

# Тема2. «Нелинейные уравнения»

*Кафедра теоретической и  
прикладной математики.*

разработана доц. Е.Б.Дуниной

# 2.1. Уравнения с одним неизвестным

Нелинейные уравнения можно разделить на два класса - *алгебраические и трансцендентные*.

Алгебраическими уравнениями называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные).

В частности, многочлен является целой алгебраической функцией.

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются трансцендентными.

**Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые и итерационные.**

**Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы).**

**Алгоритм нахождения корня с помощью итерационного метода состоит из двух этапов:**

- а) отыскания приближенного значения корня или содержащего его отрезка;**
- б) уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности.**

**Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения  $x_0$ .**

**Каждый такой шаг называется итерацией.**

## 2.2 Метод деления отрезка пополам (метод бисекции)

Допустим нам удалось найти отрезок  $[a, b]$ ,  
в котором расположено искомое значение корня

$$x = c, \quad \text{т.е.} \quad a < c < b.$$

В качестве начального приближения корня  $c_0$   
принимаем середину этого отрезка, т.е.  $c_0 = (a + b) / 2$ .

Далее исследуем значения функции  $F(x)$

на концах отрезков  $[a, c_0]$  и  $[c_0, b]$

т. е. в точках  $a, c_0, b$ .

Тот отрезок, на концах которого  $F(x)$  принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, поэтому его принимают в качестве нового отрезка.

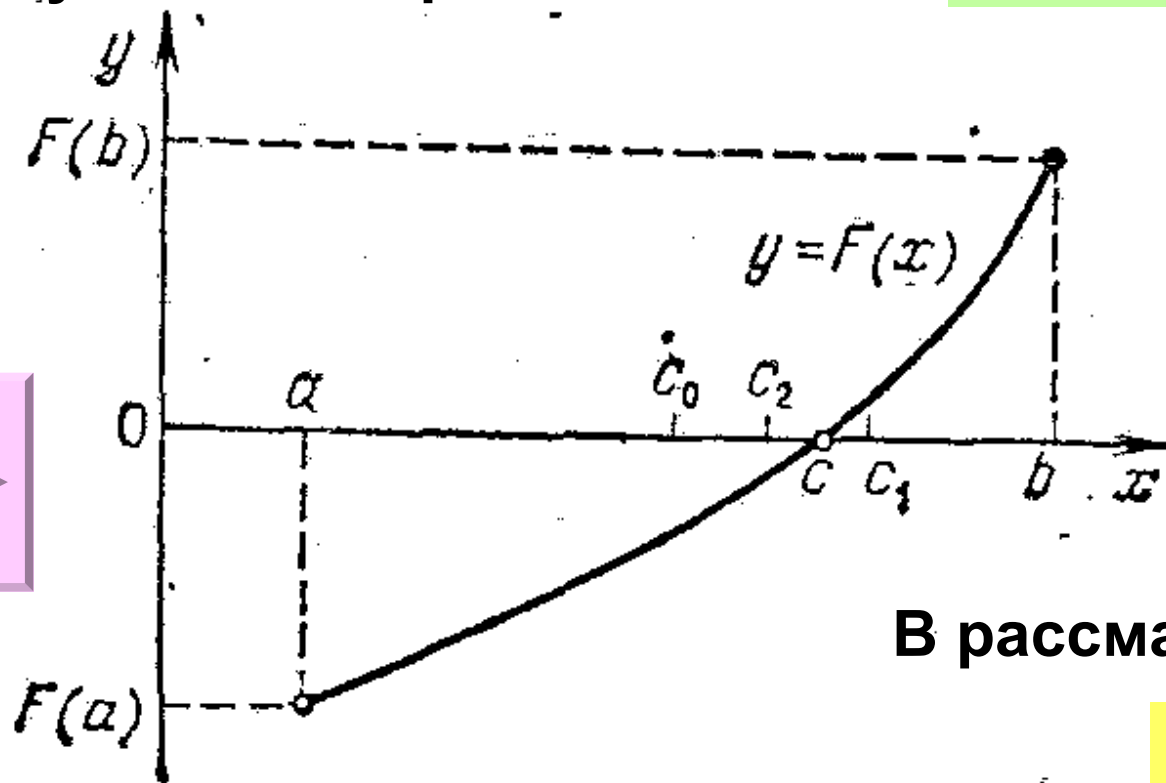
Вторую половину отрезка  $[a, b]$  на которой знак  $F(x)$  не меняется, отбрасываем.

В качестве первой итерации корня принимаем середину нового отрезка и т.д.

Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, т.е. после  $n$  итераций он сокращается в  $2^n$  раз.

Пусть для определенности

$$F(a) < 0, F(b) > 0$$



В качестве  
начального  
приближения  
корня примем

$$c_0 = (a + b) / 2$$

В рассматриваемом случае

$$F(c_0) < 0,$$

поэтому рассматриваем только отрезок

$$[c_0, b].$$

Следующее приближение:

$$c_1 = (c_0 + b) / 2$$

При этом отрезок  $[c_1, b]$  отбрасываем, поскольку

$$F(c_1) > 0 \quad \text{и} \quad F(b) > 0.$$

Аналогично находим другие приближения:

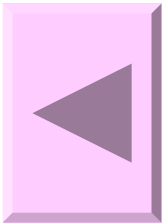
$$c_2 = (c_0 + c_1) / 2 \quad \text{и т.д.}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока значение функции

$$F(x)$$

после  $n$ -й итерации не станет меньше по модулю некоторого заданного малого числа  $\varepsilon$ ,

т.е.  $|F(c_n) < \varepsilon|.$



Метод деления отрезка пополам довольно медленный, однако он всегда сходится, т.е. при его использовании решение получается всегда, причем с заданной точностью.

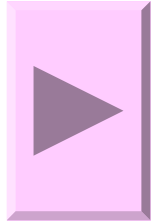
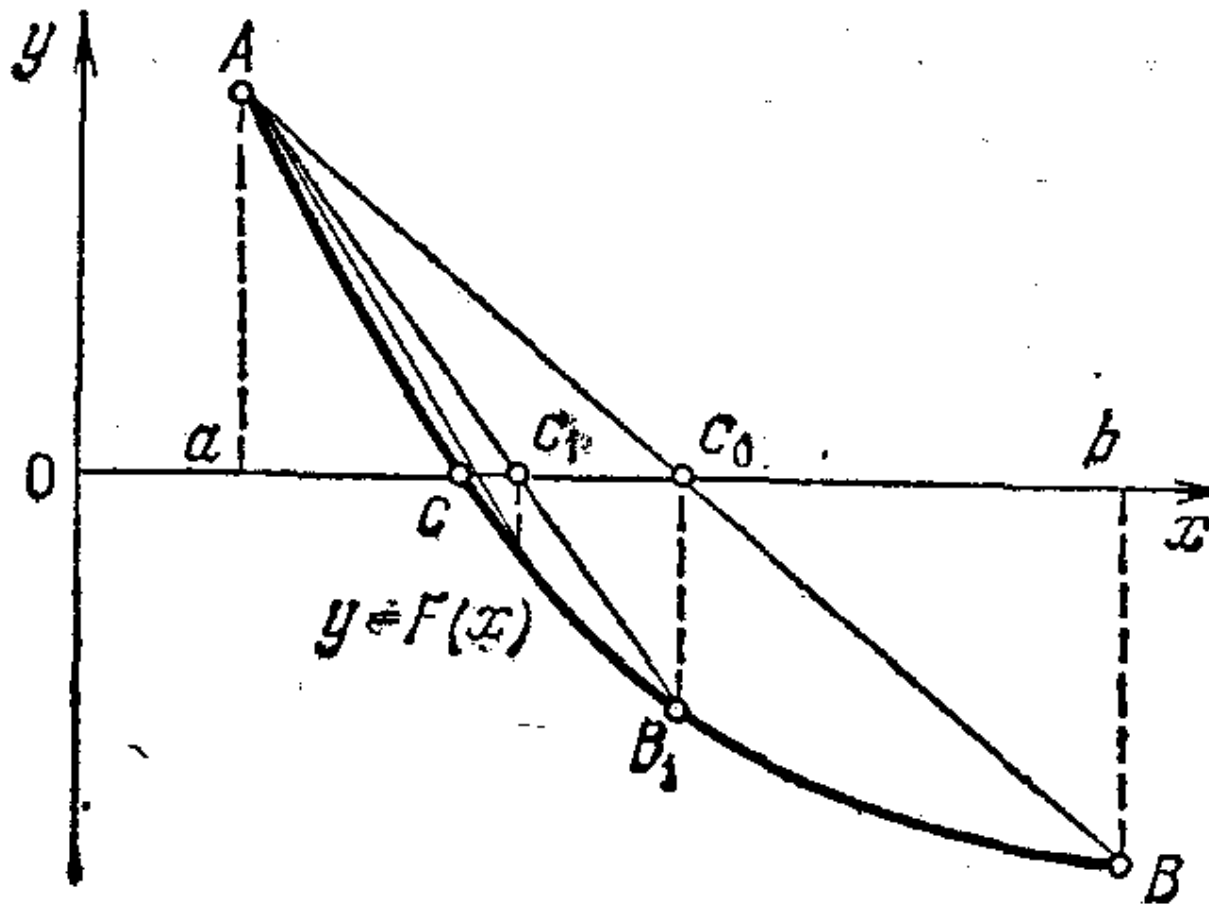
## 2.3 Метод хорд.

Пусть мы нашли отрезок  $[a, b]$ , на котором функция  $F(x)$  меняет знак.

Пусть

$$F(a) > 0, F(b) < 0.$$





В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения  $F(x) = 0$  (2.1) принимаются значения  $C_0, C_1, \dots$  точек пересечения хорды с осью абсцисс.

Сначала находим  
уравнение хорды АВ:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{уравнение прямой проходящей через две точки})$$

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для точки пересечения ее с осью абсцисс

$(x = c_0, y = 0)$  получим уравнение

$$\frac{0 - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{c_0 - a}{b - a}.$$

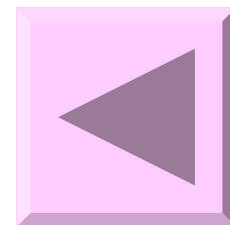
$$c_0 - a = -\frac{F(a)}{F(b) - F(a)}(b - a)$$

$$c_0 = a - \frac{b - a}{F(b) - F(a)} F(a) \quad (2.2)$$

Сравнивая знаки величин  $F(a)$ ,  $F(b)$  и  $F(c_0)$

приходим к выводу, что корень  
находится в отрезке  $[a, c_0]$ .

Следующая итерация состоит в определении нового приближения  $c_1$ , как точки пересечения хорды  $AB_1$  с осью абсцисс и т.д.



Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение

$$F(c_n)$$

не станет по модулю меньше заданного числа  $\varepsilon$ .

Алгоритмы метода деления отрезка пополам и метода хорд похожи, однако второй из них в ряде случаев дает более быструю сходимость итерационного процесса.

При этом успех его применения, как и в методе деления отрезка пополам, гарантирован.

## 2.4 Метод Ньютона (метод касательных).

Его отличие состоит в том, что на  $k$ -ой итерации вместо хорды проводится касательная к кривой

$$y = F(x) \quad \text{при} \quad x = c_k$$

и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс.

При этом не обязательно задавать отрезок  $[a, b]$ , содержащий корень уравнения (2.1), а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня

$$x = c_0.$$



Уравнение касательной,  
приведенной к кривой

$$y = F(x) \quad \text{в точке } M_0(c_0, F(c_0))$$

имеет вид

$$y - F(c_0) = F'(c_0)(x - c_0).$$

Отсюда найдем следующее приближение корня  $c_1$   
как абсциссу точки пересечения касательной с осью

$$x \quad (y = 0)$$

$$0 - F(c_0) = F'(c_0)(c_1 - c_0).$$

$$c_1 - c_0 = -F(c_0) / F'(c_0)$$

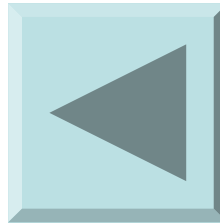
$$c_1 = c_0 - F(c_0) / F'(c_0)$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, приведенных в точках

$M_1, M_2, \dots$

Формула для  $n + 1$ -го приближения имеет вид

$$c_{n+1} = c_n - F(c_n) / F'(c_n) \quad (2.3)$$



При этом необходимо, чтобы  $F'(c_n)$

не равнялось нулю.

Для окончания итерационного процесса может быть использовано условие

$$|F(c_n)| < \varepsilon,$$

или условие близости двух последовательных приближений:

$$|c_{n+1} - c_n| < \varepsilon$$

Объем вычислений в методе Ньютона больший, чем в рассмотренных ранее методах, поскольку приходится находить значение не только функций

$$F(x),$$

но и ее производной.

Однако скорость сходимости здесь значительно выше, чем в других методах.

Трудность в применении метода Ньютона состоит в выборе начального приближения.

Поэтому иногда удобно использовать смешанный алгоритм.

Сначала применяется всегда сходящийся метод (например, метод деления отрезка пополам), а после некоторого числа итераций – быстро сходящийся метод Ньютона.

## 2.6 Системы нелинейных уравнений.

Пусть для вычисления неизвестных

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

требуется решить систему  $n$  нелинейных уравнений





Пусть в результате предыдущей итерации получены значения неизвестных

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$$

Тогда выражение для неизвестных на следующей итерации имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ x_2 = f_2(x_1, a_2, \dots, a_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a_n) \end{array} \right.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных в двух последовательных итерациях не станут малыми, т.е. абсолютные величины их разностей не станут меньшими заданного малого числа.

При использовании метода простой итерации успех во многом определяется удачным выбором начальных приближений неизвестных: они должны быть достаточно близкими к истинному значению.

В противном случае итерационный процесс может не сойтись.

### Б) Метод Ньютона

Этот метод обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации.

В основе метода Ньютона для системы уравнений лежит использование разложения функции

$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в ряд Тейлора, причем члены содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются.

Пусть приближенные значения неизвестных системы (2.5) равны соответственно

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n,$$

благодаря которым решение системы (2.5) запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1, x_2 = a_2 + \Delta x_2, \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \quad (2.7)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (2.5) с учетом (2.7) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_1(a_1, \dots, a_n) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_2(a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \Delta x_2 \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_n(a_1, \dots, a_n) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Значения  $F_1, \dots, F_n$  и их производные вычисляются

при

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$$

**Определителем системы (2.8) является якобиан.**

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Для существования единственного решения системы (2.8) он должен быть отличным от нуля на каждой итерации.

Таким образом, итерационный процесс решения системы уравнений (2.5) методом Ньютона состоит в определении приращений

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$$

к значениям неизвестных на каждой итерации.

Счет прекращается, если все приращения становятся малыми по абсолютной величине:

$$\max |\Delta x_i| < \varepsilon$$

**В методе Ньютона также важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости.**

**Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.**