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.
4. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.
5. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд.
6. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.
7. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функций: $f(x) = e^x$, $f(x) = chx$, $f(x) = shx$.
8. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = \ln(1+x)$.
9. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.
10. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

11. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функций $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.

12. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

13. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.

14. Вычисление определенного интеграла с помощью степенных рядов.

15. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

16. Понятие о степенных рядах в комплексной области.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

1. Периодические функции и их свойства. Интеграл от периодической функции.
2. Понятие числового тригонометрического ряда.
3. Ортогональные системы тригонометрических функций
4. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.
5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
6. Теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье.
7. Формула Фурье. Интеграл Фурье.
8. Косинус и синус преобразование Фурье.
9. Применение формулы Фурье к вычислению несобственных интегралов, зависящих от параметра.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика: В 5 ч./ Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Мн.: Выш. Шк. 1984. – Ч. 2- 4.

2. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский - М.: Наука, 1988 г. – 432с.

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2-х т./Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1985 г. – Т. 2. – 456с.

4. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры./Д.В. Беклемишев – М.: Наука, 1980. – 336с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3 ч./ А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец и др. – Мн.: Выш. Шк., 1990. – Ч. 1 – 3.

6. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. Пособие. В 2 ч. /Е. И. Гурский, В. П. Домашов, В. К. Кравцов и др. – Мн.: Выш. Шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

7. Высшая математика: Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Ч.1./УО “ВГТУ”; Сост. В.С. Денисов, А.В. Коваленко, А.П. Дмитриев, Ю.А. Завацкий. – Витебск, 2003. – 65 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ

В данном разделе методических указаний приведены примеры решения типовых задач контрольных заданий. Решение задач приведено по темам, которые студент должен изучить в процессе выполнения типового расчёта. Решенные задачи содержат формулы и пояснения, которые могут быть использованы студентом, при выполнении заданий своего варианта. В то же время, тех теоретических сведений, которые приведены в задачах, недостаточно для сдачи экзамена по курсу «Математика», они могут быть использованы лишь при решении практических задач и выполнении контрольной работы.

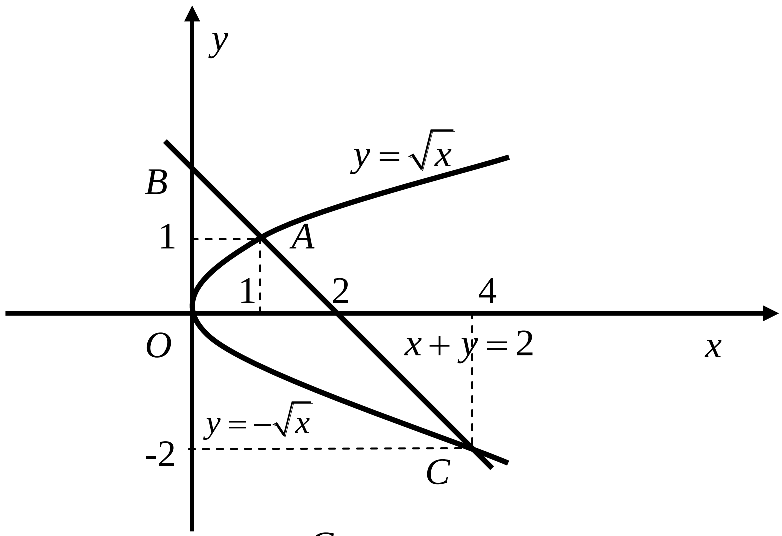
ТЕМА 1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИМЕР 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования G, которая ограничена параболой $y^2 = x$ и прямыми $y + x = 2$, $x = 0$.

Решение. Изобразим область интегрирования G, предварительно найдя точки пересечения параболы и прямой $y + x = 2$. Решим систему

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x = 2 - y. \end{cases} \quad y^2 = 2 - y \text{ или } y^2 + y - 2 = 0. \begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получили две точки пересечения параболы $y^2 = x$ и прямой $y + x = 2$: $A(1;1)$ и $C(4;-2)$.



Область интегрирования G на рисунке представляет собой фигуру OAB. Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_G xydxdy$, путем перехода к повторному интегралу.

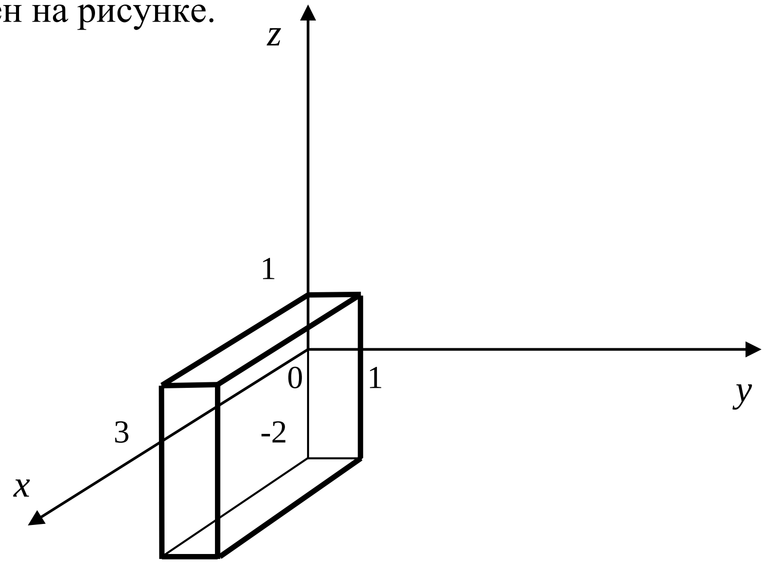
$$\iint\limits_G xydxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xy^2\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left((2-x)^2 - (\sqrt{x}\,)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(4x - 5x^2 + x^3\right)dx = \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{7}{24}.$$

Ответ: $\frac{7}{24}$.

ПРИМЕР 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_\Omega (x-y-z)dxdydz$, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования Ω, которая ограниченна поверхностями $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1, -2 \le z \le 1$.

Решение. Областью интегрирования является прямой параллелепипед, который изображен на рисунке.



Вычислим тройной интеграл

$$\iiint\limits_\Omega (x-y-z)dxdydz = \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2}^1 (x-y-z)dz = \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 \left(xz - yz - \frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_{-2}^1 dy =$$

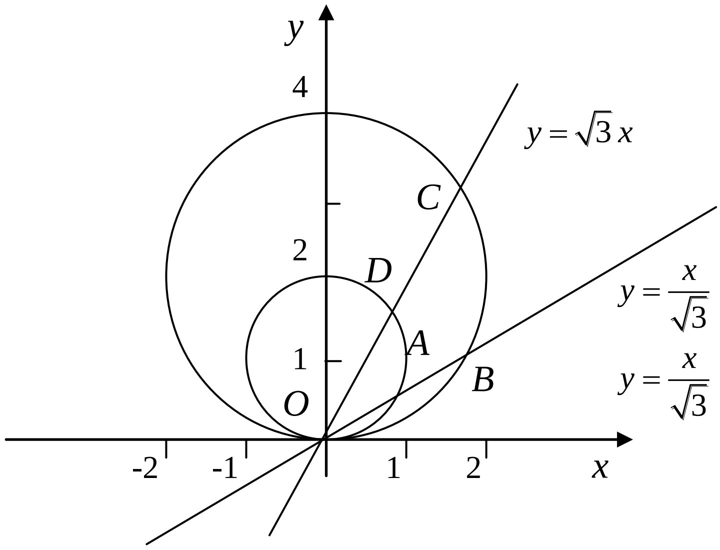
$$= \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 \left(x - y - \frac{1}{2} + 2x - 2y + 2\right)dy = \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 \left(3x - 3y + \frac{3}{2}\right)dy = 3\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 \left(x - y + \frac{1}{2}\right)dy =$$

$$3\int\limits_0^3 \left(xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^1 dx = 3\int\limits_0^3 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0\right)dx = 3\int\limits_0^3 x\,dx = 3\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = 3\cdot\left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

Ответ: $13\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 3. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, которая ограниченна линиями, заданными в декартовой системе координат: $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$ и $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Сделать чертеж области, ограниченной заданными линиями.

Решение. После выделения полного квадрата, относительно переменной y, уравнение $y^2-2y+x^2=0$ принимает вид $x^2+(y-1)^2=1$, которое задает окружность с центром в точке $C_1(0;1)$ и радиусом $R_1=1$. Аналогично, уравнение $y^2-4y+x^2=0$ преобразовывается к виду $x^2+(y-2)^2=4$ – окружность с центром в точке $C_2(0;2)$ и радиусом $R_2=2$. Уравнения $y=\sqrt{3}x$ и $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ задают прямые проходящие через начало координат. Изобразим фигуру G, которая ограничена заданными кривыми, в декартовой системе координат (на рисунке область G представляет собой фигуру $ABCD$).



Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнения окружностей принимают вид $r=2\sin\varphi$ и $r=4\sin\varphi$, а уравнения прямых $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ или $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Вычислим площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, используя формулу: $S=\iint\limits_G r\,drd\varphi$. Вычисление двойного интеграла проведем путем перехода к повторному интегрированию.

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}rdr=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}r^2\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\sin^2\varphi-4\sin^2\varphi\right)d\varphi=6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi=$$

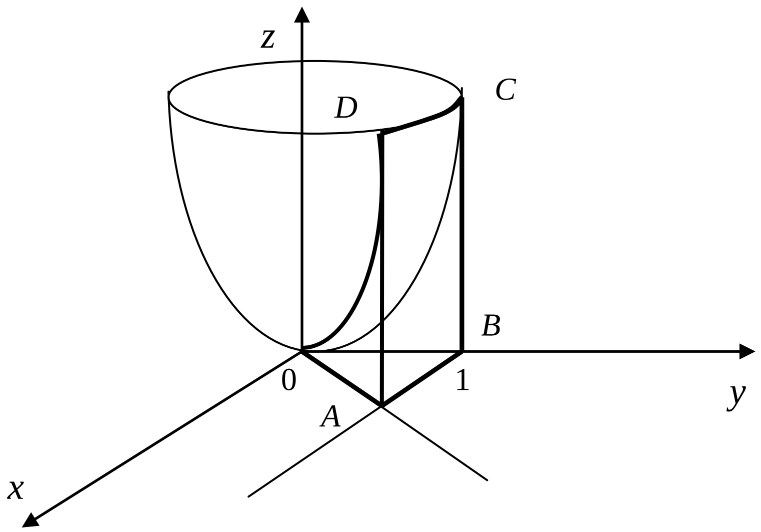
$$=3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 3\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

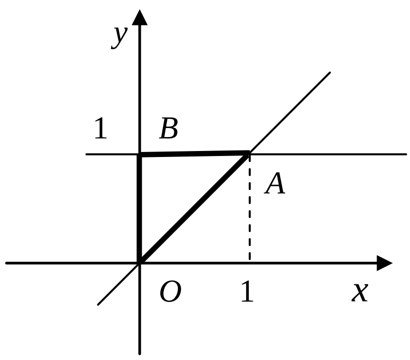
$$=3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ кв. ед.

ПРИМЕР 4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 3y^2,\ y = x,\ y = 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy.

Решение. Данное тело ограничено эллиптическим параболоидом $z = x^2 + 3y^2$ и плоскостями $y = x,\ y = 1,\ x = 0,\ z = 0$, и имеет проекцию на плоскость xOy область G. Сделаем чертежи данного тела ($OABCD$) и его проекции на плоскость xOy (OAB).





Объем цилиндрического тела ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$ проекция, которого на плоскость xOy представляет собой фигуру G, находят по формуле $V = \iint\limits_G f(x;y)\,dxdy$. Тогда объем заданного тела

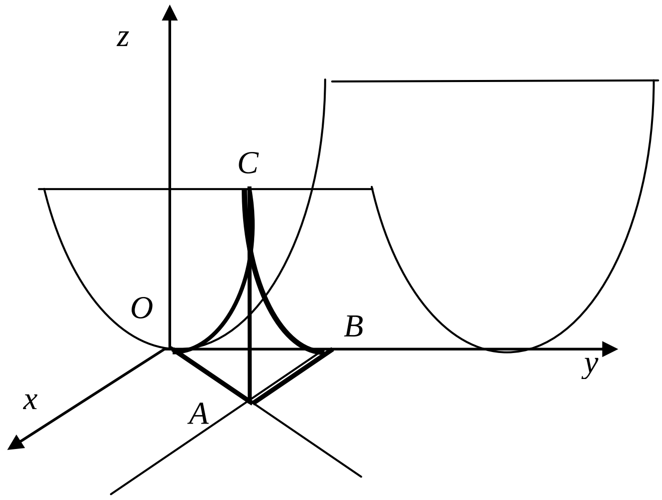
$$V = \iint\limits_G \left(x^2 + 3y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1\left(x^2 + 3y^2\right)dy = \int\limits_0^1\left(x^2y + y^3\right)\Big|_x^1 dx = \int\limits_0^1\left(x^2 + 1 - x^3 - x^3\right)dx =$$

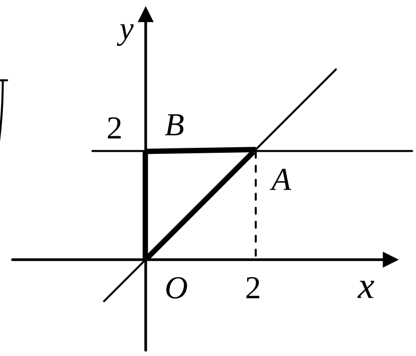
$$=\int\limits_0^1\left(x^2 + 1 - 2x^3\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$ куб. ед.

ПРИМЕР 5. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2,\ y = x,\ y = 2,\ z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy.

Решение. Уравнение $z = x^2$ определяет параболический цилиндр, а остальные поверхности являются плоскостями. Сделаем чертежи данного тела ($OABC$) и его проекции на плоскость xOy (OAB).





Вычислим объем построенного тела $OABC$ по формуле $V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$.

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^2 dx \int_x^2 z\Big|_0^{x^2} dy = \int_0^2 dx \int_x^2 x^2 dy = \int_0^2 x^2 y\Big|_x^2 dx = \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$ куб. ед.

ТЕМА 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРИМЕР 6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (2x + y)dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;2)$, $O(0;0)$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим контур треугольника ABO (рис 1).

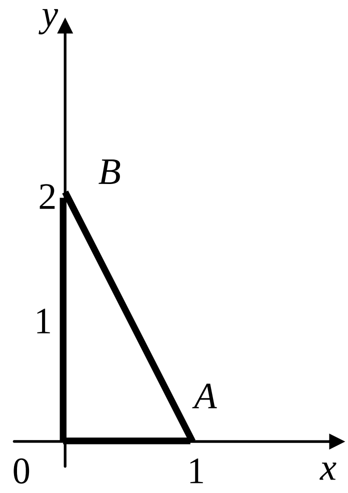


Рис. 1

Для вычисления интеграла воспользуемся свойством аддитивности области интегрирования:
$\int\limits_{OAB}(2x+y)dl=\int\limits_{AB}(2x+y)dl+\int\limits_{BO}(2x+y)dl+\int\limits_{OA}(2x+y)dl$
.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла: $\int\limits_{L} f(x;y)dl=\int\limits_{a}^{b} f(x;y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

На отрезке AB: $y=-2x+2$, $y'=-2$, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{5}\,dx$.

На отрезке BO: $x=0$, $x'=0$, $dl=\sqrt{1+x'^2}dy=dy$.

На отрезке OA: $y=0$, $y'=0$, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=dx$.

Учитывая, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от пути интегрирования и, используя формулу перехода к определенному интегралу, получаем

$$\int\limits_{L}(2x+y)dl=\int\limits_{0}^{1}(2x-2x+2)\sqrt{5}\,dx+\int\limits_{0}^{2}(2\cdot 0+y)dy+\int\limits_{0}^{1}(2x+0)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}2\sqrt{5}\,dx+\int\limits_{0}^{2}ydy+\int\limits_{0}^{1}2xdx=2\sqrt{5}\,x\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Big|_0^2+x^2\Big|_0^1=2\sqrt{5}+2+1=2\sqrt{5}+3$$

ОТВЕТ: $\int\limits_{L}(2x+y)dl=2\sqrt{5}+3$.

ПРИМЕР 7. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{L}(x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho=4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первом координатном углу.

РЕШЕНИЕ. Построим лепесток лемнискаты $\rho=4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первом координатном углу. По условию $\sin 2\varphi\geq 0$ или $\pi\,n\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}+\pi\,n$, где $n\in Z$. С учетом того, что лемниската расположена в первой четверти, получаем, что $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ (рис.2).

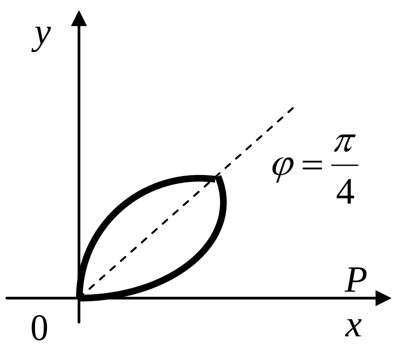


Рис.2

Линия задана уравнением в полярной системе координат, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид: $\int\limits_{L} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

Так как $\rho'=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}}\cos 2\varphi\cdot 2=\frac{4\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, то

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\sqrt{16\sin 2\varphi+\frac{16\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\;d\varphi=\frac{4d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{16d\varphi}{4\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{16d\varphi}{\rho}.$$

$$\int\limits_L (x+y)dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\frac{16d\varphi}{\rho}=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=16(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$=32$.

ОТВЕТ: $\int\limits_L (x+y)dl=32$.

ПРИМЕР 8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L ydl$, где L – первая арка циклоиды $x=2(t-\sin\ t),\ y=2(1-\cos\ t)$.

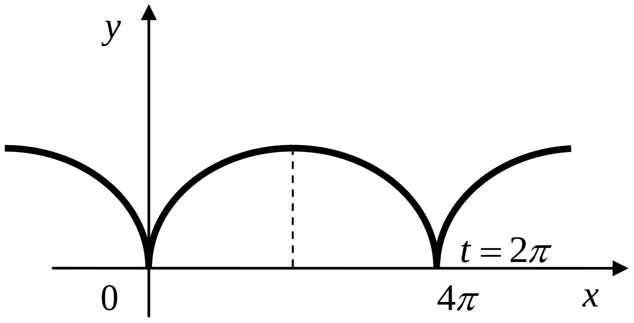


Рис.3

РЕШЕНИЕ. Построим первую арку циклоиды, для которой $0\le t\le 2\pi$ (рис. 3).

Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид:

$$\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

Так как $x'=2(1-\cos t)$ и $y'=2\sin t$, то

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{4(1-\cos t)^2+4\sin^2 t}\;dt=2\sqrt{2-2\cos t}\;dt=4\sin\frac{t}{2}dt.$$

Тогда

$$\int\limits_L ydl=\int\limits_0^{2\pi}2\cdot(1-\cos t)\cdot 4\cdot\sin\frac{t}{2}dt=8\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt-8\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cdot\cos t\,dt=-16\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}-$$
$$-4\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3\cdot t}{2}\right)dt=-16(-1-1)-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{8}{3}\cos\frac{3\cdot t}{2}\Big|_0^{2\pi}=32-8(-1-1)+$$
$$+\frac{8}{3}(-1-1)=32+16-\frac{16}{3}=\frac{128}{3}=42\frac{2}{3}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L ydl=42\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 9. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xydl$, где L – дуга винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=b\,t$, ограниченная точками, для которых $t=0,\quad t=\frac{5\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим винтовую линию (рис. 4). Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид:

$$\int\limits_L f(x;y;z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

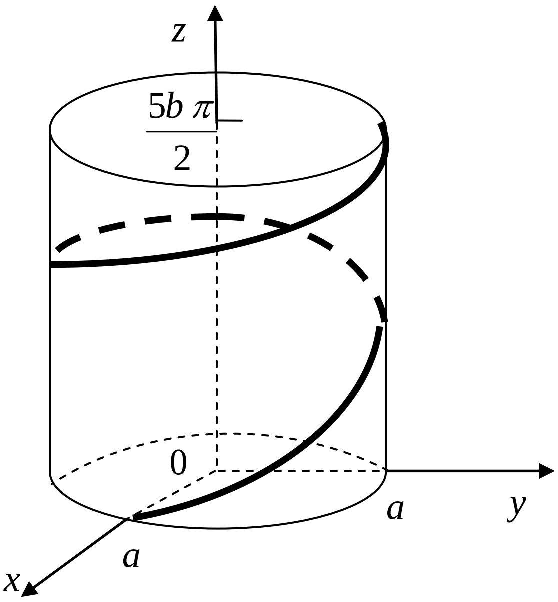


Рис. 4

Так как $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\;dt =$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\;dt = \sqrt{a^2 + b^2}\;dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L x\cdot y\,dl = \int\limits_0^{\frac{5\pi}{2}} a\cos t\, a\sin t\sqrt{a^2 + b^2}\;dt =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{\frac{5\pi}{2}}\sin 2t\;dt =$$

$$= -\frac{1}{4}a^2\sqrt{a^2 + b^2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}a^2\sqrt{a^2 + b^2}\cdot(-1-1) = \frac{1}{2}a^2\cdot\sqrt{a^2 + b^2}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L x\cdot y\,dl = \frac{1}{2}a^2\cdot\sqrt{a^2 + b^2}$.

ПРИМЕР 10. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L 4x^3dx + 3x^2\cdot y\,dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;9)$.

Решение. Построим заданную дугу с указанием направления обхода (рис. 5). Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

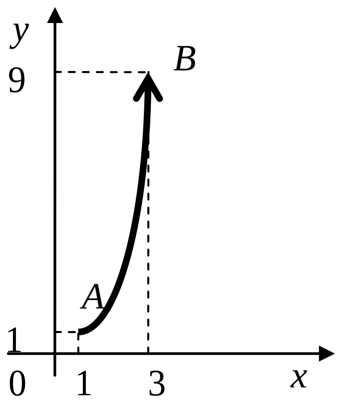


Рис.5

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x;y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b\left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\cdot y'(x)\right]dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L 4x^3dx + 3x^2\cdot y\,dy = \int\limits_1^3\left[4x^3 + 3x^2\cdot x^2\cdot 2x\right]dx =$$

$$= \int\limits_1^3\left[4x^3 + 6x^5\right]dx = \left[x^4 + x^6\right]_1^3 = 81 + 729 - 1 - 1 = 808.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L 4x^3dx + 3x^2\cdot y\,dy = 808$.

ПРИМЕР 11. Вычислить по определению криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(3;1)$ и $C(3;5)$, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{k}$ плоскости треугольника.

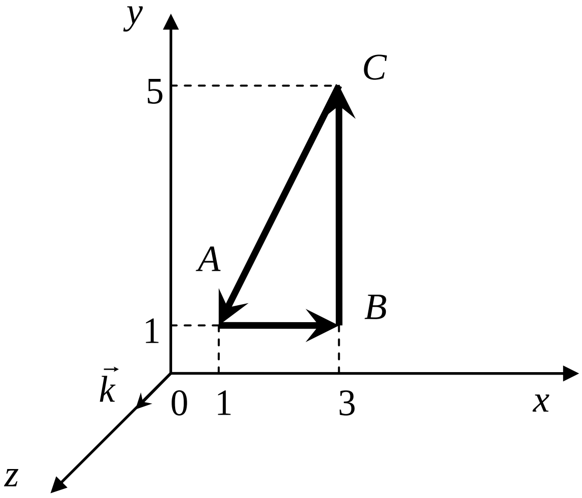


Рис.6

РЕШЕНИЕ. За положительное направление обхода по замкнутому контуру принимается такое направление, при котором область, ограниченная замкнутым контуром, остается слева, при движении по контуру, если смотреть с конца нормального вектора проведенного к области, ограниченной этим контуром. В методических указаниях, если специально не оговаривается, нормальным вектором контура, лежащим в плоскости Oxy, считается вектор $\vec{k}$. Если контур лежит в плоскости Oxz, то вектор $\vec{j}$. Если контур лежит в плоскости Oyz, то нормальным вектором будет вектор $\vec{i}$.

В нашем случае контур располагается в плоскости Oxy. Следовательно, если смотреть с конца вектора $\vec{k}$, движение по контуру осуществляется от точки A к точке B, от точки B к точке C, и от точки C к точке A. Контур треугольника изображен на рисунке 6, с указанием направления обхода по контуру.

Так как контур интегрирования состоит из отрезков AB, BC и CA, то

$$\oint\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy = \oint\limits_{AB} (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy +$$

$$+ \oint\limits_{BC} (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy + \oint\limits_{CA} (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy.$$

На отрезке AB: $y = 1,\ dy = 0,\ 1 \le x \le 3.$

На отрезке BC: $x = 3,\ dx = 0,\ 1 \le y \le 5.$

На отрезке CA: $y = 2x - 1,\ dy = 2\,dx,\ 3 \le x \le 1.$

Следовательно,

$$\oint\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy = \int\limits_1^3 (x^3 + 1)\,dx + (x + 1)\cdot 0 +$$

$$+ \int\limits_1^5 (27 + y)\cdot 0 + (3 + y^3)\,dy + \int\limits_3^1 (x^3 + 2x - 1)\,dx + (x + (2x - 1)^3)\,2dx =$$

$$= \int\limits_1^3 (x^3 + 1)\,dx + \int\limits_1^5 (3 + y^3)\,dy + \int\limits_3^1 (17x^3 - 24x^2 + 16x - 3)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 + \left(\frac{17x^4}{4} - 8x^3 + 8x^2 - 3x\right)\Bigg|_3^1 =$$

$$=\frac{81}{4}+3-\frac{1}{4}-1+15+\frac{625}{4}-3-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}-8+8-3-\frac{1377}{4}+216-72+9=0.$$

ОТВЕТ: $\oint\limits_L (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy=0$.

ПРИМЕР 12. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \frac{(y^3-x^2)\,dx+(x^3+y^2)\,dy}{x^2+y^2}$, где L – дуга окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

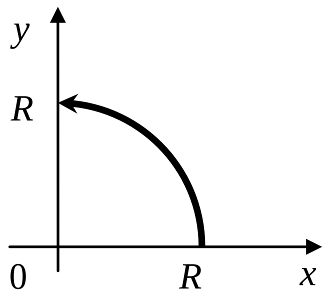


Рис. 7

РЕШЕНИЕ. Построим заданную дугу окружности с указанием направления обхода (рис. 7). Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)\right]dt.$$

В начале находим дифференциалы функций $x(t)$ и $y(t)$: $dx=-R\sin t\,dt$, $dy=R\cos t\,dt$. Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{(y^3-x^2)\,dx+(x^3+y^2)\,dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R^3\sin^3 t-R^2\cos^2 t)\cdot(-R\sin t)+(R^3\cos^3 t+R^2\sin^2 t)\cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^4\cos^4 t-R^4\sin^4 t+R^3\cos^2 t\sin t+R^3\sin^2 t\cos t}{R^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R^2(\cos^4 t-\sin^4 t)dt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos^2 t\sin t\,dt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin^2 t\cos t\,dt=$$

$$=R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\sin^2 t)\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)dt-R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d\cos t+R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,d\sin t=$$

$$=R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\cdot 1\,dt-\frac{R}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{R}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{R^2}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{R}{3}(0-1)+\frac{R}{3}(1-0)=\frac{R^2}{2}(0-0)+\frac{R}{3}+\frac{R}{3}=\frac{2R}{3}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L \frac{(y^3-x^2)\,dx+(x^3+y^2)\,dy}{x^2+y^2}=\frac{2R}{3}$.

ПРИМЕР 13. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

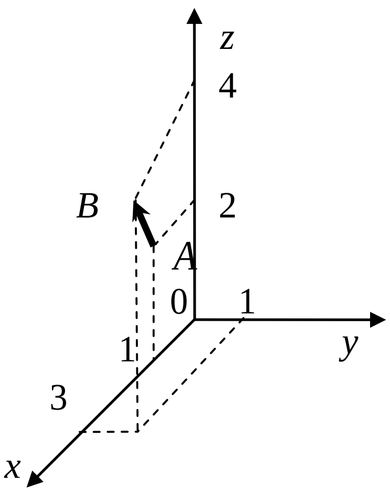


Рис. 8

РЕШЕНИЕ. Построим отрезок прямой с указанием направления движения (рис. 8). Составим уравнение прямой проходящей через точки A и B, для чего воспользуемся уравнением прямой проходящей через две точки.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

В нашем случае уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}(=t)$. Перейдем от канонического уравнения прямой к параметрическому уравнению.

$$\begin{cases} x=1+2t; \\ y=t; \\ z=2+2t. \end{cases}$$

Координаты точки A получаем при значении $t=0$, а координаты точки B при значении $t=1$. Следовательно, значение параметра t изменяется от 0 до 1.

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

$$\int\limits_L P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\left[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot y'(t)+R\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot z'(t)\right]dt.$$

В начале находим дифференциалы функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$: $dx=2dt$, $dy=dt$, $dz=2dt$. Следовательно,

$$\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz=$$

$$=\int\limits_0^1\left[t^2\cdot 2+((1+2t)^2+(2+2t))\cdot 1+(1+2t+t+(2+2t)^2)\cdot 2\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left[14t^2+28t+13\right]dt=\left(\frac{14}{3}t^3+14t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{14}{3}+14+13-0=\frac{95}{3}=31\frac{2}{3}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz=31\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 14. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz$, где L – дуга винтовой линии $x = b \cdot t$, $y = a\cos t$, $z = a\sin t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

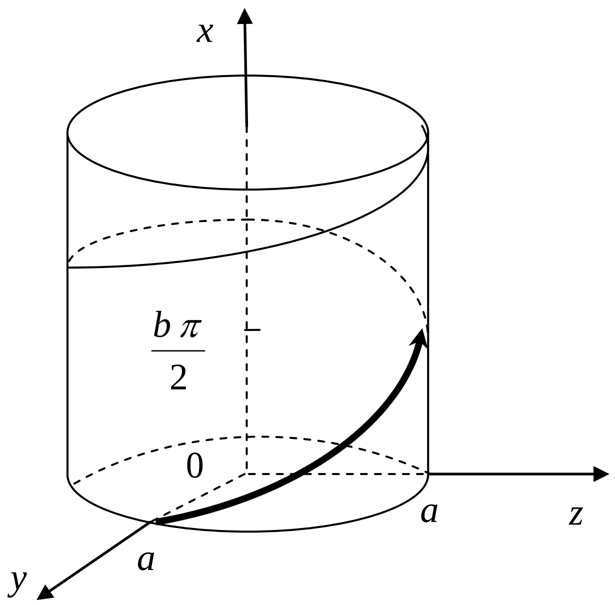


Рис. 9

РЕШЕНИЕ. Изобразим винтовую линию (рис. 9), с указанием направления движения по заданной линии. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу, которая указана в предыдущем примере.

В начале определим дифференциалы функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$:

$$dx = b\,dt,\ dy = -a\sin t\,dt,\ dz = a\cos t\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L (y^2 + z^2)\,dx - y \cdot z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\cdot b - a\cdot\cos t\cdot a\cdot\sin t\cdot(-a\cdot\sin\ t) + b\cdot t\cdot a\cdot\cos t\right]dt =$$

$$= a^2 b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt + ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = I$$

Первый интеграл табличный. Во втором интеграле функцию $\cos t$ подносим под знак дифференциала. При вычислении третьего интеграла применим формулу интегрирования по частям $\int\limits_\alpha^\beta u \quad d \quad v = u\cdot v\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v \quad d \quad u$.

$$I = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{bmatrix} = a^2 b\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,d\sin t + abt\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\,t\,dt =$$

$$= \frac{a^2 b\pi}{2} + \frac{a^3\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a\,b\pi}{2} + ab\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b\pi}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a\,b\pi}{2} - ab.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_L (y^2 + z^2)\,dx - y\cdot z\,dy + x\,dz = \dfrac{a^2 b\pi}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a\,b\pi}{2} - ab.$

ПРИМЕР 15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – контур треугольника ABC, с вершинами в точках $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$, при положительном направлении обхода.

РЕШЕНИЕ. За положительное направление обхода по замкнутому контуру принимается такое направление, при котором область, ограниченная замкнутым контуром, остается слева, при движении по контуру, если смотреть с конца нормального вектора проведенного к области, ограниченной этим контуром.

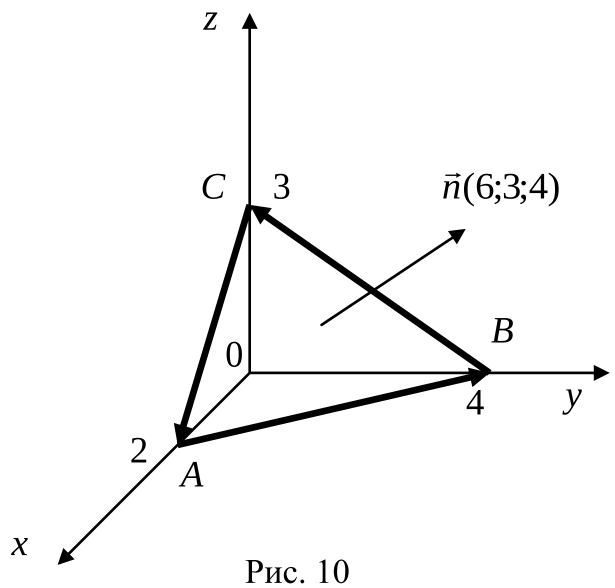


Рис. 10

Найдем нормальный вектор плоскости, в которой лежит контур треугольника. Для определения уравнения плоскости воспользуемся уравнением плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

В общем виде уравнение плоскости имеет вид $6x + 3y + 4z - 12 = 0$. Следовательно, нормальный вектор плоскости имеет координаты: $\vec{n}(6;3;4)$. Если смотреть с конца нормального вектора, движение по контуру осуществляется от точки A к точке B, от точки B к точке C, и от точки C к точке A

Построим заданный контур, с указанием направления обхода по нему (рис.10). Используя свойство аддитивности области интегрирования, исходный интеграл представим в виде суммы трех интегралов.

$$\oint\limits_L ydx + zdy + xdz = \int\limits_{AB} ydx + zdy + xdz + \int\limits_{BC} ydx + zdy + xdz + \int\limits_{CA} ydx + zdy + xdz.$$

Найдем криволинейные интегралы, по каждой из дуг.

AB: $z = 0$, $dz = 0$, $y = 4 - 2x$, $dy = -2dx$, переменная x изменяется от 2 до 0. $\int\limits_{AB} ydx + zdy + xdz = \int\limits_2^0 (4 - 2x)dx = (4x - x^2)\Big|_2^0 = 0 - (8 - 4) = -4$.

BC: $x = 0$, $dx = 0$, $z = 3 - \frac{3}{4}y$, $dz = -\frac{3}{4}dy$, переменная y изменяется от 4 до 0. $\int\limits_{BC} ydx + zdy + xdz = \int\limits_4^0 (3 - \frac{3}{4}y)dy = (3y - \frac{3}{8}y^2)\Big|_4^0 = 0 - (12 - 6) = -6$.

CA: $y = 0$, $dy = 0$, $z = 3 - \frac{3}{2}x$, $dz = -\frac{3}{2}dx$, переменная x изменяется от 0 до 2. $\int\limits_{AB} ydx + zdy + xdz = -\frac{3}{2}\int\limits_0^2 xdx = -\frac{3}{4}x^2\Big|_0^2 = -3$.

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = -4 - 6 - 3 = -13.$$

ОТВЕТ: $\oint_L ydx + zdy + xdz = -13$.

ТЕМА 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРИМЕР 16. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_\sigma \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$, где σ – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим заданную поверхность на рисунке 11. Так как поверхность задана уравнением $z = z(x;y)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу.

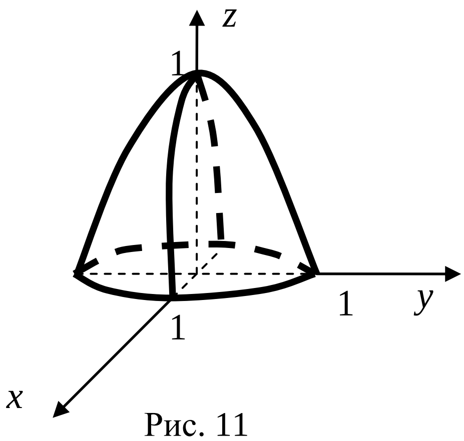


Рис. 11

$$\iint_\sigma f(x;y;z)d\sigma = \iint_G f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

где G – проекция поверхности σ на плоскость Oxy.

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, то

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

Проекцией заданной части параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ на плоскость Oxy является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (получено из уравнений поверхности и плоскости). Следовательно, областью G, которая рассматривается в выше указанной формуле перехода к двойному интегралу, является круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Вычислим заданный поверхностный интеграл.

$$\iint_\sigma \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma = \iint_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_G (1+4x^2+4y^2)\,dxdy = I$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. При этом в области G полярный радиус ρ изменяется от 0 до 1, а полярный угол от 0 до 2π.

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi.$$

$$I=\iint\limits_G(1+4x^2+4y^2)\,dxdy=\iint\limits_G(1+4\rho^2)\,\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho+4\rho^3)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\,\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\cdot 2\pi=3\pi\,.$$

ОТВЕТ: $\iint\limits_\sigma\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma=3\pi$.

ПРИМЕР 17. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_\sigma(2+2x-6y+8z)d\sigma$, где σ – часть плоскости $6x+3y+4z-12=0$, отсеченная координатными плоскостями $x=0$, $y=0$ $z=0$.

РЕШЕНИЕ. Заданная поверхность изображена на рисунке 10. Запишем уравнение плоскости в виде:

$$z=3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y.$$

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу, которая указана в предыдущем примере.

Так как, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{3}{4}$, то

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{61}}{4}\,dxdy$$

Проекцией заданной части плоскости $z=3-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{4}y$ на плоскость Oxy является область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $y=4-2x$. Следовательно, областью G, которая представляет проекцию поверхности σ на плоскость Oxy, является треугольник, ограниченный выше указанными прямыми (рис.12).

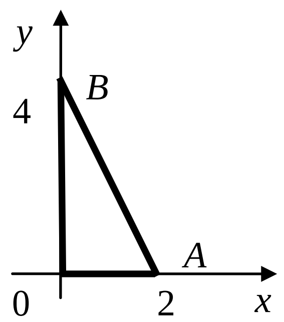


Рис.12

Вычислим заданный поверхностный интеграл.

$$\iint\limits_\sigma(2+2x-6y+8z)d\sigma=$$

$$\iint\limits_G(2+2x-6y+8(3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y))\frac{\sqrt{61}}{4}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{4}\iint\limits_G(26-10x-12y)dxdy=\frac{\sqrt{61}}{4}\int\limits_0^2dx\int\limits_0^{4-2x}(26-10x-12y)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{4}\int\limits_0^2(26y-10xy-6y^2)\Big|_0^{4-2x}dx=\frac{\sqrt{61}}{4}\int\limits_0^2(26(4-2x)-10x(4-2x)-6(4-2x)^2)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{4}\int\limits_0^2(8+4x-4x^2)dx=\frac{\sqrt{61}}{4}\left(8x+2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{61}}{4}\left(16+8-\frac{32}{3}\right)-0=\frac{10\sqrt{61}}{3}\,.$$

ОТВЕТ: $\iint\limits_{\sigma}(2+2x-6y+8z)d\sigma=\dfrac{10\sqrt{61}}{3}$.

ПРИМЕР 18. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma$, где σ – конечная часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=1$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим заданную поверхность на рисунке 13. Так как поверхность задана уравнением $y=y(x;z)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу

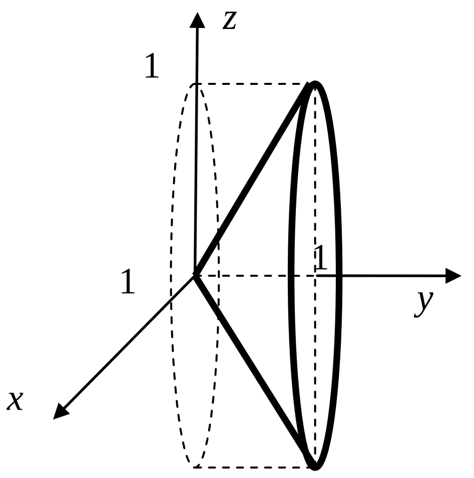


Рис. 13

$$\iint\limits_{\sigma}f(x;y;z)d\sigma=$$

$$\iint\limits_{G}f(x;y(x;z);z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz,$$

где G – проекция поверхности σ на плоскость Oxz.

Так как $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$,

то

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz=\sqrt{2}\,dxdz$$

Проекцией заданной части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$ на плоскость Oxz является область, ограниченная окружностью $x^2+z^2=1$ (получено из уравнений поверхности и плоскости $y=1$). Следовательно, областью G, которая рассматривается в выше указанной формуле перехода к двойному интегралу, является круг $x^2+z^2\le 1$.

Вычислим заданный поверхностный интеграл.

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma=\iint\limits_{G}(x^2+x^2+z^2+z^2)\sqrt{2}\,dxdz=2\sqrt{2}\iint\limits_{G}(x^2+z^2)dxdz=I.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $z=\rho\cos\varphi,\ x=\rho\sin\varphi$. При этом в области G полярный радиус ρ изменяется от 0 до 1, а полярный угол от 0 до 2π.

$$x^2+z^2=\rho^2,\quad dxdz=\rho d\rho d\varphi.$$

$$I=2\sqrt{2}\iint\limits_{G}(x^2+z^2)\,dxdz=2\sqrt{2}\iint\limits_{G}\rho^3d\rho d\varphi=2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{2\pi}\rho^4\Big|_0^1d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi=\sqrt{2}\,\pi.$$

ОТВЕТ: $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma=\sqrt{2}\,\pi$.

ПРИМЕР 19. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma}(xy+xz)d\sigma$, где σ – конечная часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=1$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим заданную поверхность на рисунке 14. Так как поверхность задана уравнением $x=x(y;z)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу.

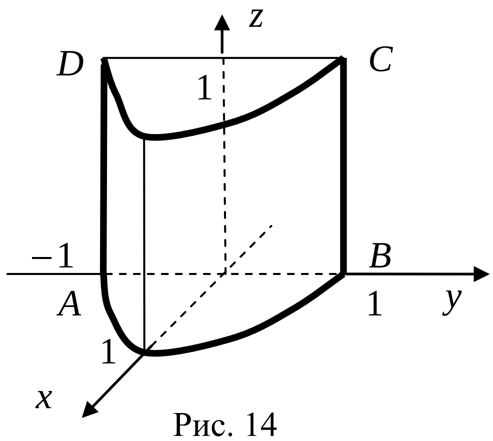


Рис. 14

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma=$$

$$\iint\limits_{G} f(x(y;z);y;z))\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\;dydz,$$ где

G – проекция поверхности σ на плоскость Oyz. Так как $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial z}=0$, то

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\;dydz=\sqrt{1+(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}})^2+0^2}\;dydz=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz.$$

Проекцией заданной части эллиптического цилиндра $x=\sqrt{1-y^2}$ на плоскость Oyz является прямоугольник $ABCD$ (область G), определяемый неравенствами $-1\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$. Вычислим искомый поверхностный интеграл первого рода.

$$\iint\limits_{\sigma}(xy+xz)d\sigma=\iint\limits_{G}\left(\sqrt{1-y^2}\cdot y+\sqrt{1-y^2}\cdot z\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz=\iint\limits_{G}(y+z)dydz=$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{1}(y+z)dz=\int_{-1}^{1}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int_{-1}^{1}\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=1.$$

ОТВЕТ: $\iint\limits_{\sigma}(xy+xz)d\sigma=1$.

ПРИМЕР 20. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где σ – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим заданную сферу на рисунке 15.

Исходный интеграл представляет сумму трех интегралов.

$$I_1=\iint\limits_{\sigma} x^2dydz,\ I_2=\iint\limits_{\sigma} y^2dzdx,\ I_3=\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy.$$

Вычислим первый интеграл $I_1=\iint\limits_{\sigma} x^2dydz$. В этом случае уравнение сферы будет иметь вид:

$$x-a=\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2},$$

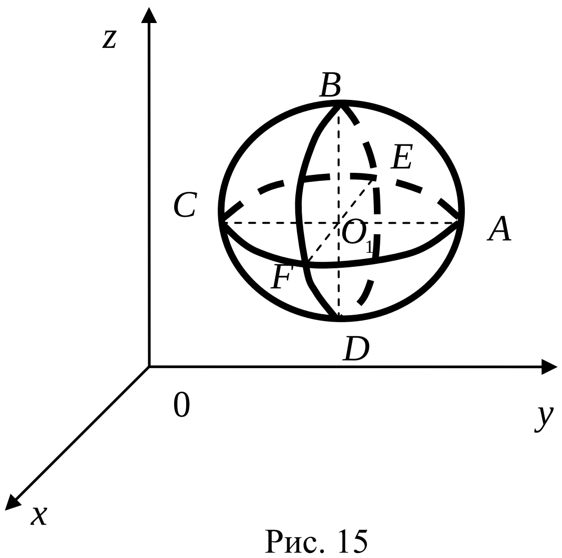


Рис. 15

где знак «плюс» берем, когда рассматриваем ближнюю полусферу, а знак «минус», когда дальнюю полусферу. Подынтегральную функцию представим в виде

$$x^2=(x-a)^2+a^2+2a(x-a).$$

Обозначим через σ_1 внешнюю сторону ближней полусферы $ABCDF$ (рис.15), через σ_2 внешнюю сторону дальней полусферы, через G – проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz (это круг, ограниченный окружностью $(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$).

Учитывая, что выражение $x-a$ меняет знак при переходе от одной полусферы к другой, находим первый интеграл.

$$I_1=\iint\limits_{\sigma} x^2dydz=\iint\limits_{\sigma_1}\left[(x-a)^2+a^2+2a(x-a)\right]dydz-\iint\limits_{\sigma_2}\left[(x-a)^2+a^2-2a(x-a)\right]dydz=$$

$$=4a\iint\limits_{G}(x-a)dydz=4a\iint\limits_{G}\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}\,dydz.$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам по формулам

$$y-b=\rho\cos\varphi,\quad z-c=\rho\sin\varphi.$$

При этом

$$(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,\quad dydz=\rho d\rho d\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le R.$$

Тогда

$$I_1=4a\iint\limits_{G}\sqrt{R^2-\rho^2}\ \rho d\rho d\varphi=4a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\sqrt{R^2-\rho^2}\ \rho d\rho=$$

$$=-2a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\sqrt{R^2-\rho^2}\ d(R^2-\rho^2)=-\frac{4a}{3}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(R^2-\rho^2\right)^3}\Big|_0^R d\varphi=\frac{4aR^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{4aR^3}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi aR^3.$$

Аналогично вычисляем остальные два интеграла:

$$I_2 = \iint_\sigma y^2 dzdx = \frac{8}{3}\pi bR^3,\ I_3 = \iint_\sigma z^2 dxdy = \frac{8}{3}\pi cR^3.$$

Следовательно,

$$\iint_\sigma x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b+c).$$

ОТВЕТ: $\iint_\sigma x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b+c)$.

ПРИМЕР 21. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_\sigma (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, где σ – верхняя сторона поверхности, вырезанной цилиндром $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ из сферы $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R > a,\quad z > 0)$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим заданную поверхность на рисунке 16. Для вычисления поверхностного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к поверхностному интегралу первого рода.

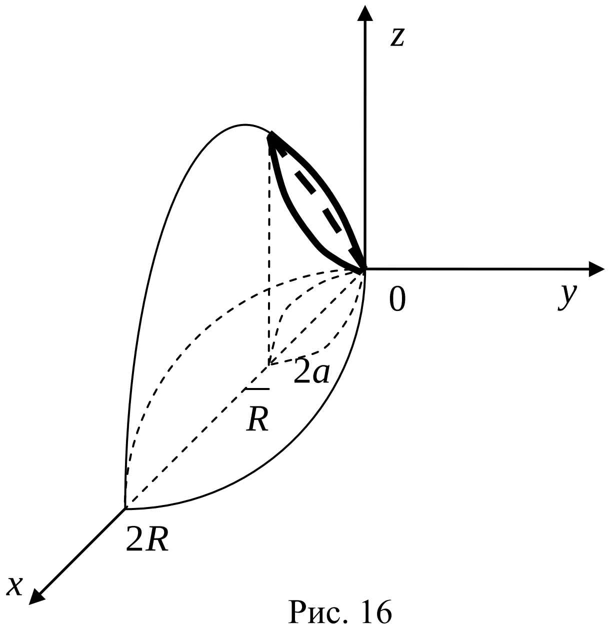


Рис. 16

$$\iint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$
$$= \iint_\sigma \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]d\sigma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора, направленного в ту сторону поверхности, по которой берется поверхностный интеграл второго рода.

Введем обозначение

$$F(x;y;z) = (x-R)^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

По формуле, связывающей поверхностные интегралы обоих родов, имеем

$$\iint_\sigma (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy =$$
$$= \iint_\sigma \left[(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma\right]d\sigma = I.$$

Найдем направляющие косинусы.

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2(x-R)}{\sqrt{\left(2(x-R)\right)^2 + \left(2y\right)^2 + \left(2z\right)^2}} = \frac{x-R}{R};$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2y}{\sqrt{(2(x-R))^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{y}{R};$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2z}{\sqrt{(2(x-R))^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{z}{R}.$$

Тогда $I=\iint\limits_{\sigma}\left[(y-z)\cdot\frac{x-R}{R}+(z-x)\cdot\frac{y}{R}+(x-y)\cdot\frac{z}{R}\right]d\sigma=$

$$=\iint\limits_{\sigma}\frac{yx-zx-Ry+Rz+zy-xy+xz-yz}{R}d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\frac{Rz-Ry}{R}d\sigma=\iint\limits_{\sigma}(z-y)d\sigma.$$

Так как поверхность симметрична относительно плоскости Oxz, то

$$\iint\limits_{\sigma}yd\sigma=0,\text{ а } I=\iint\limits_{\sigma}z\,d\sigma.$$

Из условия уравнение поверхности имеет вид: $z=\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}$. Найдем $d\sigma$.

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dxdy=$$

$$=\sqrt{1+\left(-\frac{x-R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}\right)^2}dxdy=$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy.$$

Проекцией рассматриваемой части шара $z=\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}$, вырезанной цилиндром $(x-a)^2+y^2=a^2$, на плоскость Oxy является область G, ограниченная окружностью $(x-a)^2+y^2=a^2$.

Следовательно, $I=\iint\limits_{\sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=\iint\limits_{\sigma}z\,d\sigma=$

$$=\iint\limits_{G}\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy=R\iint\limits_{G}dxdy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x-a=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi$. В области G, полярный угол φ изменяется от 0 до 2π, а полярный радиус-вектор от 0 до a.

Тогда $I=R\iint\limits_{G}dxdy=R\iint\limits_{G}\rho\,d\rho\,d\varphi=R\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{a}\rho\,d\rho=$

$$= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\Big|_0^a d\varphi = \frac{Ra^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Ra^2}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi Ra^2.$$

ОТВЕТ: $\iint\limits_{\sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = \pi Ra^2$.

ТЕМА 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ПРИМЕР 22. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды $OABC$, используя определение потока. Вершины пирамиды располагаются в точках $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

РЕШЕНИЕ. Пирамида ограничена гранями OAB, OBC, OAC и ABC. Первые три грани представляют собой треугольники, лежащие в координатных плоскостях Oxy, Oyz и Oxz, соответственно. Найдем уравнение плоскости, в которой лежит контур треугольника ABC. Для определения уравнения плоскости воспользуемся уравнением плоскости в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Общий вид уравнения плоскости ABC: $6x + 3y + 4z - 12 = 0$. Следовательно, нормальный вектор этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(6;3;4)$. Заданная пирамида изображена на рисунке 17.

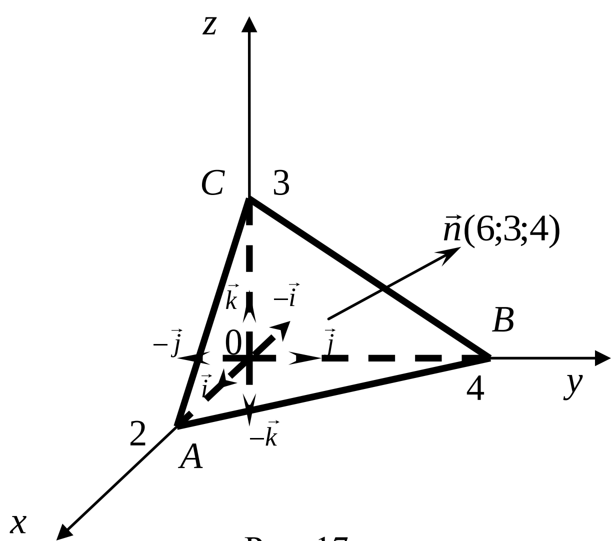


Рис. 17

Поток векторного поля через полную поверхность пирамиды $OABC$, в направлении внешней нормали, равен сумме потоков векторного поля через грани OAB, OBC, OAC и ABC:

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC}.$$

Найдем потоки векторного поля через каждую грань. По определению поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0\, dS$.

Рассмотрим грань OAB, которая лежит в плоскости $z = 0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{k}$, $dS = dxdy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0 = \Big((x+y)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + (x-y)\vec{k}\Big)\cdot\Big(-\vec{k}\Big) = y - x.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAB равен

$$\varPi_{OAB}=\iint\limits_{\Delta OAB}(y-x)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}(y-x)dy=\int\limits_0^2\left(\frac{y^2}{2}-xy\right)\Bigg|_0^{4-2x}dx=\int\limits_0^2(4x^2-12x+8)dx=$$

$$=\left(\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Рассмотрим грань OBC, которая лежит в плоскости $x=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0=-\vec{i}$, $dS=dydz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0=\left((y-z)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{i}\right)=z-y.$$

Тогда поток векторного поля через грань OBC равен

$$\varPi_{OBC}=\iint\limits_{\Delta OBC}(z-y)dydz=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{3-\frac{3}{4}y}(z-y)dz=\int\limits_0^4\left(\frac{z^2}{2}-yz\right)\Bigg|_0^{3-\frac{3}{4}y}dy=$$

$$=\int\limits_0^4\left(\frac{33}{32}y^2-\frac{21}{4}y+\frac{9}{2}\right)dy=\left(\frac{11}{32}y^3-\frac{21}{8}y^2+\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^4=-2.$$

Рассмотрим грань OAC, которая лежит в плоскости $y=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0=-\vec{j}$, $dS=dxdz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0=\left((x-z)\vec{i}+(2x+z)\vec{j}+(x+z)\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{j}\right)=-2x-z.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAC равен

$$\varPi_{OAC}=-\iint\limits_{\Delta OAC}(z+2x)dxdz=-\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x}(z+2x)dz=-\int\limits_0^2\left(\frac{z^2}{2}+2xz\right)\Bigg|_0^{3-\frac{3}{2}x}dx$$

$$=-\int\limits_0^2\left(-\frac{15}{8}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)dx=-\left(-\frac{5}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x\right)\Bigg|_0^2=-7.$$

Рассмотрим грань ABC, которая лежит в плоскости $6x+3y+4z-12=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0=\dfrac{6\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{36+9+16}}=\dfrac{6}{\sqrt{61}}\vec{i}+\dfrac{3}{\sqrt{61}}\vec{j}+\dfrac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Найдем $dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy$. По условию $z=3-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{4}y$, следовательно, $z'_x=-\dfrac{3}{2}$, $z'_y=-\dfrac{3}{4}$. Тогда $dS=\sqrt{1+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{16}}dxdy=\dfrac{\sqrt{61}}{4}dxdy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0=\left((x+y-z)\vec{i}+(2x+y+z)\vec{j}+(x-y+z)\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{61}}\left(15x+\frac{21}{2}y-18+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}y+9-2x-7y+12\right)=\frac{1}{\sqrt{61}}\left(\frac{29}{2}x+\frac{17}{4}y+3\right).$$

Тогда поток векторного поля через грань ABC равен

$$\Pi_{ABC}=\iint\limits_{\Delta OAB}\frac{1}{\sqrt{61}}\left(\frac{29}{2}x+\frac{17}{4}y+3\right)\frac{\sqrt{61}}{4}dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}\left(\frac{29}{8}x+\frac{17}{16}y+\frac{3}{4}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{29}{2}xy-\frac{17}{8}y^2+3\right)\Bigg|_0^{4-2x}dx=\int\limits_0^2\left(-\frac{41}{8}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{23}{2}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{41}{24}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{23}{2}x\right)\Bigg|_0^2=\frac{55}{3}$$

Следовательно, поток векторного поля через внешнюю поверхность пирамиды равен

$$\Pi_{OABC}=\Pi_{OAB}+\Pi_{OBC}+\Pi_{OAC}+\Pi_{ABC}=\frac{8}{3}-2-7+\frac{55}{3}=12$$

Ответ: $\Pi_{OABC}=12$.

ПРИМЕР 23. Вычислить поток векторного поля, который определен вектором $\vec{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}+(2x+y+z)\vec{j}+(x-y+z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды $OABC$, используя теорему Остроградского-Гаусса. Вершины пирамиды располагаются в точках $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

РЕШЕНИЕ. Условие задачи соответствуют примеру 22, но заданный поток векторного поля необходимо вычислить по теореме Остроградского-Гаусса: $\Pi=\iint\limits_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}^0dS=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{a}(M)\,dxdydz$, то есть поток Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ, в направлении внешней нормали, численно равен тройному интегралу от дивергенции заданного поля по области Ω, которая ограничивает поверхность σ (рис.17). Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M)=P(x;y;z)\,\vec{i}+Q(x;y;z)\,\vec{j}+R(x;y;z)\,\vec{k}$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P(x;y;z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(x+y-z)}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial(2x+y+z)}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x-y+z)}{\partial z}=1.$$

Следовательно,

$$\Pi_{OABC}=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}dy\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y}dz=$$

$$=3\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}z\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y}dy=3\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}\left(3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y\right)dy=3\int\limits_0^2\left(3y-\frac{3}{2}xy-\frac{3}{8}y^2\right)\Bigg|_0^{4-2x}dx=$$

$$=3\int\limits_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-6x+6\right)dx=3\left(\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x\right)\Bigg|_0^2=3(4-12+12)-0=12.$$

ОТВЕТ: $П_{OABC} = 12$.

ПРИМЕР 24. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ по контуру треугольника ABC при положительном направлении обхода относительно нормального вектора (к плоскости треугольника ABC) $\vec{n}$, составляющего с осью Oz острый угол, по определению циркуляции векторного поля. Вершины контура располагаются в точках $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

РЕШЕНИЕ. Контур треугольника ABC, с направлением обхода по нему, изображен на рисунке 10. Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле $Ц = \oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau}^0 dl = \oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}$. Используя свойство аддитивности области интегрирования, получаем, что $Ц = \oint\limits_{ABCA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{AB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} + \int\limits_{BC} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} + \int\limits_{CA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}$.

На отрезке AB получаем: $z = 0$, $y = 4 - 2x$, $dy = -2dx$, x лежит от 2 до 0, $\overrightarrow{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = (x + y)dx + (2x + y)dy$,

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{AB} (x + y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_2^0 (x + 4 - 2x)dx + (2x + 4 - 2x) \cdot (-2)dx =$$

$$= \int\limits_2^0 (-x - 4)dx = \left(-\frac{x^2}{2} - 4x \right)\Bigg|_2^0 = 0 - (-2 - 8) = 10.$$

На отрезке BC получаем: $x = 0$, $z = 3 - \frac{3}{4}y$, $dz = -\frac{3}{4}dy$, y лежит от 4 до 0, $\overrightarrow{dl} = dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = (y + z)dy + (z - y)dz$,

$$\int\limits_{BC} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{BC} (y + z)dy + (z - y)dz = \int\limits_4^0 \left(y + 3 - \frac{3}{4}y \right)dy + \left(3 - \frac{3}{4}y - y \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right)dy =$$

$$= \int\limits_4^0 \left(\frac{25}{16}y + \frac{3}{4} \right)dy = \left(\frac{25}{32}y^2 + \frac{3}{4}y \right)\Bigg|_4^0 = 0 - \left(\frac{25}{2} + 3 \right) = -\frac{31}{2}.$$

На отрезке CA получаем: $y = 0$, $z = 3 - \frac{3}{2}x$, $dz = -\frac{3}{2}dx$, x лежит от 0 до 2, $\overrightarrow{dl} = dx \cdot \vec{i} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = (x - z)dx + (x + z)dz$,

$$\int\limits_{CA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{CA} (x - z)dx + (x + z)dz = \int\limits_0^2 \left(x - 3 + \frac{3}{2}x \right)dx + \left(x + 3 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)dx =$$

$$=\int_0^2\left(\frac{13}{4}x-\frac{15}{2}\right)dx=\left(\frac{13}{8}x^2-\frac{15}{2}x\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{13}{2}-15\right)-0=-\frac{17}{2}.$$

Следовательно, $Ц=10-\frac{31}{2}-\frac{17}{2}=-14$.

ОТВЕТ. $Ц=-14$.

ПРИМЕР 25. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}+(2x+y+z)\vec{j}+(x-y+z)\vec{k}$ по контуру треугольника ABC при положительном направлении обхода относительно нормального вектора (к плоскости треугольника ABC) $\vec{n}$, составляющего с осью Oz острый угол, по теореме Стокса. Вершины контура располагаются в точках $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

РЕШЕНИЕ. Контур треугольника ABC, с направлением обхода по нему, изображен на рисунке 10. Вычислим циркуляцию векторного поля по теореме Стокса, которая в векторной форме имеет вид:

$$Ц=\oint_\gamma \vec{a}\cdot\vec{\tau}^0 dl=\iint_\sigma \mathrm{rot}\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0 dS,$$

то есть циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность σ, краем которого является контур γ. В условиях задачи контур γ представляет собой контур $ABCA$. В качестве поверхности σ, краем которого является контур γ, выберем треугольник ABC. Найдем ротор векторного поля.

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+y-z & 2x+y+z & x-y+z\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}.$$

Нормальный единичный вектор $\vec{n}^0=\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$ определен в примере 23. Тогда

$$rot\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n}^0=\left(-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}\right)=-\frac{14}{\sqrt{61}}.$$

Элемент $dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{61}}{4}dxdy$ определен в примере 23.

Следовательно,

$$Ц=\iint_\sigma\left(-\frac{14}{\sqrt{61}}\right)dS=\iint_{OAB}\left(-\frac{14}{\sqrt{61}}\cdot\frac{\sqrt{61}}{4}\right)dxdy=-\frac{7}{2}\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}dy=$$

$$=-\frac{7}{2}\int_0^2 y\Big|_0^{4-2x}dx=-\frac{7}{2}\int_0^2(4-2x)dx=-\frac{7}{2}(4x-x^2)\Big|_0^2=-\frac{7}{2}\cdot(8-4)+\frac{7}{2}\cdot 0=-14.$$

ОТВЕТ. $Ц = -14$.

ТЕМА 5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

ПРИМЕР 26. Используя достаточные признаки сходимости, исследовать на сходимость числовые ряды с положительными членами

а) $1 + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

б) $\frac{5}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{9}\left(\frac{10}{9}\right)^{18} + \ldots + \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{n^4+n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{n^4+n}$;

в) $\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{2n(3n-1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}$.

Решение: а) для исследования на сходимость данного ряда воспользуемся признаком сходимости Даламбера.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

1) $l < 1$, ряд сходится;
2) $l > 1$, ряд расходится;
3) $l = 1$, требуются дополнительные исследования.

Общий член исходного ряда $a_n = n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Член a_{n+1} получится из a_n заменой в нем n на $n+1$, т. е. $a_{n+1} = (n+1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$. Составим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \frac{3^{n-1}(n+1)}{3^n n} = \frac{1}{3}\frac{n+1}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится;

б) для исследования на сходимость данного ряда воспользуемся радикальным признаком сходимости Коши.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, то

1) $l < 1$, ряд сходится;

2) $l>1$, ряд расходится;

3) $l=1$, требуются дополнительные исследования.

Общий член исходного ряда $a_n=\frac{5^n}{3^n}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{n^4+n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n}{3^n}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{n^4+n}}=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{n^3+1}=$$

$$=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^3+2}{n^3+1}-1\right)^{n^3+1}=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3+1}\right)^{n^3+1}=\frac{5}{3}\cdot e>1.$$

По радикальному признаку Коши ряд расходится.

При нахождении предела мы воспользовались вторым замечательным пределом $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N=e$;

в) для исследования на сходимость данного ряда воспользуемся интегральным признаком сходимости Коши. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ монотонно убывают и функция $y=f(x)$, непрерывная на интервале $[a;+\infty)$, такая, что $f(n)=a_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Общий член исходного ряда $a_n=\frac{1}{2n(3n-1)}$. Члены ряда можно рассматривать как значения функции $f(x)=\frac{1}{2x(3x-1)}$ при значениях аргумента $x=1,2,3,4,\ldots$

Данная функция выполняет все требования, наложенные на нее в интегральном признаке Коши. Функция терпит разрыв в точках $x=0$ и $x=1/3$, но они не принадлежат интервалу $[1;+\infty)$, а, следовательно, на этом интервале функция непрерывна. Производная функции $\left(f'(x)=\frac{2-12x}{(6x^2-2x)^2}\right)$ на этом интервале отрицательна, т. е. функция убывает, а значит, монотонно убывают и члены ряда. Найдем несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x(3x-1)}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{2x(3x-1)}=-\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{(3x-1-3x)dx}{2x(3x-1)}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\left(-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(3x-1)}\right)dx=$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln(3x-1)\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-\ln b+\ln(3b-1)-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Так как исследуемый интеграл сходится (т. е. имеет конечное значение), то по интегральному признаку Коши исходный ряд сходится.

Ответ: а) сходится; б) расходится; в) сходится.

ПРИМЕР 27. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}(x+6)^n$.

Решение. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ определяется двойным неравенством $-R<x-x_0<R$, где радиус сходимости R находят по формулам $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Найдем радиус сходимости заданного степенного ряда. Так как, $a_n=\frac{1}{n5^n}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}$ то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)5^{n+1}}{n5^n}\right|=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=5\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=5\cdot 1=5.$$

Итак, $-5<x+6<5$ или $-11<x<-1$. Следовательно, интервал сходимости ряда $(-11;-1)$. Для определения области сходимости ряда, исследуем ряд на концах полученного интервала, то есть в точках $x=-1$ и $x=-11$.

В точке $x=-1$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+6)^n}{n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Полученный ряд является гармоническим, а, следовательно, расходится.

В точке $x=-11$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-11+6)^n}{n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Полученный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, т. к. выполняются два условия теоремы:

1) $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$, т.е. $a_n>a_{n+1}$, члены ряда убывают по абсолютной величине;

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Таким образом, областью сходимости ряда является интервал $[-11;-1)$.

Ответ: $[-11;-1)$.

ПРИМЕР 28. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ приближенно с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}0001$, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

Решение. Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{16}}$. Для приближенного его вычисления применим биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

который сходится при $x \in (-1;1)$. Полагая $x = \dfrac{1}{16}$ и $m = \dfrac{1}{4}$ имеем

$$2\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3} - \ldots\right).$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ найдем член ряда не превосходящий по абсолютной величине $0{,}0001$, так как по следствию из теоремы Лейбница остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена. Оставляем первые три члена полученного ряда, так как $2a_4 \approx 0{,}00002 < 0{,}0001$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0{,}01562 - 0{,}00036) \approx 2{,}0305.$$

Ответ. $2{,}0305$.

ПРИМЕР 29. С точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

Решение. Пользуясь рядом Маклорена для функции $y = \cos x$, заменяя в котором x на $\sqrt{x}$, имеем

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{(2n)!} + \ldots$$

Интегрируя в указанных пределах, получим

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{(2n)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot(2n)!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \frac{1}{4\cdot 6!} + \frac{1}{5\cdot 8!} - \ldots$$

Пятый член этого знакочередующегося сходящегося ряда меньше $0{,}0001$. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму первых четырех членов ряда (на основании следствия из теоремы Лейбница).

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx \approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880} \approx 0,7635.$$

Ответ: $0,7635$

ПРИМЕР 30. Воспользовавшись разложением функции $f(x)=x^2$ в ряд Фурье в интервале $[-\pi;\pi]$, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Решение. Рядом Фурье функции $y=f(x)$ с периодом $T=2l$ называется тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где $a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $k=0,1,2,...$

В условиях данной задачи $l=\pi$. Так как, заданная функция четная, то разложение произведем по косинусам, т.е. коэффициенты $b_k=0$, а коэффициенты a_0 и a_k определяются по формулам $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$.

Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos kxdx & v=\frac{1}{k}\sin kx\end{bmatrix}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi\cdot k}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin kxdx & v=-\frac{1}{k}\cos kx\end{bmatrix}=\frac{4x}{\pi\cdot k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{4}{\pi\cdot k^2}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx=(-1)^k\frac{4}{k^2}-\frac{4}{\pi\cdot k^3}\sin kx\Big|_0^{\pi}=(-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

Поэтому для $x\in[-\pi;\pi]$, заданная функция разлагается в ряд Фурье:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Тогда при $x=\pi$ имеем $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos k\pi}{k^2}$ или $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Ответ. $\frac{\pi^2}{6}$.