Министерство образования Республики Беларусь
УО «Витебский государственный технологический университет»

Евклид

Тема5. «Прямая на плоскости»

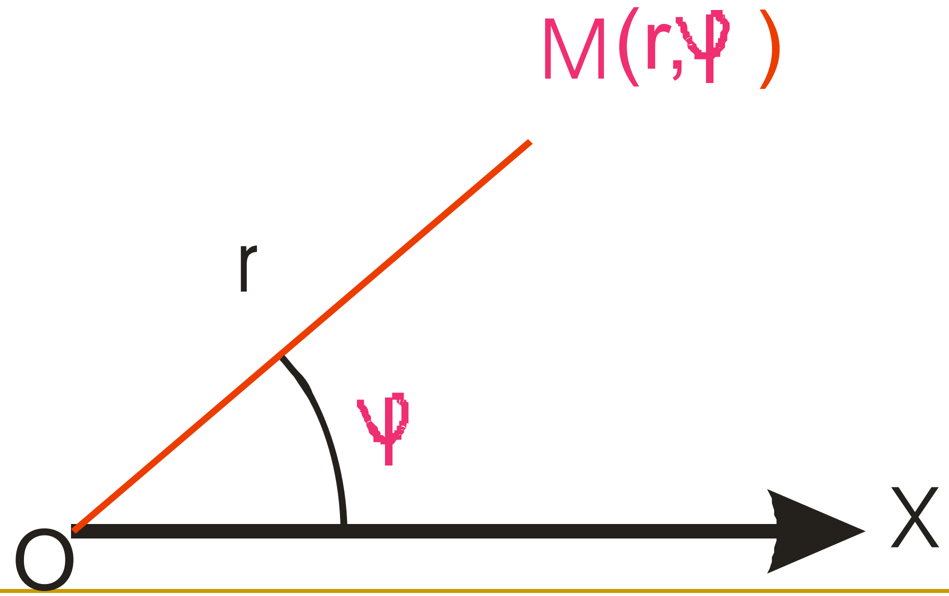
Кафедра теоретической и прикладной математики.

разработана доц.Дуниной Е.Б.

5.1 Полярные координаты на плоскости и их связь с декартовыми

В полярной системе координат некоторую точку плоскости принимают за полюс *О.* Из полюса *О* проводится луч *Ох* который называется полярной осью.

Пусть *М* – какая-либо точка плоскости.



Расстояние *OM=r* точки *M* от полюса *O* называется полярным радиусом точки *M*, а угол φ между осью *Ox* и вектором

$\overrightarrow{OM}$ **называется полярным углом.**

Угол φ отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

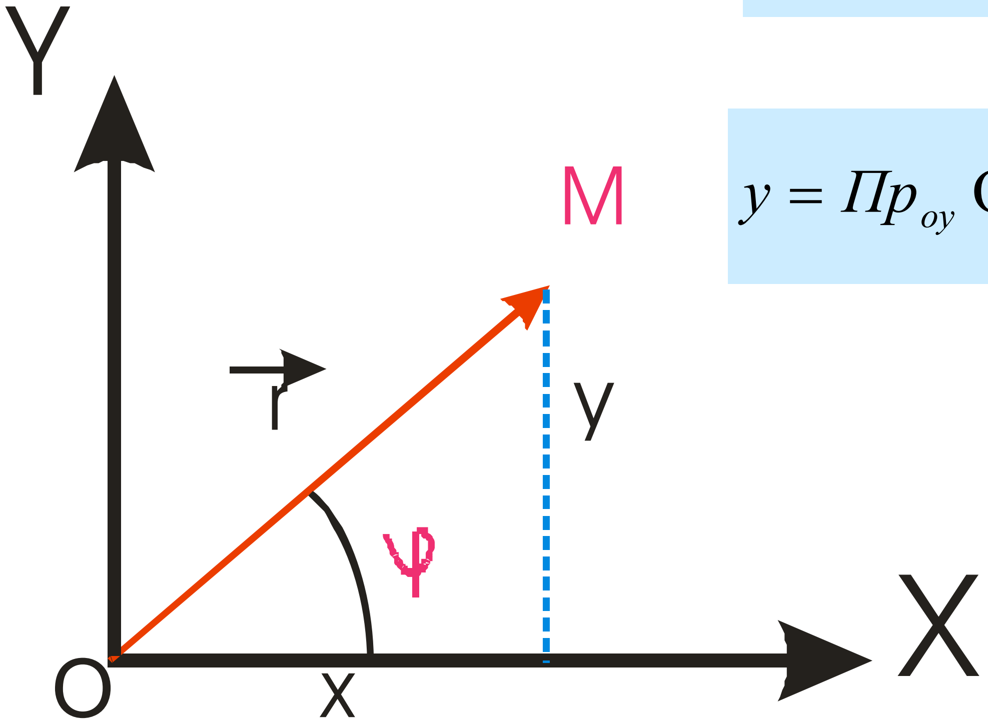
Полярный радиус *r* и полярный угол φ точки *M* называют ее полярными координатами и записывают

$$M(r,\varphi)$$

Чтобы установить связь между полярными и прямоугольными координатами, необходимо за начало координат прямоугольной системы взять полюс *О*, а за ось абсцисс – полярную ось.

$$x = \text{Пр}_{ox}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\varphi = r\cos\varphi$$

$$y = \text{Пр}_{oy}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos(90-\varphi) = r\sin\varphi$$



Таким образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (5.1)$$

Чтобы получить полярные координаты точки, зная ее декартовые координаты, возведем обе части каждого из равенств в квадрат и сложим их почленно

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Отсюда

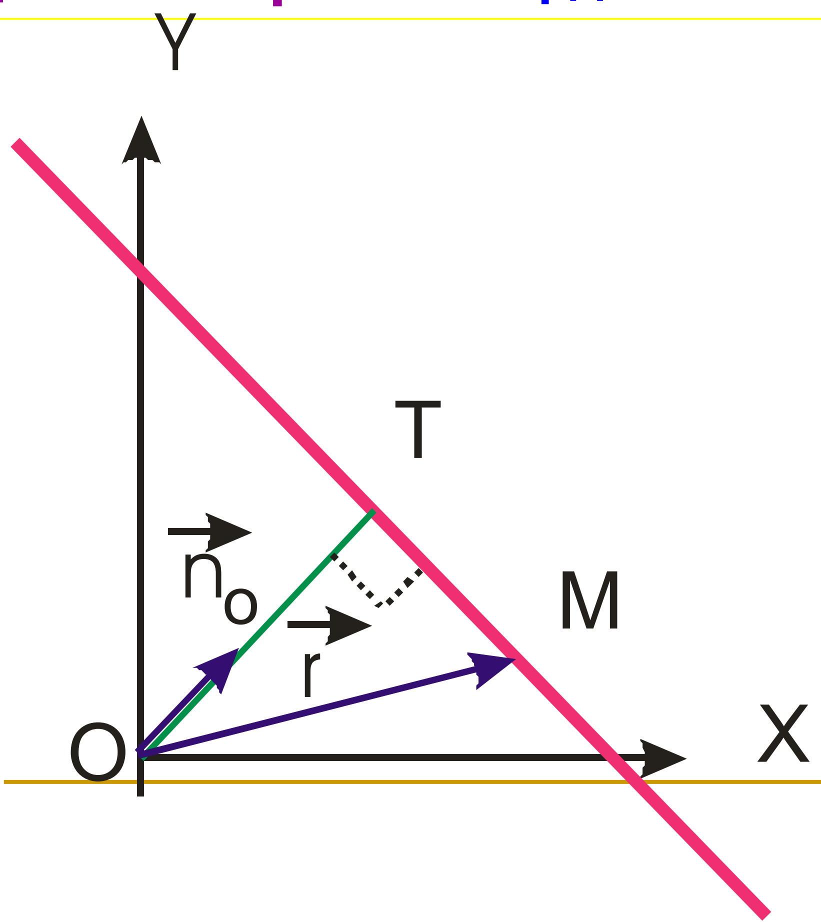
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Разделив второе равенство системы на первое, получим

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

5.2 Нормальное уравнение прямой.

Уравнением данной линии называется такое уравнение между переменными *x* и *y* или *r* и φ, которому **удовлетворяют** координаты любой точки, лежащей на этой линии и **не удовлетворяют** координаты ни одной точки не лежащие на ней.



Положение прямой на плоскости будет вполне определено, если задать ее расстояние *p* от начала координат, т.е. длину перпендикуляра *OT,* опущенного из точки на прямую, и единичный вектор $\vec{n}_0$ перпендикулярный к прямой и выходящий из начала координат.

Возьмем на прямой произвольную точку *M(x,y)*. Когда точка *M* движется по прямой, то

$$\text{Пр}_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = OT = p \qquad (5.1)$$

Согласно определению скалярного произведения векторов,

$$\text{Пр}_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}_0 = \vec{r}\vec{n}_0$$

Следовательно (5.1) может быть переписано в виде

$$\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0 \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) называется нормальным уравнением прямой.

Переходя к координатам, заметим, что проекциями единичного вектора

$\vec{n}_0$ на оси координат *Ox, Oy* служат *cosα и sinα,* где α-угол составленный этим вектором с осью *Ox*, т.е.

$$\vec{n}_0(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\vec{r}(x, y).$$

Так как скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций, то уравнению (5.2) соответствует

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется уравнением прямой в координатной форме. Это уравнение первой степени относительно *x,y.* Таким образом, всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

5.3 Общее уравнение прямой.

Теорема: Всякое уравнение первой степени между двумя переменными определяет на плоскости прямую.

Доказательство

Возьмем уравнение первой степени общего вида

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5.4)$$

Будем рассматривать *A* и *B* как проекции на оси координат *Ox* и *Oy* некоторого вектора $\vec{n}$ **а *x,y* – как проекции радиус-вектора** $\vec{r}$ **точки *M*. Тогда уравнение (5.4) может быть переписано в векторной форме**

$$\vec{n}\vec{r} + C = 0 \qquad (5.5)$$

Покажем, что уравнение (5.5) может быть приведено к виду (5.2).

1. Пусть *C<0*, тогда, разделив уравнение (5.5) на модуль вектора $\vec{n}$ получим

$$\vec{r}\vec{n}_0 + \frac{C}{|\vec{n}|} = 0,$$

т.к.

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{n}_0$$

Обозначив, отрицательное число

$$\frac{C}{|\vec{n}|} = -p,$$

где *p*-положительно, будем иметь уравнение

$$\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0.$$

2. Пусть *C>0*, то разделим уравнение (5.5) на $-|\vec{n}|$.

Тогда уравнение примет вид

$$\vec{r}(-\vec{n}_0) - \frac{C}{|\vec{n}|} = 0$$

Обозначив положительное число $\frac{C}{|\vec{n}|} = p,$ **получим уравнение**

$$\vec{r}(-\vec{n}_0) - p = 0$$

3. Если *C=0*, то уравнение (5.5) можно разделить на $|\vec{n}|$ **или на** $-|\vec{n}|.$

В первом случае получим $\vec{r}\vec{n}_0 = 0,$

а во втором $\vec{r}(-\vec{n}_0) = 0.$

Каждое из них является уравнением вида (5.2).
Таким образом, уравнение (5.4) всегда может быть приведено к уравнению вида (5.2). А следовательно уравнение (5.4) определяет прямую.

что и требовалось доказать.

Уравнение $$Ax + By + C = 0 \qquad (5.4)$$

называется **общим уравнением прямой.**

Всякий вектор, отличный от нулевого, перпендикулярный к прямой, будем называть нормальным вектором прямой.

Тогда $\vec{n}(A, B)$ **будет одним из нормальных векторов прямой.**

Таким образом, коэффициенты *A,B* являются *проекциями нормального вектора на координатные оси*.

Свободный член *C* геометрического смысла не имеет, но если его разделить на длину вектора $\vec{n}$ **и взять этот результат по абсолютной величине, то получим расстояние прямой от начала координат.**

Чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, надо разделить его на длину вектора $\vec{n}(A, B)$,

взятую со знаком плюс, если свободный член *C* отрицательный, и со знаком «-», если *C* – положительно.

Другими словами, надо умножить уравнение (5.4) на множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.6)$$

причем знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена *C* в уравнении (5.4).

Множитель *μ* носит название нормирующего множителя.

После умножения на *μ* уравнение (5.4)принимает вид

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

Сравнивая его с уравнением (5.3), получим

$$\mu A = \cos\alpha, \;\; \mu B = \sin\alpha, \;\; \mu C = -p$$

Или $$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \;\; \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \;\; p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

В этих формулах надо брать верхние знаки, если *C<0(μ>0),* и нижние знаки в противном случае.

Пример 1: Привести уравнение прямой $$3x + 4y - 10 = 0$$

к нормальному виду.

Решение. **Нормирующий множитель будет** $$\mu = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$$

Умножая на него данное уравнение, получим

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

Для данной прямой

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}, p = 2$$

Пример 2. Даны точки $M_1(2,-1)$ *и* $M_2(5,3)$

Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1 **и перпендикулярной вектору** $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение.

Нормальный вектор искомой прямой имеет координаты $\vec{n}(3,4)$

Следовательно, уравнение искомой прямой можно записать в виде

$$3x + 4y + C = 0$$

Постоянную *C* найдем из условия, что прямая проходит через точку

M_1

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + C = 0,$$

$$C = -2$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид

$$3x + 4y - 2 = 0.$$

5.4 Особые случаи расположения прямой

Рассмотрим общее уравнение прямой $$Ax + By + C = 0$$

в случаях, когда некоторые коэффициенты равны нулю:

1. $C = 0, Ax + By = 0$ **Прямая проходит через начало координат.**

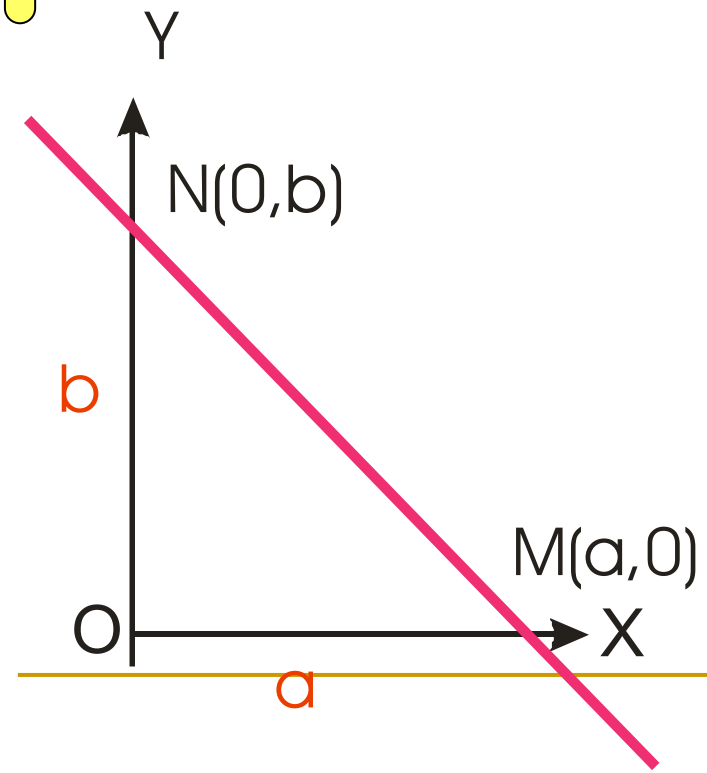
2. $B = 0, Ax + C = 0, x = -\dfrac{C}{A}.$ **Для всех точек такой прямой линии абсцисса *x* имеет постоянное значение, т.е прямая линия расположена параллельна оси *Oy*.**

3. $A = 0, By + C = 0, y = -\dfrac{C}{B}$ **Прямая параллельна оси *Ox*.**

4. $C = 0, B = 0, Ax = 0, x = 0$ Прямая совпадает с осью *Oy*.

5. $A = 0, C = 0, By = 0, y = 0$ Прямая совпадает с осью *Ox*.

5.5 Уравнение прямой в отрезках.



Даны отрезки *a* и *b*, отсекаемые прямой на осях координат.

Запишем общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Выразим теперь коэффициенты уравнения через параметры *a* и *b*.

Т.к. точка *M(a,0)* лежит на данной прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$A\cdot a+B\cdot 0+C=0$$ или $$A\cdot a+C=0$$

Тогда $$A=-\frac{C}{a}$$

Аналогично и координаты точки *N(0,b)* должны удовлетворять уравнению

$$A\cdot 0+B\cdot b+C=0$$ и $$B=-\frac{C}{b}$$

Подставив полученные значения *A и B* в уравнение прямой, получим

$$-\frac{C}{a}x-\frac{C}{b}y+C=0$$

Сократив на *С* получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5.7)$$

Уравнение называется уравнением прямой в отрезках.

Замечание: Т.к. точка *М* пересечения прямой с осью *Ох* имеет ординату *у=0,* то, чтобы найти ее абсциссу, т.е отрезок *а,* надо в уравнении прямой положить *у=0.* Аналогично, чтобы найти отрезок *b*, надо в уравнении прямой положить *х=0.*

Пример:

Записать уравнение прямой $3x-7y-21=0$ **в отрезках.**

Решение.

Положив *y=0*, получим $3x-21=0.$ **Откуда *x=a=21/3=7.***

Положив *x=0*, получим $-7y-21=0.$ **Откуда *y=b=-21/7= -3.***

Уравнение в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{-3}=1$$

5.6 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Вектор, который параллелен прямой или принадлежит ей, называется направляющим вектором прямой.

Пусть $\vec{s}(m, n)$ **- направляющий вектор прямой.**

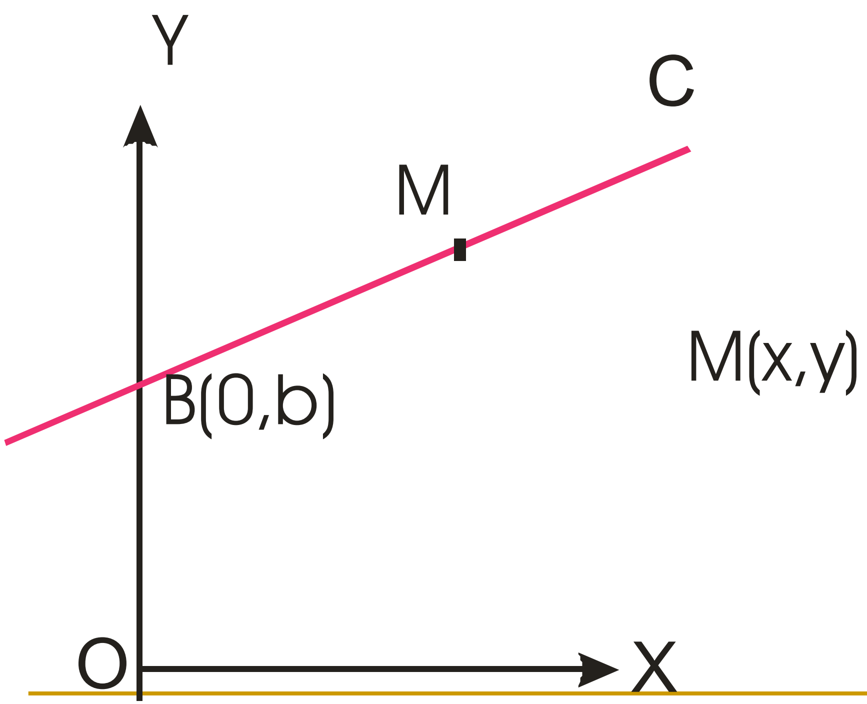
Угловым коэффициентом прямой называется отношение проекции направляющего вектора прямой на ось *Oy* к его проекции на ось *Ox*, т.е.

$$k = \frac{n}{m}$$

При этом предполагается, что *m≠0*, т.е. что прямая не параллельна оси *Oy*.

Если $m = \left|\vec{s}\right| \cos\alpha$, $n = \left|\vec{s}\right| \sin\alpha$ **то** $k = \dfrac{n}{m} = tg\alpha$

Предположим, что прямая задана угловым коэффициентом *k* и точкой *B(0,b)* пересечения прямой с осью *Oy*. Найдем уравнение этой прямой.



Примем за направляющий вектор прямой вектор

$$\overrightarrow{BM}$$

где *M* произвольная точка прямой, тогда

$$\overrightarrow{BM}(x-0, y-b)$$

Тогда $k = \dfrac{y-b}{x-0}$ **и** $$y = kx + b \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) есть уравнение прямой отсекающей на оси *Oy* отрезок *b* имеющий угловой коэффициент *k*.

Пусть прямая, не параллельная оси *Oy*, задана точкой $M_1(x_1, y_1)$ **и угловым коэффициентом *k*. Уравнение прямой будем искать в виде (5.8).**

Чтобы найти *b* подставим в уравнение вместо *x,y* координаты точки M_1, **получим** $$y_1 = kx_1 + b$$

Вычитая это равенство из равенства (5.8) получаем уравнение прямой

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5.9)$$

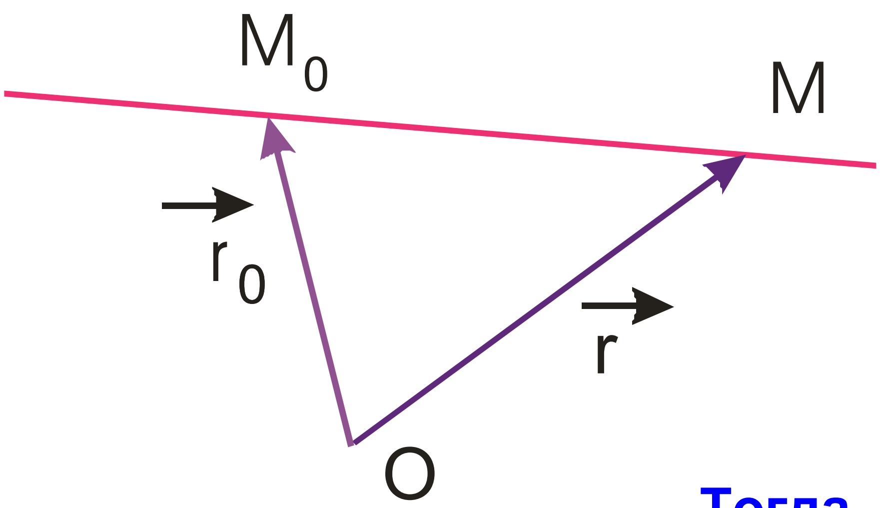
Это уравнение прямой, проходящей через заданную точку с данным угловым коэффициентом.

5.7 Параметрическое и каноническое уравнение прямой.

Пусть дана прямая. Точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой

и произвольный не нулевой вектор $\vec{s}(m, n)$

направляющий вектор прямой.



Пусть *M* произвольная точка прямой

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Тогда $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$ **и**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad \textbf{(5.10)}$$

Запишем в координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \qquad (5.11)$$

Получили параметрические уравнения прямой.

От параметрических уравнений прямой легко перейти к **канонческим уравнениям**.
Для этого достаточно из параметрических уравнений прямой исключить параметр *t*.

Получим каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

5.8 Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Зададим прямую двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

причем $x_2 - x_1 \neq 0.$

Принимая за направляющий вектор прямой вектор

$$\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

найдем угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Или

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad (5.12)$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (5.13)$$

Разделим уравнение (5.13) на (5.12) и получим

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Это уравнение прямой проходящей через две точки.

5.9 Угол между прямыми.

Пусть прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$ **и** $$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тогда $\vec{n}_1(A_1, B_1), \vec{n}_2(A_2, B_2)$ **- нормальные векторы прямых.**

Углом между прямыми будем называть любой из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

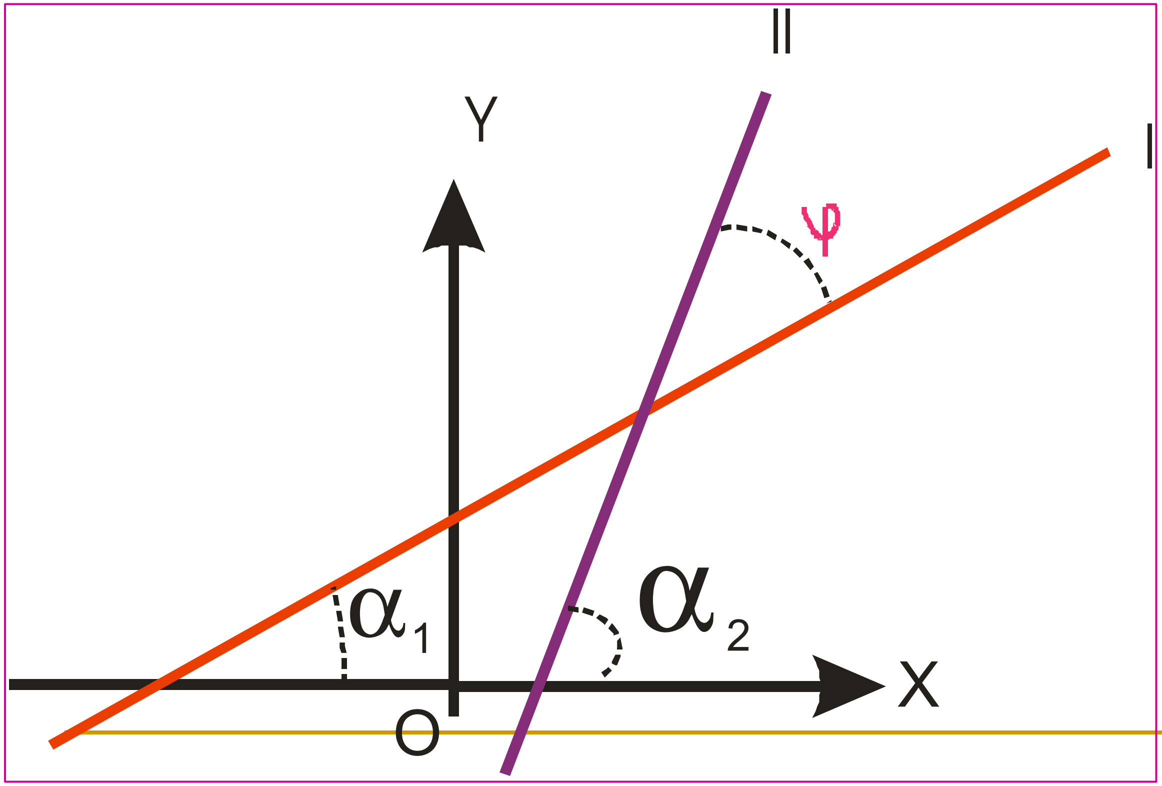
Один из этих смежных углов равен углу *φ* между векторами

$\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ **перпендикулярными к данным прямым**

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\varphi$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (5.14)$$



Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2$$

Требуется найти угол *φ* между этими прямыми. Обозначим угол составленный прямой (I) с осью *Ox* через α_1,

а прямой (II) с осью *Ox* через α_2.

Из рисунка видно, что

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi.$$

Откуда

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}$$

Подставив значения угловых коэффициентов, получим

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

где $tg\alpha_1 = k_1, tg\alpha_2 = k_2$

5.10 Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Условие **параллельности** прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

в векторной форме может быть записано

$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2,$ где $\vec{n}_1(A_1, B_1), \vec{n}_2(A_2, B_2)$

- нормальные векторы прямых.

Переходя к проекциям, перепишем это условие таким образом

$$A_1 = \lambda A_2, \; B_1 = \lambda B_2$$

Это равносильно условию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (5.15)$$

В случае перпендикулярности прямых угол между ними равен

$$90^0, \cos 90^0 = 0$$

Поэтому условие перпендикулярности прямых можно записать в виде

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (5.16)$$

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y = k_1 x + b_1$$

$$y = k_2 x + b_2$$

Они будут **параллельны** **в том случае, когда составляют равные углы** α_1 **и** α_2 **с осью** ***Ox.***

Следовательно $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ или $k_1 = k_2.$

Прямые будут **перпендикулярны** **в том случае, когда угол** ***φ*** **между ними равен**

$$90^0, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$$

Получим

$$tg\alpha_2 = tg(\alpha_1 + 90^0) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$$

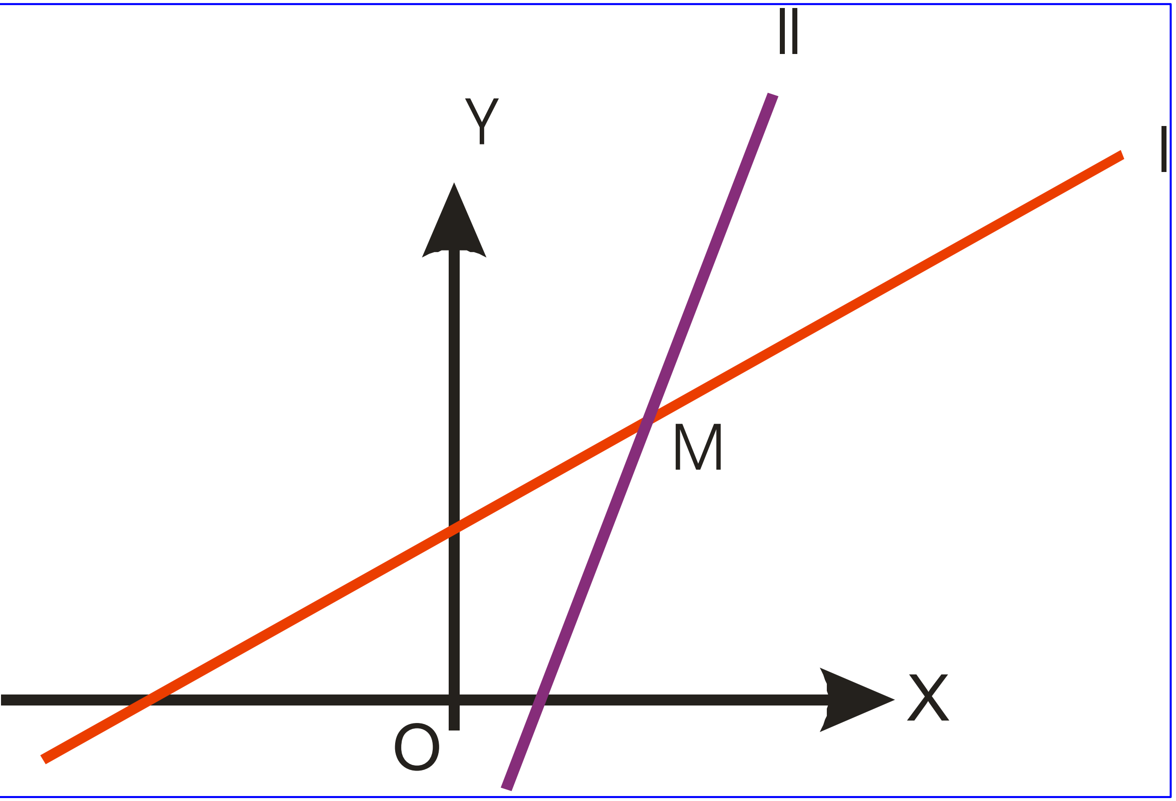
Или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

5.11 Пересечение двух прямых.

Пусть даны прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$



Требуется найти точку пересечения

$$M(x, y)$$

Эта точка лежит как на одной, так и на другой прямой, поэтому ее координаты *x* и *y* должны удовлетворять одновременно как первому, так и второму уравнению. Отсюда следует, что для нахождения точки пересечения двух прямых надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

При решении системы уравнений возможны три случая:

1. Система имеет одно решение $x = x_0, y = y_0.$

В этом случае прямые имеют одну точку пересечения.

2. Система несовместна (т.е. не имеет решения). В этом случае общих точек прямые не имеют, они параллельны.

3. Система неопределенная (т.е. имеет бесконечное множество решений). В этом случае система приводится к одному уравнению (прямые сливаются).

Пример:

Определить точку пересечения прямых линий

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Решение **Решаем систему уравнений методом Крамера**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Составляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$$

Получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{7}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{7}.$$

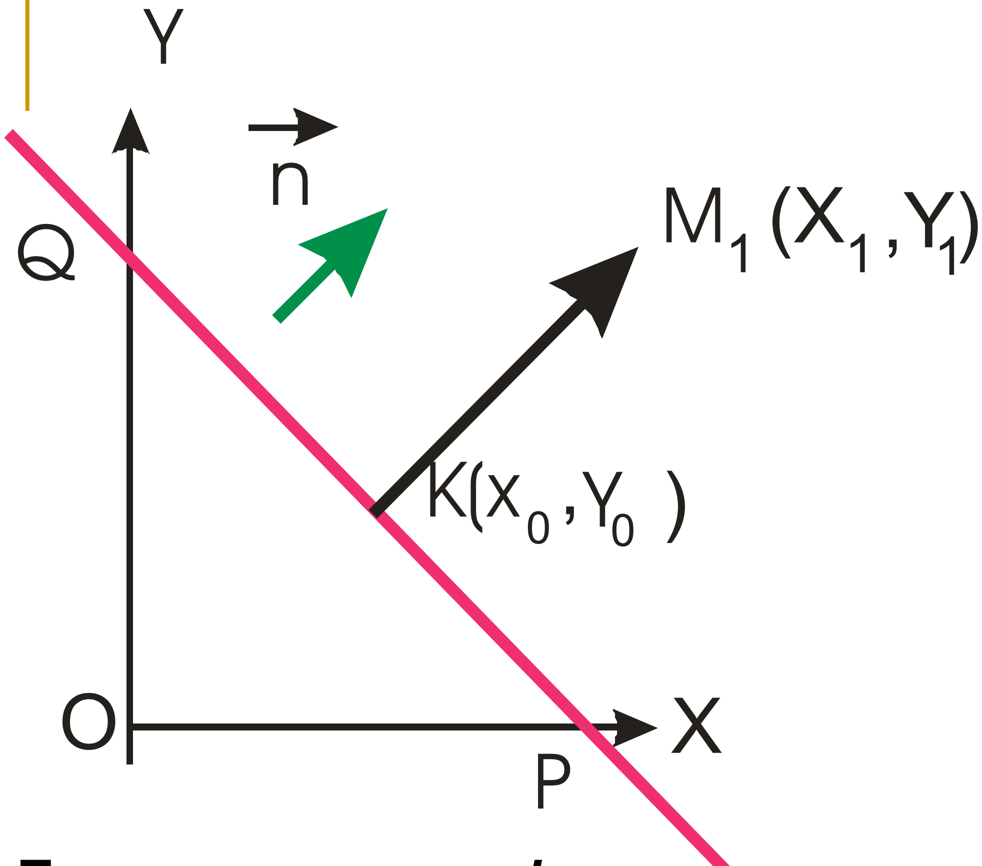
Получили координаты точки пересечения двух данных прямых

$$M\left(\frac{5}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

5.12 Расстояние от точки до прямой.

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$

до прямой $Ax + By + C = 0$



Опустим из точки M_1 **перпендикуляр** M_1K **на данную прямую *PQ* .**

Тогда расстояние *d* от точки до прямой *PQ* будет равно модулю вектора $\overrightarrow{KM_1}$.

Т.к. вектор $\overrightarrow{KM_1}$ **и нормальный вектор** $\vec{n}(A, B)$ **прямой параллельны между собой, то их скалярное произведение**

$$\vec{n}\,\overrightarrow{KM_1} = \pm|\vec{n}|d$$

Пусть точка *К* имеет координаты $K(x_0, y_0)$, **тогда**

$$\overrightarrow{KM}_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Выразим скалярное произведение $\vec{n}\,\overrightarrow{KM}_1$

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = \pm|\vec{n}|d,$$ **или**

$$Ax_1 + By_1 + C - (Ax_0 + By_0 + C) = \pm|\vec{n}|d$$

Т.к. точка $K(x_0, y_0)$ **принадлежит прямой, то**

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

И равенство принимает вид

$$Ax_1 + By_1 + C = \pm|\vec{n}|d$$

Отсюда искомое расстояние от точки до прямой, равно

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$