Министерство образования Республики Беларусь
УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема12. «Тройной интеграл»

Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

12.1 Основные понятия

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является тройной интеграл.

Пусть в замкнутой области *V* пространства *Oxyz* задана непрерывная функция

$$u = f(x, y, z).$$

Произвольным образом разобьем область *V* на ряд областей объемом

$$\Delta V_i.$$

Внутри каждой такой области выберем точку

$$P_i(x_i, y_i, z_i).$$

Вычислим значения функции в этих точках, т.е.

$$f(x_i, y_i, z_i).$$

Составим интегральную сумму вида

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа *n* таким образом, что каждая «элементарная область» V_i **стягивается в точку ,**

(т.е. диаметр области d_i стремится к нулю), то его называют тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ **по области *V*:**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{\max d_i \to 0} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \qquad (12.1)$$

где $dV = dxdydz$ **- элемент объема.**

Свойства тройного интеграла:

1. $$\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV;$$

2. $$\iiint\limits_V (f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z))\,dV =$$

$$= \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\,dV;$$

3. **Если** $V = V_1 \cup V_2,$ **а пересечение областей** V_1 **и** V_2 **состоит из границы их разделяющей, то**

$$\iiint\limits_V f_1(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV;$$

4. **Если** $f(x,y,z) \geq 0,$ **то**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geq 0;$$

Если $f_1(x,y,z) \geq f_2(x,y,z),$ **то**

$$\iiint_V f_1(x,y,z)\,dV \ge \iiint_V f_2(x,y,z)\,dV;$$

5. $$\iiint_V dV = V;$$

6. **Если *m, M* соответственно наименьшее и наибольшее значение функции**

$u = f(x,y,z)$, **то** $$mV \le \iiint_V f(x,y,z)\,dV \le MV;$$

7. Теорема о среднем значении

Если функция $u = f(x,y,z)$ **непрерывна**

в замкнутой области *V*, то внутри этой области существует точка $M_0(x_0, y_0, z_0),$ **такая что**

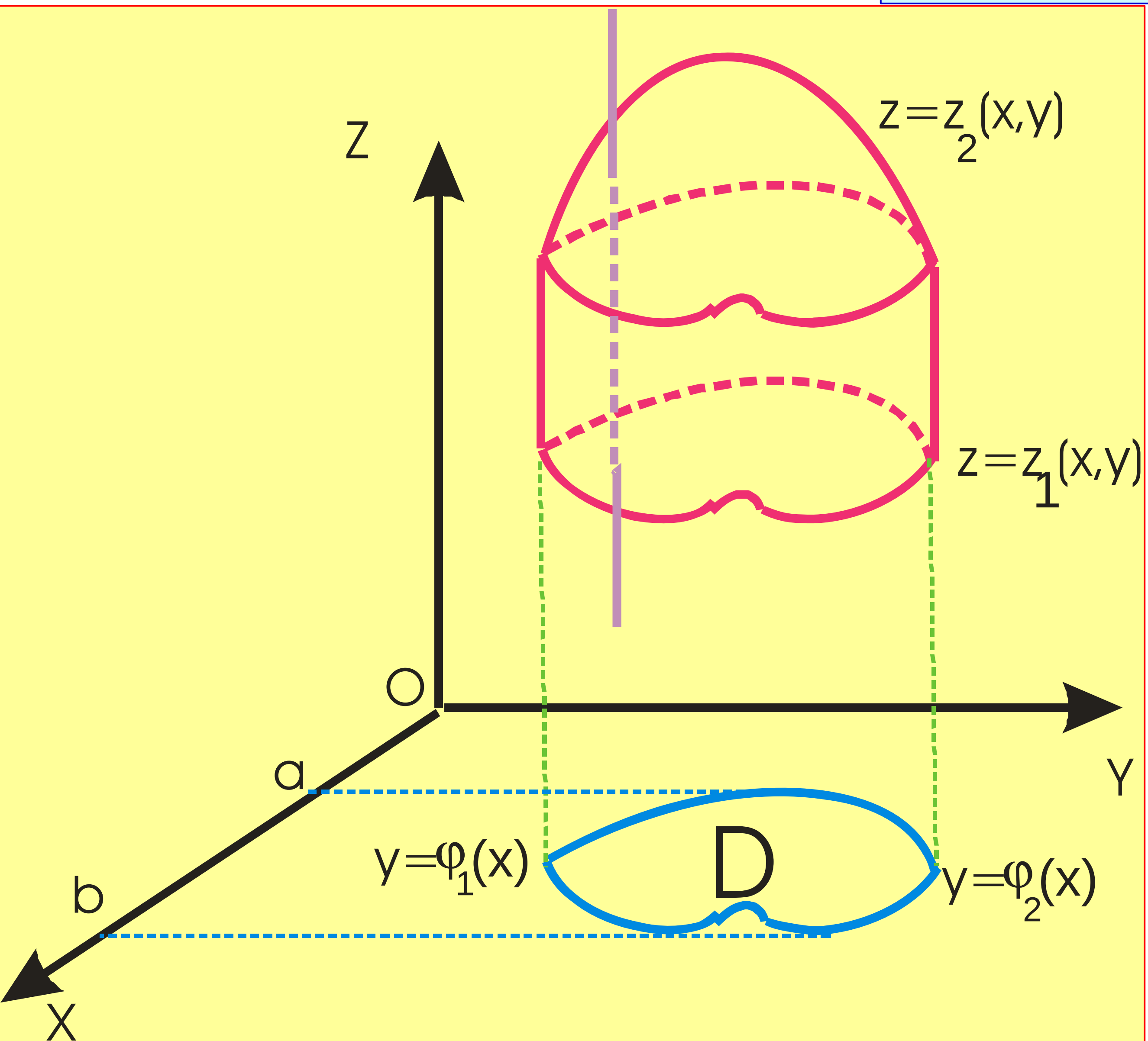
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(x_0, y_0, z_0)\cdot V,$$

где *V* – объем тела.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть областью интегрирования *V* является тело ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$ **и сверху** $z = z_2(x,y)$

$$z_1(x,y) \le z_2(x,y)$$



Областью *D* является проекцией тела на плоскость *Oxy*. Предположим, что она ограничена линиями

$$x = a,\ \ x = b,\ \ a \le b,$$

$$y = \varphi_1(x) \qquad y = \varphi_2(x)$$

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x).$$

Будем считать область D правильной в направлении оси OZ, т.е. любая прямая параллельна оси OZ, пересекает границу в области не более, чем в двух точках. В этом случае

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

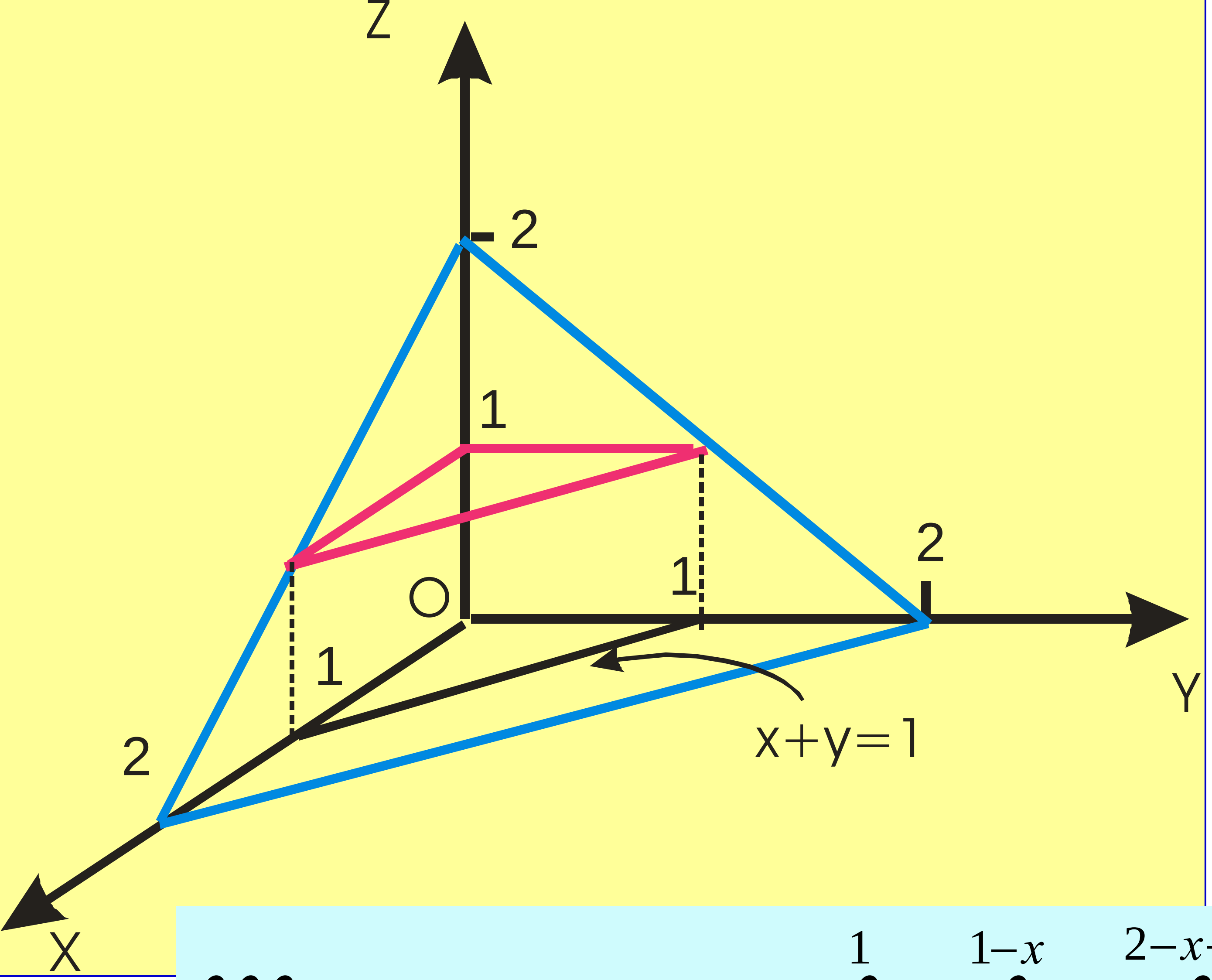
Пример.

Вычислить $$\iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz,$$

где *V* ограничена плоскостями

$$x=0, \quad y=0, \quad z=1,$$
$$x+y+z=2.$$

Решение



$$\iiint_V (x+y)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} (x+z)\,dz =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left(xz\Big|_1^{2-x-y}+\frac{z^2}{2}\Big|_1^{2-x-y}\right)=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left(x(2-x-y-1)+\frac{1}{2}(2-x-y)^2-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x-x^2-xy+\frac{1}{2}(2-x-y)^2-\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$= \int_0^1 dx \left(x\int_0^{1-x} dy - x^2 \int_0^{1-x} dy - x\int_0^{1-x} y\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{1-x} (2-x-y)^2 d(2-x-y) - \frac{1}{2}\int_0^{1-x} dy \right) =$$

$$\int_0^1 dx \left(x\,y\Big|_0^{1-x} - x^2\,y\Big|_0^{1-x} - \frac{xy^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} - \frac{1}{2}\frac{(2-x-y)^3}{3}\Bigg|_0^{1-x} - \frac{1}{2}y\Big|_0^{1-x} \right) =$$

$$\int_0^1 dx \left(x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6}(2-x-(1-x))^3 + \frac{1}{6}(2-x)^3 - \frac{1}{2}(1-x) \right) =$$

$$\int_0^1 dx\left(x-x^2-x^2+x^3-\frac{x-2x^2+x^3}{2}-\frac{1}{6}(2-x-1+x)^3-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}(2-x)^3\right)=$$

$$=\int_0^1\left(-2x^2+x^3-\frac{x}{2}+x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}(2-x)^3\right)dx=$$

$$\int_0^1\left(-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{2}{3}+x+\frac{1}{6}(2-x)^3\right)dx=$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}x\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{6}\frac{(2-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} =$$

$$= \frac{-8+3+12-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

12.3 Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

При вычислении тройного интеграла так же как и при вычислении двойного интеграла, используется метод подстановки:

$$U = f(x, y, z),$$

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w),$$

Так же как и в случае двойного интеграла, нужно вычислить определитель Якоби (Якобиан), но теперь:

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Тогда, справедлива формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \cdot |I| dudvdw, \quad (12.2)$$

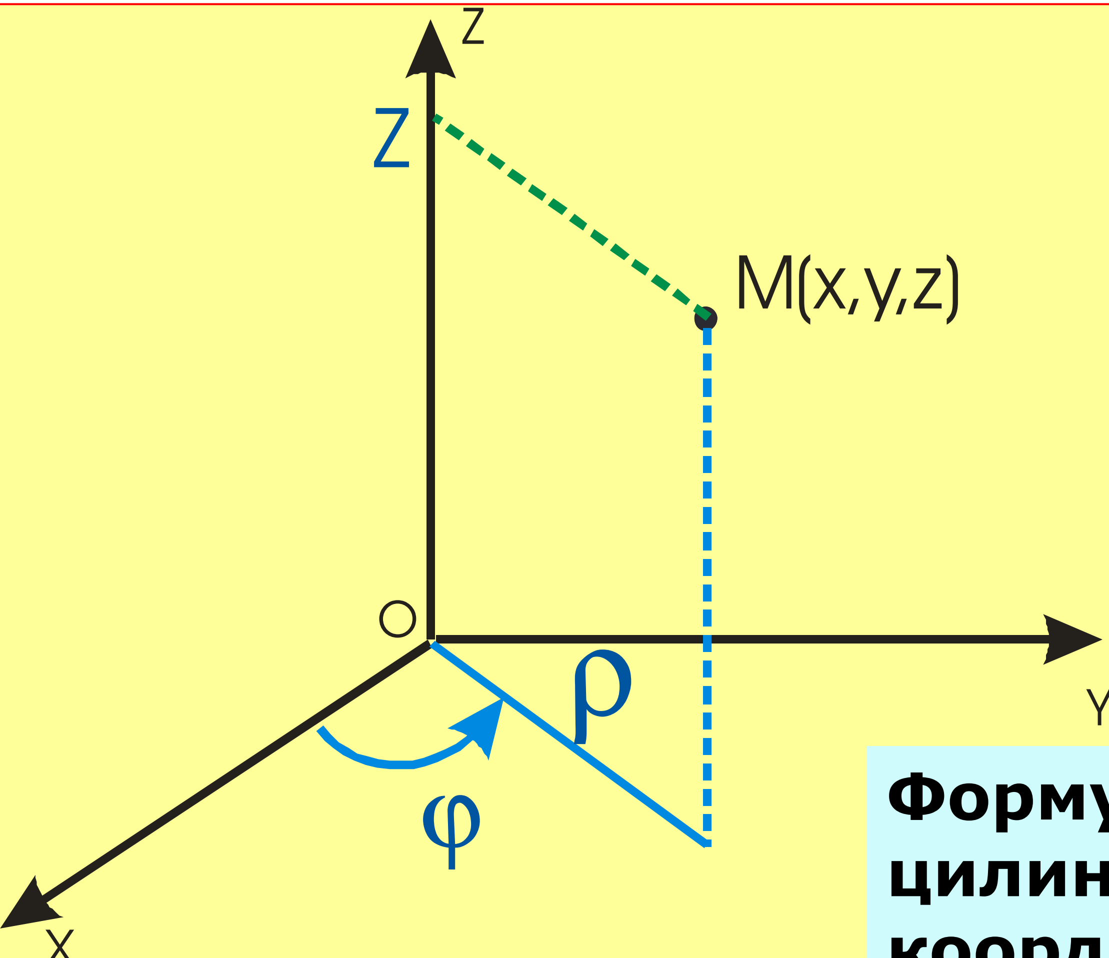
- **Тройной интеграл в цилиндрической системе координат.**

Положение точки *M(x,y,z)* в цилиндрической системе координат можно определить значением трех чисел $\rho, \varphi, z.$

Здесь ρ, φ **- полярные координаты проекции точки на плоскость,**

***z*-аппликата точки *M*.**

Эти три числа $\boxed{(\rho, \varphi, z)}$ называются **цилиндрическими координатами** точки *M.*



Формулы связывающие цилиндрическую систему координат с декартовой имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\rho \ge 0,$$
$$0 \le \varphi \le 2\Pi$$

Вычислим Якобиан

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1(-1)^{6}\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^{2}\varphi+\rho\sin^{2}\varphi=\rho.$$

Формула (12.2) в цилиндрической системе координат примет вид:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.\quad(12.3)$$

Замечание. **К цилиндрическим координатам удобно перейти в случае, если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.**

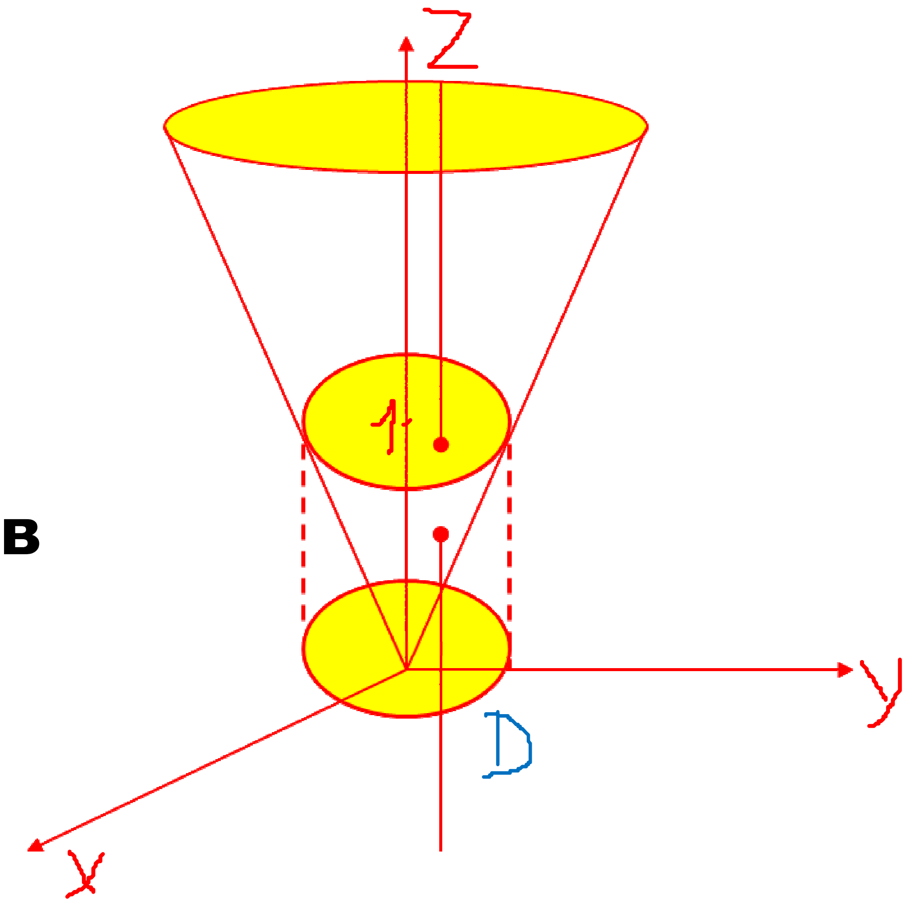
Пример: Вычислить $$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz,$$

V: **ограничен верхней частью конуса**

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$z = 1.$$

Решаем эту задачу в цилиндрической системе координат:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$0 \le \rho \le 1,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

Область D представляет окружность, уравнение которой:

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1,$$
$$\rho = 1,$$

Что бы найти изменения по оси Z, берем уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = z^2,$$

$$\rho = z,$$

$$\rho \le z \le 1,$$

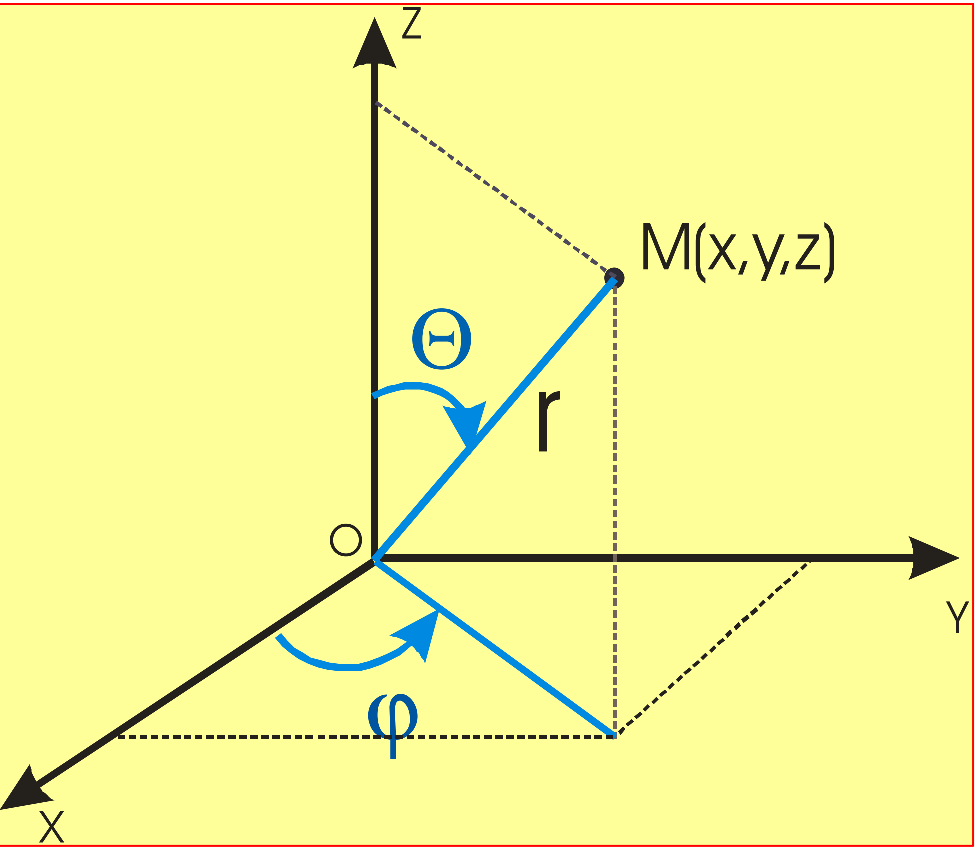
$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 z\rho\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \left. \frac{\rho z^2}{2} \right|_\rho^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\rho - \frac{\rho^3}{2} \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left. \frac{\rho^2}{4} \right|_0^1 - \left. \frac{\rho^4}{8} \right|_0^1 \right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} \left. \varphi \right|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

•Тройной интеграл в сферических координатах:



Сферическими координатами точки *M(x,y,z)* называется тройка чисел

$$r, \varphi, \theta,$$

где *r*–длина радиуса вектора точки *M*,

φ **- угол образованный проекцией радиус-вектора** $\vec{OM}$ **на плоскость Oxy и осью *Ox*,**

θ - угол между осью *Oz* и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$.

Сферические координаты (r, φ, θ)

связаны с декартовыми координатами *(x,y,z)* соотношениями

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le \pi,$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$r \ge 0,$$

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$=-r\sin\theta\sin\varphi(-1)^3\begin{vmatrix}\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}+$$

$$+r\sin\theta\cos\varphi(-1)^4\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$= r\sin\theta\sin\varphi(-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) +$$

$$+ r\sin\theta\cos\varphi(-r\sin^2\theta\cos\varphi - r\cos^2\theta\cos\varphi) =$$

$$= -r^2\sin\theta\sin^2\varphi - r^2\sin\theta\cos^2\varphi = -r^2\sin\theta.$$

$$|I| = r^2\sin\theta. \quad (12.4)$$

Формула (12.2) в сферической системе координат примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta.$$

Обозначим

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \qquad (12.6)$$

Выражение (12.6) определяет элемент объема в сферической системе координат.

Замечание: Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования представляет собой шар или его часть. В этом случае уравнение его границы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

в сферической системе координат примет вид

$$r = R.$$

Действительно,

$$r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta = R^2,$$

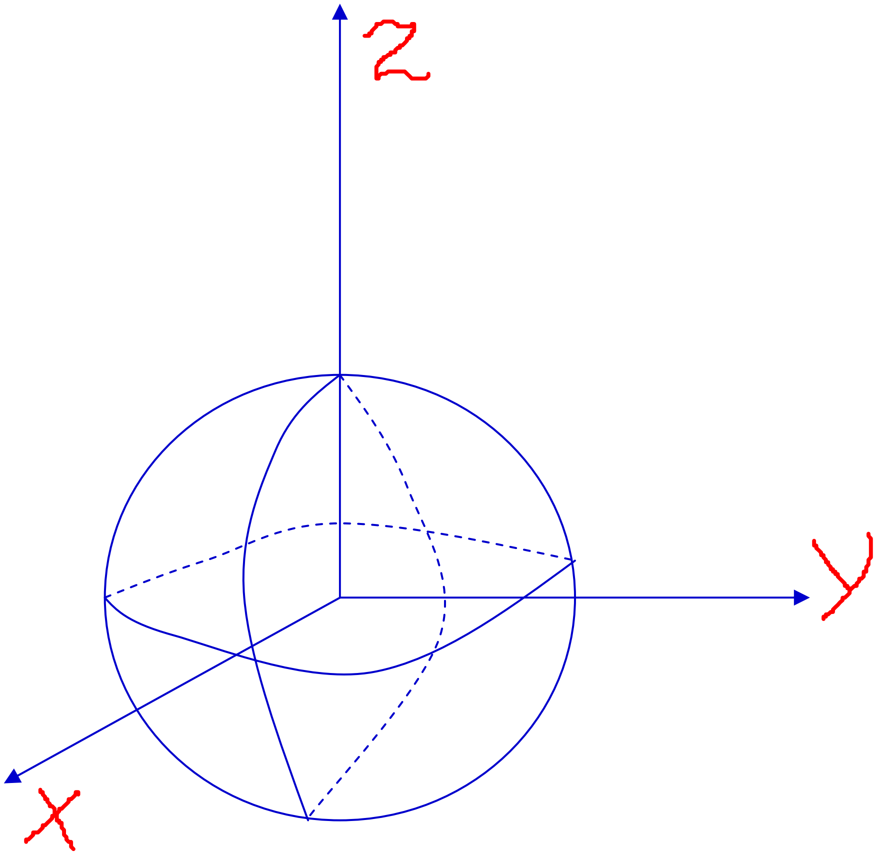
$$r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta = R^2,$$

$$r^2 = R^2,$$

$$r \geq 0, \qquad r = R.$$

Пример: Вычислить $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

V: $\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$



$$0 \le r \le 1,$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$0 \le \theta \le \pi,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^3} dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 \frac{d(1+r^3)}{1+r^3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \ln\left|1+r^3\right|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{3}\ln 2\int_0^{2\pi} d\varphi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2\int_0^{2\pi} d\varphi(-\cos\pi + \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}\ln 2$$

12.4 Приложения тройного интеграла

1)Объем тела

В декартовой системе координат

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

В цилиндрической системе координат

$$V = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz$$

В сферической системе координат

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

2) Масса тела

Масса тела *m*, если задана объемная плотность

$\rho = \rho(x, y, z)$, **вычисляется по формуле:**

в декартовой системе координат:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

в цилиндрической системе координат

$$m = \iiint\limits_V \rho(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

в сферической системе координат:

$$m = \iiint\limits_V \rho(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

3)Координаты центра тяжести в декартовой системе координат

$$X_c = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$Y_c = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$Z_c = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz}.$$