Минестерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема5. «Система двух случайных величин»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

5.1 Понятие о системе нескольких случайных величин

Если возможные значения случайной величины определяются одним числом, то их называют одномерными.

Пример: число очков, которое может выпасть при подбрасывание игральной кости- дискретная одномерная случайная величина

Кроме одномерных случайных величин, могут быть случайные величины, возможные значения, которых определяются $2,3,...,n$ числами.

Такие величины, называют соответственно двумерными, трехмерными, …, n-мерными.

Двумерную случайную величину будем обозначать

$$(X,Y),$$

трехмерную величину- $(X,Y,Z).$

Каждую из величин $X, Y,$ **называют составляющей (компонентой).**

Пример.

Станок автомат штампует стальные плитки, если контролируемыми размерами будет являться длина *X* и ширина *Y*, то мы будем иметь дело с двумерной случайной величиной $(X,Y).$

Если же будет контролироваться длина *X* , ширина *Y*, и высота *Z*, то мы будем иметь дело с трехмерной случайной величиной (X,Y,Z).

Двумерной случайной величине (X,Y)

можно ставить в соответствие точку на плоскости.

Аналогично трехмерной случайной величине (X,Y,Z)

можно ставить в соответствие точку в пространстве.

Законом распределения двумерной случайной величины, называется перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i, y_j)

и их вероятностей $P(x_i, y_j)$

$$i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m;$$

Закон распределения обычно задается в виде таблицы:

Y	X					
	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	$\cdots$	$P(x_i, y_1)$	$\cdots$	$P(x_n, y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	$\cdots$	$P(x_i, y_2)$	$\cdots$	$P(x_n, y_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_j	$P(x_1, y_j)$	$P(x_2, y_j)$	$\cdots$	$P(x_i, y_j)$	$\cdots$	$P(x_n, y_j)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	$\cdots$	$P(x_i, y_m)$	$\cdots$	$P(x_n, y_m)$

Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти закон распределения каждой из составляющих.

Например, события

$$\left(X = x_1, Y = y_1\right), \qquad \left(X = x_1, Y = y_2\right),$$
$$\dots \quad \left(X = x_1, Y = y_m\right)$$

несовместны, поэтому по теореме сложения вероятностей, мы можем записать

$$P(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + \dots + P(x_1, y_m),$$

т.е. для того, что бы найти вероятность того, что *X* примет значение $X = x_1,$

мы должны просуммировать вероятности одного столбца.

Т.е. в общем случаи, чтобы определить вероятность того, что X примет значение x_i,

мы должны просуммировать вероятности *i*-столбца.

Аналогично, что бы найти вероятность того, что

$Y = y_j$, **мы должны просуммировать все вероятности стоящие в *j*-строке.**

Пример.

Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения.

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0.10	0.30	0.20
y_2	0.06	0.18	0.16

Решение. **Найдем вероятности возможных значений случайной величины X.**

Для этого мы должны просуммировать вероятности по столбцам.

$$P(x_1) = 0.10 + 0.06 = 0.16,$$

$$P(x_2) = 0.30 + 0.18 = 0.48,$$

$$P(x_3) = 0.20 + 0.16 = 0.36,$$

Теперь мы должны записать закон распределения случайной величины X:

X	x_1	x_2	x_3
P	0.16	0.48	0.36

Контроль: 0.16+0.48+0.36=1.

Определяем вероятность возможных значений величины Y. Для этого мы просуммируем вероятности по соответствующим строкам:

$$P(y_1) = 0.10 + 0.30 + 0.20 = 0.60,$$

$$P(y_2) = 0.06 + 0.18 + 0.16 = 0.40.$$

Y	y_1	y_2
P	**0.60**	**0.40**

Проверка: 0.60+0.40=1.

5.2 Функция распределения двумерной случайной величины

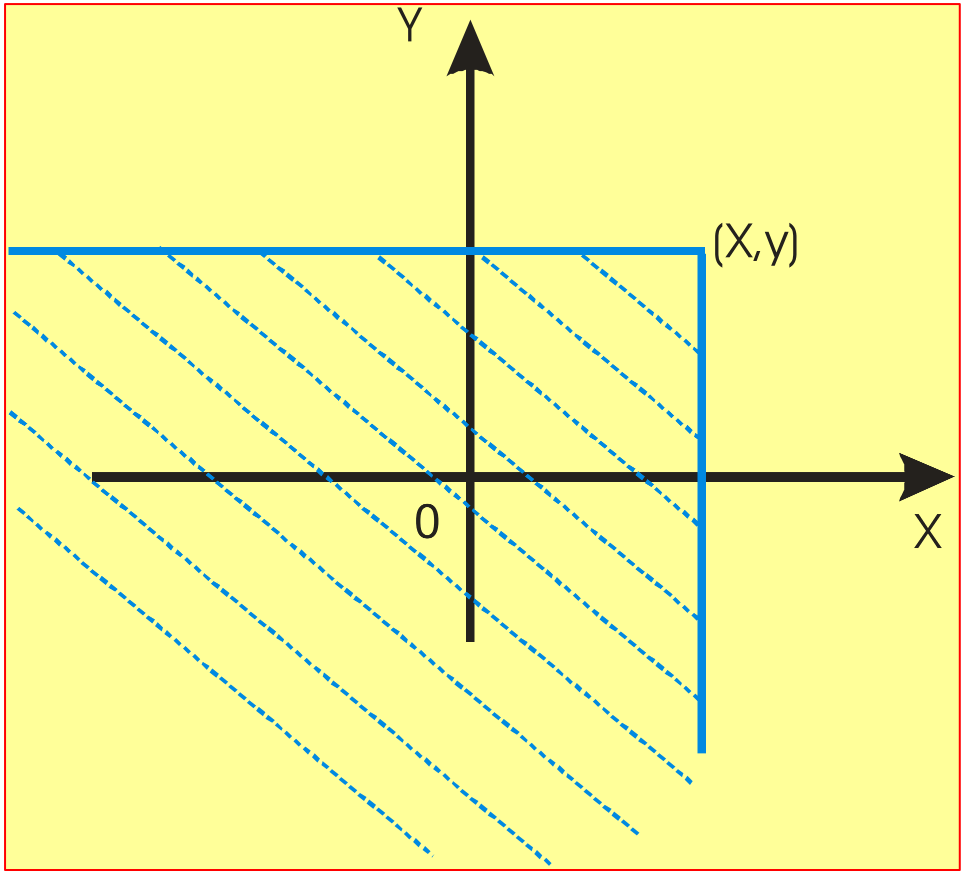
Определение. **Функцией распределения двумерной случайной величины** $(X, Y),$ **называют функцию** $F(x, y),$ **определяющую для каждой пары чисел** x, y **вероятность того, что *X* примет значение меньшее *x*, и при этом *Y* примет значение меньшее *y***

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (5.1)$$

Геометрически это равенство можно истолковать следующим образом:

$F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка

(X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной



(x, y)

расположенный левее и ниже этой вершины.

Пример.

Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая *X* двумерной случайной величины (X, Y) примет значение $X < 2$

и при этом составляющая *Y* примет значение $Y < 3,$

если известна функция распределения системы

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

Решение

По определению $F(x, y) = P(X < x, Y < y).$

Положив $x=2, y=3,$ **получим**

$$P(X<2, Y<3)=F(2{,}3)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}.$$

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения $F(x,y)$

удовлетворяет двойному неравенству

$$\boxed{0\le F(x,y)\le 1}$$

Доказательство следует из того, что функция распределения по определению это вероятность, а вероятность не может быть отрицательной величиной и превышать 1

2. Функция распределения $F(x, y)$

не убывающая функция по каждому аргументу

$$x_2 > x_1, \quad F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad (5.2)$$

$$y_2 > y_1, \quad F(x, y_2) \geq F(x, y_1). \quad (5.3)$$

3. Имеют место следующие предельные соотношения

$$a)\quad F(-\infty, y) = 0,$$

$$c)\quad F(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$b)\quad F(x, -\infty) = 0,$$

$$d)\quad F(\infty, \infty) = 1.$$

Доказательство

а) Функция распределения $F(-\infty, y)$

представляет собой вероятность события

$$X < -\infty, Y < y$$

Это не возможное событие. **Поэтому вероятность такого события равна нулю.**

Аналогично доказываются пункты b) и c).

d) Функция распределения $F(\infty, \infty)$

представляет собой вероятность того, что

$$X < \infty, Y < \infty.$$

В этом случае квадрант занимает всю плоскость, а следовательно вероятность того, что случайная точка (X, Y) **попадет в этот квадрант равна 1.**

4. При $y = \infty,$ **функция распределения становится функцией только составляющей *X***

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

Т.к. событие $Y < \infty$ достоверно, то

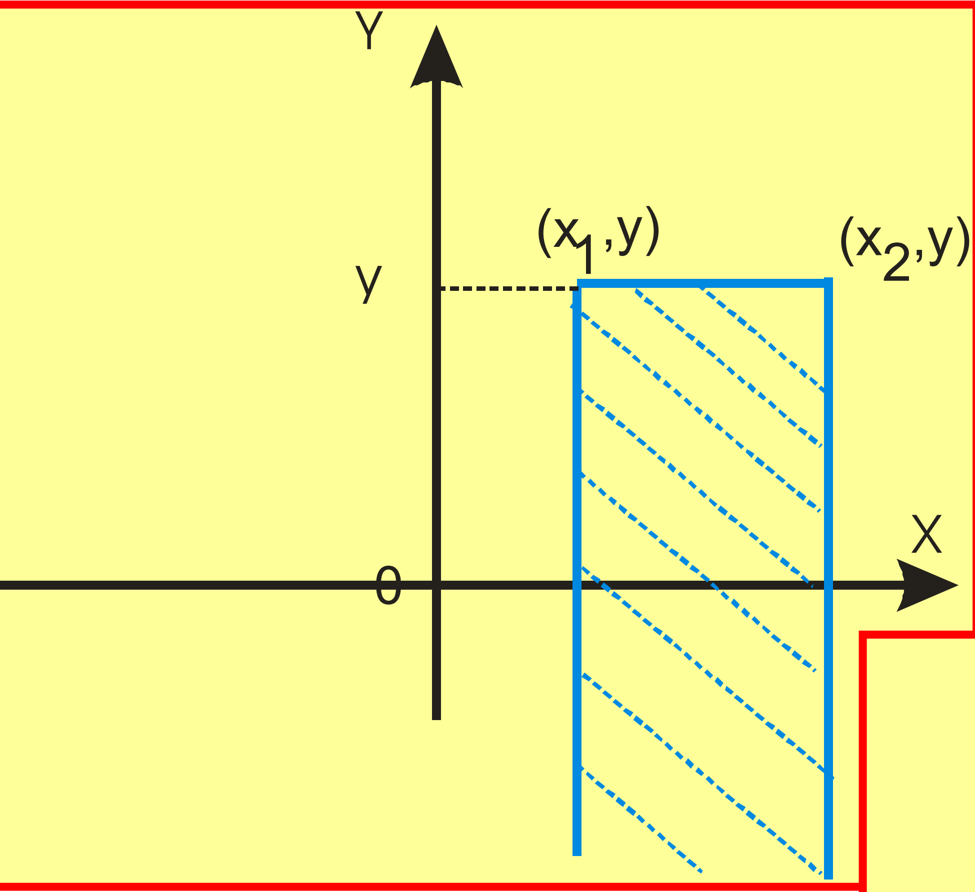
$F(x, \infty)$ определяет вероятность события **X<x.**

Если $x = \infty, \quad F(\infty, y) = F_2(y),$

функция распределения становится функцией только составляющей *Y.*

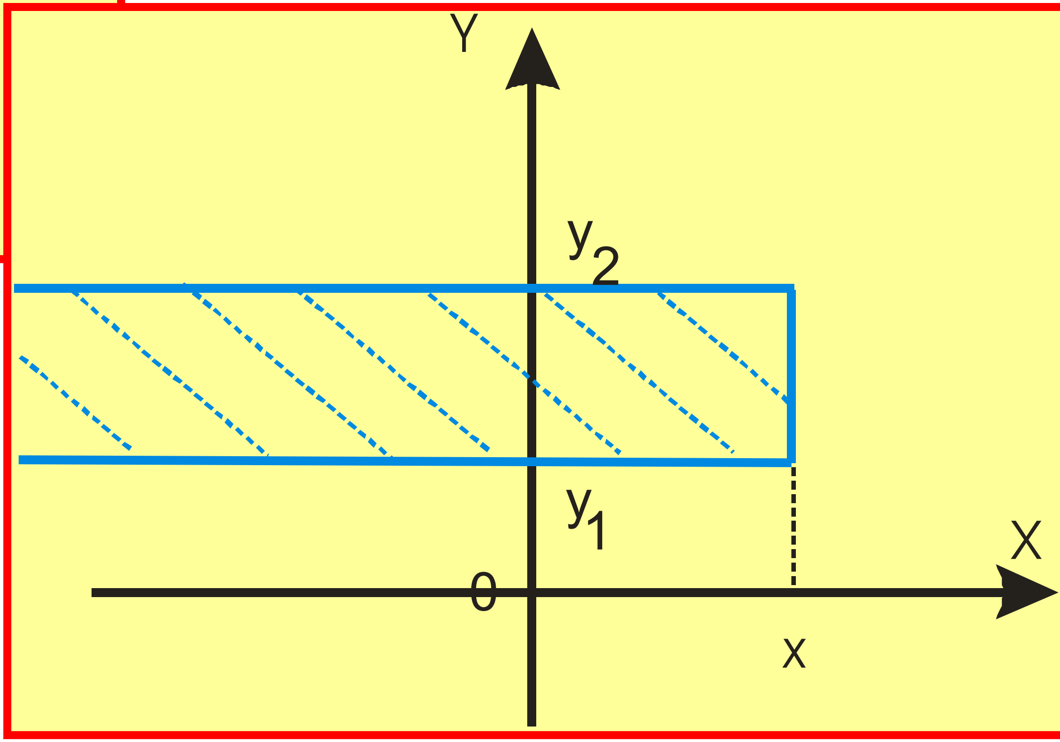
5.3 Вероятность попадания случайной точки в полуполосу

Используя функцию распределения системы случайных величин *X и Y* можно найти вероятность того, что в результате испытания случайная точка попадет в полуполосу



$$x_1 < X < x_2, Y < y,$$

$$\text{или} \quad X < x, y_1 < Y < y_2.$$



Вычитая из вероятности попадания случайной точки в квадрант с вершиной

$$(x_2, y),$$

вероятность попадания точки в квадрант с вершиной

$$(x_1, y),$$

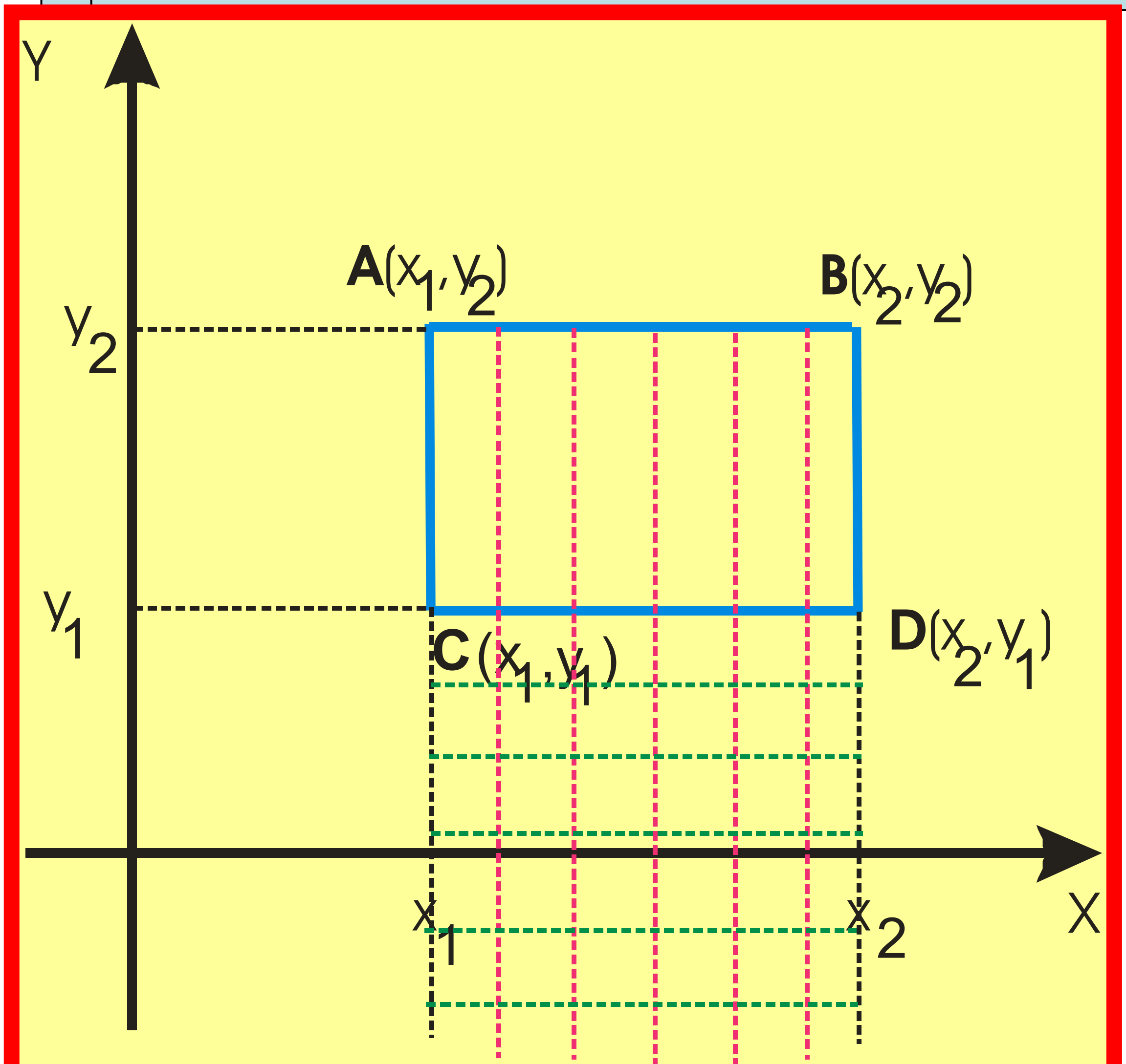
мы получим:

$$\boxed{P(x_1 \le X \le x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y).}$$

Аналогично имеем

$$\boxed{P(X < x, \quad y_1 \le Y \le y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).}$$

5.4 Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник



Нам нужно найти вероятность попадания точки в прямоугольник *ABDC*

Для этого мы можем найти вероятность попадания точки в полуполосу *AB*

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2),$$

а затем из нее отнять вероятность попадания точки в полуполосу *CD*

$$F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2, \quad y_1 \le Y \le y_2) =$$
$$= (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)).$$

5.5 Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной случайной величины (двумерная плотность вероятности)

Пусть функция распределения $F(x, y)$

непрерывна и имеет непрерывную частную производную второго порядка.

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ **двумерной случайной величины** (X, Y) **называют вторую смешанную производную от функции распределения**

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \qquad (5.4)$$

Пример.

Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ **системы случайных величин *(X,Y)* по известной функции распределения**

$$F(x,y)=\sin x\sin y,\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. **По определению**

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Найдем частную производную по *x* от функции распределения

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\cos x\sin y.$$

Найдем от полученного результата частную производную по *y*, в итоге получим искомую плотность совместного распределения

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin y)=\cos x \cos y,$$

$$(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}).$$

5.6 Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения

Зная плотность совместного распределения $f(x,y)$ можно найти функцию распределения $F(x,y)$ по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy. \quad (5.5)$$

Пример.

Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy,$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx\cdot arctgy\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx(arctgy-arctg(-\infty))=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx(arctgy+\frac{\pi}{2})=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(arctgy+\frac{\pi}{2})arctgx\Big|_{-\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(arctgy+\frac{\pi}{2})(arctgx+\frac{\pi}{2}).$$

5.7 Вероятностный смысл двумерной плотности вероятности

В вопросе 5.4 была получена формула для вероятности попадания точки в прямоугольник *ABCD*

$$P_{ABCD} = P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)).$$

Применяя к правой части теорему Лагранжа, согласно которой: Если функция $f(x, y)$

непрерывна на отрезке $[a, b]$

и дифференцируема на интервале (a, b),

то всегда найдется такая точка $C \in (a,b)$, **что**

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

, получим

$$P_{ABCD} = \left(F'_x(\xi, y_2) - F'_x(\xi, y_1)\right)\Delta x = \left[\begin{array}{l} \xi \in (x_1, x_2) \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{array}\right] =$$

$$= F''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y = \left[\begin{array}{l} \eta \in (y_1, y_2) \\ \Delta y = y_2 - y_1 \end{array}\right],$$

$$F''_{xy}(\xi, \eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x \Delta y}.$$

Учитывая выражение (5.4)

$$f(\xi,\eta)=\frac{P_{ABCD}}{\Delta x \Delta y}. \quad (5.6)$$

Т.е. функция $f(\xi,\eta)$ **равна отношению**

вероятности попадания случайной точки в прямоугольник $ABCD$

к площади этого прямоугольника.

Если перейти к пределу, при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

тогда точка $\xi \to x, \eta \to y,$

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P_{ABCD}}{\Delta x\Delta y}.$$

Итак, функцию $f(x,y)$ **можно рассматривать**

как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник к площади этого прямоугольника, когда обе стороны прямоугольника стремятся к нулю.

5.8 Вероятность попадания случайной точки в произвольную область

Учитывая (5.6), вероятность попадания случайной точки в прямоугольник

$$P_{ABCD} = f(\xi,\eta)\Delta x\Delta y.$$

Пусть дана произвольная область D.

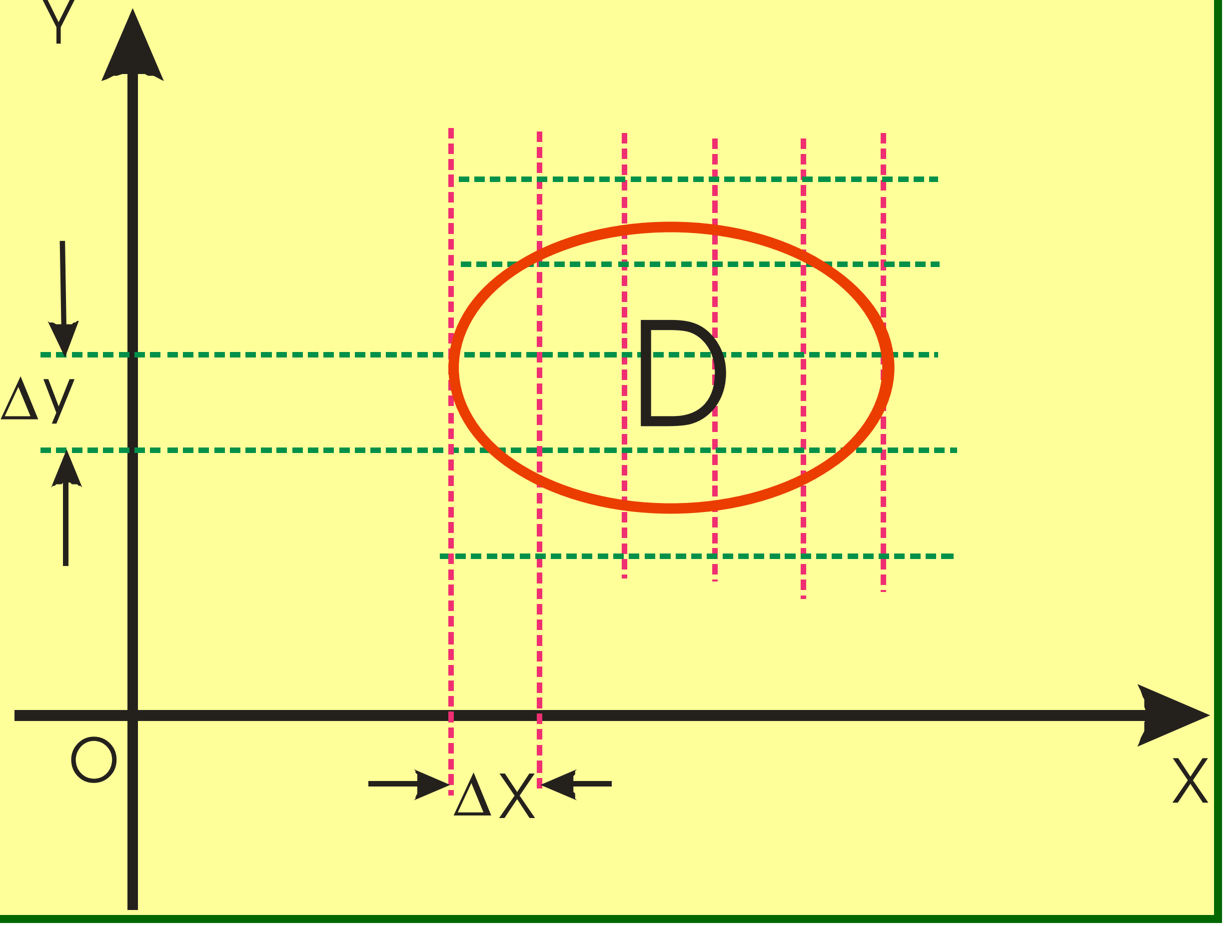
Обозначим событие состоящее в попадании случайной точки в эту область

$$(X,Y)\subset D$$

Нужно найти вероятность попадания случайной точки в эту область

$$P((X,Y)\subset D)-?$$

Разобьем нашу область прямыми параллельными оси *Oy*, находящимся на расстоянии Δx **одна от другой, и прямыми параллельными оси *Ox*, находящимися на расстоянии** Δy **одна от другой.**



Т.к. события, состоящие в попадании случайной точки в элементарные области, несовместны, то вероятность попадания в область D, приближенно равна сумме вероятностей попаданий точки в элементарные области

$$P((X,Y)\subset D)\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x\Delta y,$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0,$

мы получим

$$\boxed{P((X,Y)\subset D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \quad (5.7)}$$

Итак, для того чтобы вычислить вероятность попадания случайной точки *(X,Y)* в область D, достаточно вычислить двойной интеграл.

Геометрически выражение (5.7) можно истолковать следующим образом:

вероятность попадания случайной точки *(X,Y)* в область D, равна объему тела, ограниченного сверху поверхностью

$$z = f(x, y),$$

основанием, которого служит проекция этой поверхности на плоскость *xOy*.

Пример. Плотность распределения двумерной случайной величины:

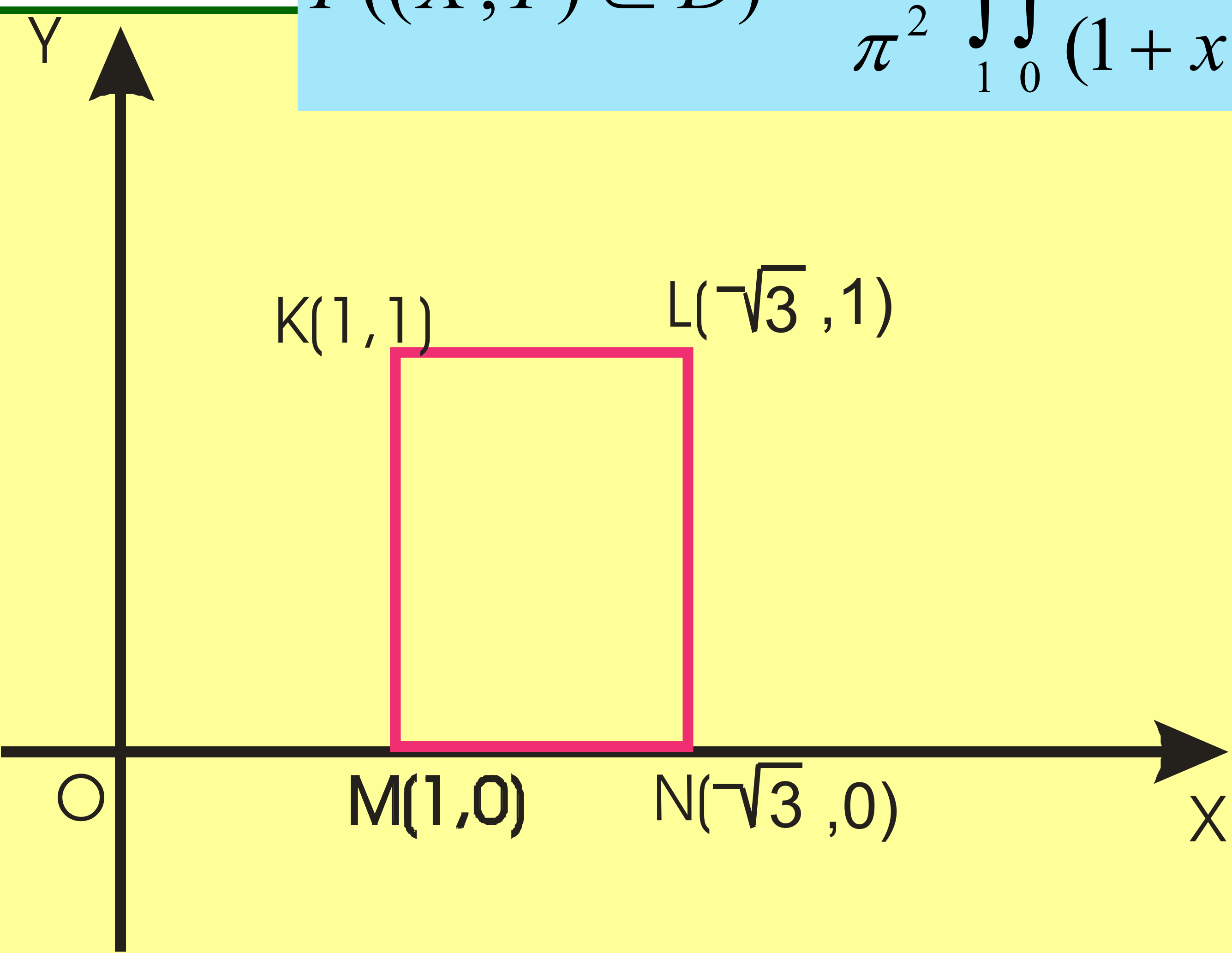
$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами

$$K(1,1), L(\sqrt{3},1), M(1,0), N(\sqrt{3},0).$$

Решение. $$P((X,Y)\subset D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

$$P((X,Y)\subset D)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy=$$



$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx\cdot arctgy\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx(arctg1-arctg0)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}(arctg\sqrt{3}-arctg1)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{48}.$$

5.9 Свойства двумерной плотности вероятности

1. **Двумерная плотность вероятности неотрицательна**

$$\boxed{f(x,y) \geq 0.}$$

Доказательство.

Из выражения (5.6) следует

$$f(\xi,\eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x \Delta y}.$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами

$$\Delta x, \Delta y$$

есть неотрицательное число,

площадь прямоугольника положительное число.

Следовательно, отношение этих двух чисел, а значит и их предел есть неотрицательное число, т.е.

$$f(x,y) \geq 0.$$

2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1. \quad (5.8)$$

Доказательство.

Бесконечные пределы интегрированные по *x* и *y* указывают, что областью интегрирования является вся плоскость *xOy*.

Поскольку событие состоящее в том, что случайная точка попадет при испытании на плоскость *xOy* достоверно, то вероятность этого события равна единице.

Пример.

Задана плотность совместного распределения непрерывной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y) = C \cdot \cos x \cos y, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2},$$

а вне $f(x,y) = 0$

Найти постоянный параметр *C*.

Решение.

Для решения воспользуемся выражением (5.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1,$$

$$C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y\,dx\,dy = 1,$$

$$C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy = 1,$$

$$C \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$C\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 1,$$

$$\boxed{C = 1.}$$

5.10 Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины

Пусть известна плотность совместного распределения вероятности системы двух случайных величин, т.е.

$$f(x,y).$$

Нужно найти плотность вероятности каждой из составляющих $f_1(x), f_2(y).$

Согласно (5.5)

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

На основании свойства 4 функции распределения двумерной случайной величины (вопрос 5.2)

$$F_1(x) = F(x, \infty),$$

поэтому что бы найти $F_1(x)$,

мы должны проинтегрировать по *y*, по всем возможным значениям

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy. \quad (5.9)$$

По определению плотности распределения одномерной случайной величины

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x}.$$

Продифференцировав обе части равенства (5.9) по *x* и учитывая свойства интегралов

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = F'(x) = f(x),$$

получим

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy. \qquad (5.10)$$

Аналогично мы можем записать

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy,$$

$$f_2(y) = \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx. \qquad (5.11)$$

Пример.

Двумерная случайная величина (X,Y)

задана плотностью совместного распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \text{при} \quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1,\\[2ex] 0, & \text{при} \quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1,\end{cases}$$

Найти плотность распределения составляющих *X* и *У*.

Решение.

Для решения воспользуемся формулами (5.10) и (5.11)

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1, \qquad \frac{y^2}{4}<1-\frac{x^2}{9},$$

$$y^2<\frac{4}{9}(9-x^2), \qquad |y|<\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{6\pi}\,dy,$$

$$f_1(x) = \frac{1}{6\pi} y \Big|_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2} = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Итак

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9 - x^2}, & |x| < 3, \\ 0, & |x| \geq 3. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1.$$

$$\int_{-3}^{3} \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t\,dt, \\ x = -3, \qquad -3 = 3\sin t, \\ \qquad\qquad \sin t = -1, t = -\dfrac{\pi}{2}, \\ x = 3, \qquad 3 = 3\sin t, \\ \qquad\qquad \sin t = 1, \quad t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$=\frac{2}{9\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=\frac{2}{9\pi}\cdot 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{\pi}\left(t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

Найдем плотность распределения составляющей *y*

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

$$\frac{x^2}{9} < 1 - \frac{y^2}{4}, \qquad x^2 < \frac{9}{4}(4 - y^2), \qquad |x| < \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2},$$

$$f_2(y) = \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{6\pi}\,dx = \frac{1}{6\pi}\,x\Big|_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} =$$

$$= \frac{1}{6\pi} 3\sqrt{4 - y^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2}.$$

$$\boxed{f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2}, & |y| < 2, \\ 0, & |y| \geq 2. \end{cases}}$$

Так же как и для составляющей *x* можно показать, что для составляющей *y* будет выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)dy = 1.$$

5.11 Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин

Если события *A* и *B* зависимы, то условная вероятность события *B* отличается от его безусловной вероятности. В этом случае

$$P(AB) = P(A)P_A(B), \qquad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Рассмотрим двумерную дискретную случайную величину

$$(X, Y).$$

Возможные значения составляющих будут

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m.$$

Пусть в результате испытания величина *Y* приняла значение

$$Y = y_1,$$

тогда условная вероятность, того что *X* примет значение

$$X = x_1,$$

будем записывать в виде:

$$\boxed{P(x_1 | y_1)}$$

В общем случае условные вероятности составляющей будем записывать в виде

$$\boxed{P(x_i | y_j), \qquad (i = 1,2,\dots,n, \quad j = 1,2,\dots,m)}$$

Условным распределением составляющей *X* при условии

$$Y = y_j,$$

называют совокупность условных вероятностей

$$P(x_1|y_j), P(x_2|y_j), \ldots, P(x_n|y_j),$$

вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ уже наступило.

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно вычислить условные законы составляющих

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \quad ,(5.12)$$

$$P(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \quad .(5.13)$$

Замечание. Сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Пример. Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	**0.10**	**0.30**	**0.20**
y_2	**0.06**	**0.18**	**0.16**

Найти условный закон распределения составляющей *X* при условии, что составляющая *Y* приняла значение y_1 $Y = y_1.$

Решение.

Данный закон будет определяться совокупностью следующих условных вероятностей

$$P(x_1|y_1), P(x_2|y_1), P(x_3|y_1).$$

Для каждой условной вероятности мы должны применять выражение

$$P(x_i|y_1)=\frac{P(x_i,y_1)}{P(y_1)}.$$

$$P(y_1)=0.10+0.30+0.20=0.60,$$

$$P(x_1|y_1)=\frac{0.10}{0.60}=\frac{1}{6},$$

$$P(x_2|y_1)=\frac{P(x_2,y_1)}{P(y_1)}=$$

$$=\frac{0.30}{0.60}=\frac{1}{2},$$

$$P(x_3|y_1)=\frac{P(x_3,y_1)}{P(y_1)}=$$

$$=\frac{0.20}{0.60}=\frac{1}{3}.$$

Замечание: Сумма вероятностей условного распределения равна 1, а поэтому в качестве контроля берут

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+3+2}{6}=1.$$

5.12 Условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин

Пусть (X,Y) непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $\varphi(x|y)$ **распределения составляющих** ***Х*** **при условии, что составляющая** ***У*** **примет значение** $Y = y,$

называется отношение плотности совместного распределения $f(x, y)$ **к плотности распределения** $f_2(y)$ **составляющей** ***У***

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \qquad (5.14)$$

Аналогично можно записать условную плотность распределения составляющей ***У***

$$\psi(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \qquad (5.15)$$

Для непрерывных случайных величин формула (5.14) и (5.15) примет вид

$$\varphi(x|y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \qquad (5.16)$$

$$\psi(y|x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \qquad (5.17)$$

Как и любая плотность распределения, условные плотности распределения обладают следующими свойствами

$$\varphi(x|y)\geq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x|y)dx=1,$$

$$\psi(y|x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y|x)\,dy = 1.$$

Пример.

Двумерная случайная величина (X, Y)

задана плотностью совместного распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 < r^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2, \end{cases}$$

Найти условные плотности вероятности составляющих *Х* и *У*.

Решение.

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx},$$

$$\varphi(x|y) = \frac{\frac{1}{\pi r^2}}{\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2} dx} = \frac{1}{x\Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}};$$

$$|y| < \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\varphi(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}, & |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0, & |y| > \sqrt{r^2 - x^2}, \end{cases}$$

Аналогично можно найти $\psi(y|x)$

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy},$$

5.13 Условное математическое ожидание

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины *У*, при $X = x,$

называют произведение возможных значений *У* на их условные вероятности

$$M(Y|X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j|x). \quad (5.18)$$

Для непрерывных величин

$$M(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y|x)dy \quad (5.19)$$

Условное математическое ожидание $M(Y|X=x),$

является функцией от *X*

$$M(Y|X=x)=f(x)$$

которую называют **функцией регрессии** ***Y на X*.**

Аналогично можно определить математическое ожидание случайной величины *X.*

Пример.

Дискретная случайная величина задана таблицей.

Найти условное математическое ожидание *У* при

$$X=x_1=1$$

Y	X			
	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	**0.15**	**0.06**	**0.25**	**0.04**
$y_2 = 6$	**0.30**	**0.10**	**0.03**	**0.07**

Решение.

$$M(Y|X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j P(y_j|x_1) = y_1 P(y_1|x_1) + y_2 P(y_2|x_1).$$

Согласно (5.13) можно записать

$$P(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)},$$

$$P(y_1|x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)},$$

$$P(y_2|x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)},$$

$$P(x_1) = 0.15 + 0.30 = 0.45,$$

$$P(y_1|x_1) = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3},$$

$$P(y_2|x_1) = \frac{0.30}{0.45} = \frac{2}{3},$$

$$M(Y|X = x_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

5.14 Зависимые и независимые случайные величины

Две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Теорема. **Для того, что бы случайные величины *X* и *У* были независимыми необходимо и достаточно, что бы функция распределения системы** $F(X,Y)$

была равна произведению функций распределения составляющих

$$F(X,Y) = F_1(X)F_2(Y).$$

Следствие.

Для того, что бы непрерывные случайные величины *X* и *У* были независимыми необходимо и достаточно, что бы плотность совместного распределения системы была равна произведению плотностей распределения составляющих

$$\boxed{f(x, y) = f_1(x) f_2(y).}$$

Пример.

Двумерная случайная непрерывная величина задана плотностью совместного распределения:

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{4}, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi,$$

вне $f(x, y) = 0.$

Доказать, что *X* и *У* независимы.

Решение:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\sin y}{4}dy=\frac{\sin x}{4}\int_0^{\pi}\sin y dy=$$

$$=\frac{\sin x}{4}(-\cos y)\Big|_0^{\pi}=\frac{\sin x}{4}(-(-1-1))=\frac{\sin x}{2},$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\sin y}{4}dx=$$

$$=\frac{\sin y}{4}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{\sin y}{2}.$$

Таким образом

$$\frac{\sin x \sin y}{4} = \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{\sin y}{2}.$$

Вывод: **составляющие *X* и *Y* независимы.**

5.15 Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Корреляционным моментом μ_{xy} **случайных величин*X и Y* называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин**

$$\mu_{xy} = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right].$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))P(x_i y_j).$$

Для непрерывных величин - формулу

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X - M(X))(Y - M(Y))f(x,y)dxdy.$$

Теорема. Корреляционный момент двух независимых случайных величин, равен 0.

Доказательство.

Т.к. случайные величины *Х,У* независимы, то математическое ожидание произведения отклонений будет равно произведению математических ожиданий этих отклонений и учитывая, что математическое ожидание отклонения равно 0, можно записать

$$\mu_{xy} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))) =$$
$$= M(X - M(X))M(Y - M(Y)) = 0.$$

Поскольку корреляционный момент равен математическому ожиданию произведения отклонений случайных величин *Х,У,* то его размерность будет равна произведению размерностей величин Х,У.

Пример: X и У измеряются в (см), то получим $\mu_{xy} = 2см^2$

Если же X,У измеряются в (мм), то $\mu_{xy} = 200мм^2$

Т.е. для одних и тех же величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того в каких единицах были измерены величины.

Для устранения этого недостатка вводят новую величину- коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции r_{xy}

случайных величин X,У называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$