

**Минимальный набор задач для подготовки к экзамену
2 семестр (в гр 1Ттр1, 1Тп1, 1Тк1)**

(I) Комплексные числа.

Арифметические операции над комплексными числами.

Решение квадратных уравнений с $D < 0$.

1) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + 2i$; $z_3 = 5 - 2i$. Вычислить:

$$z_1 + z_2; \quad z_2 + z_3; \quad z_1 - z_2; \quad z_2 - z_3; \quad z_1 \cdot z_2; \quad z_2 \cdot z_3; \quad z_1 / z_2; \quad z_2 / z_3$$

2) Решить уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$; $x^2 + 2x + 10 = 0$; $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$; $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

(II) Неопределенный интеграл (НИ).

1) Непосредственное вычисление НИ.

$$\int (6x^2 + 8x - 2) dx, \quad \int \sqrt{x} dx, \quad \int x^{\frac{7}{5}} dx, \quad \int x^{-5} dx, \quad \int \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx, \quad \int \left(\frac{9}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx,$$
$$\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{x} + 8 \right) dx, \quad \int \left(6^x + 3e^x - \frac{9}{\cos^2 x} \right) dx, \quad \int \left(\frac{3x^4 + 2x}{x} \right) dx$$

2) Замена переменных в НИ.

$$\int \cos(3x+5) dx, \quad \int \sin(8x-2) dx, \quad \int \frac{dx}{2x+3}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2(7x+5)}, \quad \int e^{9x+2} dx, \quad \int \sqrt{7x+2} dx, \quad \int \sqrt[4]{2x+5} dx,$$
$$\int \frac{x dx}{x^4+1} dx, \quad (y = x^2), \quad \int x \cdot \cos(x^2+4) dx, \quad \int x \cdot e^{3x^2+1} dx, \quad \int x^2 \cdot \sqrt{x^3+7} dx, \quad \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{x^2+1} dx, \quad \int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3) Вычисление НИ по частям.

$$\int (x+3) \cos x dx, \quad \int (2x+1) \cdot \ln x dx, \quad \int (x+3)e^{4x} dx$$

4) НИ вида $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$, случаи $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$

$$\int \frac{3x-14}{x^2-9x+20} dx, \quad \int \frac{1}{x^2-8x+16} dx, \quad \int \frac{x+5}{x^2+2x+1} dx, \quad \int \frac{2x+9}{x^2+4x+13} dx$$

5) Тригонометрические НИ вида $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$, $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx, \quad y = \cos x; \quad \int \cos^4 x \cdot \sin x dx; \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x+1} dx, \quad y = \sin x, \quad z = y+1;$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+1} dx, \quad y = \cos x; \quad \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx; \quad \int 5^{\sin x} \cdot \cos x dx; \quad \int (\sin^2 x + 2 \sin x) \cdot \cos x dx.$$

6) Иррациональные НИ

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 5) dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx, \quad \int \frac{2x+5}{\sqrt{x+3}} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1} dx, \quad \int \frac{x+5\sqrt[3]{x}+6}{\sqrt[3]{x}+2} dx.$$

(III) Определенный интеграл (ОИ).

1) Непосредственное вычисление ОИ

$$\int_2^3 (2x+1) dx; \int_2^4 (x-1) dx; \int_1^2 (x^3+2) dx; \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx; \int_0^3 4^x dx; \int_3^4 \frac{dx}{1+x^2}; \int_2^5 \frac{dx}{x}; \int_2^8 \frac{dx}{\cos^2 x}; \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

2) Замена переменных в ОИ

$$\int_0^5 \sqrt{x+4} dx; \int_0^4 \sqrt{3x+4} dx; \int_1^{\sqrt{6}} x \cdot \sqrt{x^2+3} dx; \int_0^2 \cos(3x+1) dx; \int_1^2 \frac{dx}{x+4}; \int_2^3 \frac{x dx}{x^2+1}; \int_2^5 \frac{\ln^3 x}{x} dx; \int_3^7 \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{x} dx$$

3) Вычисление ОИ по частям.

$$\int_2^3 (2x+1) \cdot \cos x dx; \int_1^2 (x+3) \cdot e^x dx; \int_1^3 (4x+1) \cdot \ln x dx$$

4) Приложения ОИ.

Вычислить **площадь** фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$; 2) $y = x^2, y = 8$; 3) $y = x^2 - 1, y = 3$; 4) $y = x^2 + 1, y = x - 1, x = 0, x = 2$;
5) $y = x^3, y = x^2 + 2, x = -1, x = 1$; 6) $y = x^2 - 4, y = -x^2 + 4$; 7) $y = x^2, y = x^3$

Вычислить **длину** кривой: 1) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 1$; 2) $y = 8 \cdot x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2$; 3) $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, 2 \leq x \leq 6$.

(IV) Функции нескольких переменных (ФНП)

1) **Вычислить** указанные значения заданных функций

a) $f(x, y) = 5x + 3y$; $f(2; 1) = ?$ $f(1; 2) = ?$ $f(0; 3) = ?$

б) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$; $f(4; 1) = ?$ $f(9; 7) = ?$ $f(-1; 2) = ?$ $f(3; 3) = ?$

2) **Изобразить** на плоскости область определения $D(f)$ функции $f(x, y)$

a) $f(x, y) = y + \sqrt{x}$; б) $f(x, y) = \sqrt{y-3} + x + 1$; в) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y-2}$; г) $f(x, y) = \ln x + \ln y$;

д) $f(x, y) = \frac{x}{y}$; е) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; ж) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y-5}}$; з) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$;

3) **Составление** функций. Написать функцию $z = f(x, y)$, где

a) x, y – длины сторон прямоугольника, z – его площадь;

б) x, y – длины сторон прямоугольника, z – его периметр;

в) x, y – радиус и высота конуса, z – его объем.

4) Найти **частные** производные

1) $z = 9x + 5y + 8$; 2) $z = x^3 + y^5 - 3x$; 3) $z = \sin x + \ln y + 8y$; 4) $z = \operatorname{tg} x + \arcsin y + x^5 + 2$;

5) $z = 5^x + \operatorname{arctg} y + 3y^3$; 6) $z = x^4 y^2$; 7) $z = x^2 \cdot \cos y$; 8) $z = e^x \cdot \ln y$; 9) $z = 3^x \cdot y^2$; 10) $z = \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} y$;

11) $z = \sin(5x + 2y)$; 12) $z = \operatorname{tg}(2x - 3y)$; 13) $z = \ln(7x + 9y)$; 14) $z = \log_4(5x + 2y)$; 15) $z = e^{5x+2y}$;

16) $z = \frac{\sin x}{y}$; 17) $z = \frac{x^3 + 2}{7y + 3}$; 18) $z = \frac{5x + 6y}{2x + y}$; 19) $z = \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{4}$; 20) $z = \cos(5x + 2y) \cdot \ln(3x + 1)$

5) Найти частные производные **второго порядка**

- 1) $z = \sin x \cdot \sin y$; 2) $z = \cos x \cdot e^y$; 3) $z = \sin 2x \cdot e^{5y}$; 4) $z = x^4 y^3$; 5) $z = x^2 y^3 + 9x + 3y + 8$;
6) $z = \sin(2x + 3y)$; 7) $z = \cos(7x - 4y)$; 8) $z = e^{9x+2y}$; 9) $z = (3x + 4y)^5$

6) Написать уравнение **касательной** плоскости к поверхности $f(x,y,z) = 0$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$, $M(1; 2; 3)$; 2) $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(2; 1; 4)$ 3) $3x^2 - 4y^2 - z = 10$, $M(4; 3; p)$.

7) Исследовать на **экстремум** $z = f(x,y)$

- 1) $z = 2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y$; 2) $z = 6x + 2y - x^2 - y^2$; 3) $z = x^3 + y^2 - 3x - 8y + 1$;
4) $z = 5x + 7y - xy - x^2 - y^2 = 0$

(V) Двойной интеграл

1) Построить на плоскости область D , ограниченную заданными кривыми

и записать **систему неравенств** с переменными x, y , которая задает область D .

- 1) $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$; 2) $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = x$; 3) $x = 3$, $x = 5$, $y = x$, $y = 2$;
4) $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y = x^2$; 5) $y = x^2$, $y = 4$; 6) $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$;
7) $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2 + 1$

2) Записать **повторный** интеграл для $\iint_D f(x, y) dx dy$, если D задана указанной системой

- 1) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq x^2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - 1 \leq y \leq x + 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$

3) Вычислить **двойные** интегралы :

- 1) $\iint_D (4 + 2y) dx dy$, $D: x = 0, x = 4; y = 1, y = 2$; 2) $\iint_D (3x + 6y) dx dy$, $D: x = 0, x = 1; y = x, y = 2$;

4) Найти с помощью двойного интеграла площадь области D , ограниченной линиями:

- 1) $y = x^2 - 1$, $y = 3$; 2) $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x \geq 0$; 3) $y = x^2$, $y = x$

(VI) **Дифференциальные уравнения (ДУ)**

1) ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными.

- 1) $xy' = 5x + 1$; 2) $(x^2 + 1)y' = 1$; 3) $\frac{y'}{\cos x} = \frac{1}{2y}$; 4) $xy' = y^2 + 1$; 5) $y' = 2xy$, $y(0) = 4$;

- 6) $xy' - y = 0$, $y(1) = 5$; 7) $y' \cos^2 x = y^2$.

2) ДУ 1-го порядка в дифференциалах

- 1) $y(2x + 1) dx - dy = 0$; 2) $dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$; 3) $\cos^2 y dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0$;

3) ДУ 1-го порядка линейные

- 1) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$; 2) $xy' + y = \sin x$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$.

4) ДУ 2-го порядка однородные с постоянными коэффициентами

- 1) $y'' - 8y' + 7y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 20y = 0$;
4) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 5) $y'' + 10y' + 25y = 0$; 6) $y'' - 6y' + 10 = 0$;

5) ДУ 2-го порядка неоднородные с постоянными коэффициентами

- 1) $y'' - 8y' + 7y = 2e^{5x}$; 2) $y'' - 6y' + 9y = x + 1$; 3) $y'' - 4y' + 20y = x$

(VII) Ряды.

1) Записать заданный ряд в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$; 2) $-1^7 + 2^7 - 3^7 + 4^7 - 5^7 + \dots$; 3) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$; 4) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{16} + \frac{8}{25} + \dots$

2) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ записать первых 4 слагаемых: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+10}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{3n+1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

3) Найти сумму числового ряда (суммы геом прогр): 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (0,6)^n$.

4) Исследовать на сходимость числовой ряд, используя признаки сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 4^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2+5}{5n^2+n} \right)^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{7n+1}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{8n+1}{2n+3} \right)^n$

5) Исследовать на сходимость числовой ряд Дирихле $\left(\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \right)$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^9}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^{10}}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^3}$.

6) Исследовать на сходимость числовой ряд $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+2n}{10n^3+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1}, \dots \right)$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+2n}{10n^3+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n^3+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^5+3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n+7}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{19}{7n-1}$

7) Исследовать **знакопередающиеся** ряды на абсолютную и условную сходимость

$\left[\begin{array}{l} \text{(I) } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{сх} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх. абс.} \quad \text{(II) } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{расх.} \quad \text{(III) теор. Лейбница} \end{array} \right]$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+19}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3) \cdot 4^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{4^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+2}$.

8) Найти область сходимости **степенного** ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} (x+1)^n$.

9) Написать три первых члена разложения в ряд Тейлора в точке x_0 функции $y=f(x)$

1) $y = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$; 2) $y = \frac{1}{2x+1}$; .

10) Написать разложение в ряд Маклорена функций: 1) $y = x^3 \cos x$; 2) $y = x e^{2x}$; 3) $y = x \sin 4x$.

11) Вычислить приближенно с помощью ряда Маклорена с точностью $\varepsilon = 0,005$:

1) $\sin 0,6$; 2) $\cos 0,4$; 3) $e^{-0,25}$