Министерство образования Республики Беларусь

УО «Витебский государственный технологический университет»

Тема 3. Интерполирование

Кафедра теоретичской и прикладной математики.

разработана доц. Е.Б.Дуниной

3.1 Понятие о приближении функций.

Пусть величина *y* является функцией аргумента *x*.

На практике часто неизвестна явная связь между *y* и *x*, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x).$

Наиболее распространенным и практически важным, когда вид связи между параметрами *x* и *y* неизвестен, является задание этой связи в виде таблицы $\{x_i, y_i\}.$

На практике могут понадобиться значения величины *у* и в других точках, отличных от узлов x_i.

Этой цели и служит задача о приближении (*аппроксимации*) функций:

данную функцию $f(x)$ **требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией** $\varphi(x)$,

так чтобы отклонение $\varphi(x)$ **от** $f(x)$ **в заданной области было наименьшим.**

Функция $\varphi(x)$ **при этом называется аппроксимирующей.**

Для практики важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad (3.1)$$

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$,

то аппроксимация называется точечной.

При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке [a,b]) аппроксимация называется непрерывной (или интегральной).

Одним из основных типов точечной аппроксимации является *интерполирование*.

Оно состоит в следующем: для данной функции строим многочлен (3.1), принимающий в заданных точках x_i,

те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т.е.

$$\boxed{\varphi(x_i) = y_i,} \quad \boxed{i = 0,1,\ldots,n \qquad (3.2)}$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых.

Точки $\boxed{x_i}$ называют узлами интерполяции,

а многочлен $\boxed{\varphi(x)}$ -интерполяционным многочленом.

Максимальная степень многочлена $m = n.$

В этом случае говорят о глобальной интерполяции, поскольку один многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \quad (3.3)$$

используется для интерполяции функции на всем рассматриваемом интервале.

Коэффициенты a_j **многочлена (3.3) находятся из системы уравнений (3.2).**

Итак, при интерполировании основным условием является прохождение графика интерполяционного многочлена через данные значения функций в узлах интерполяции.

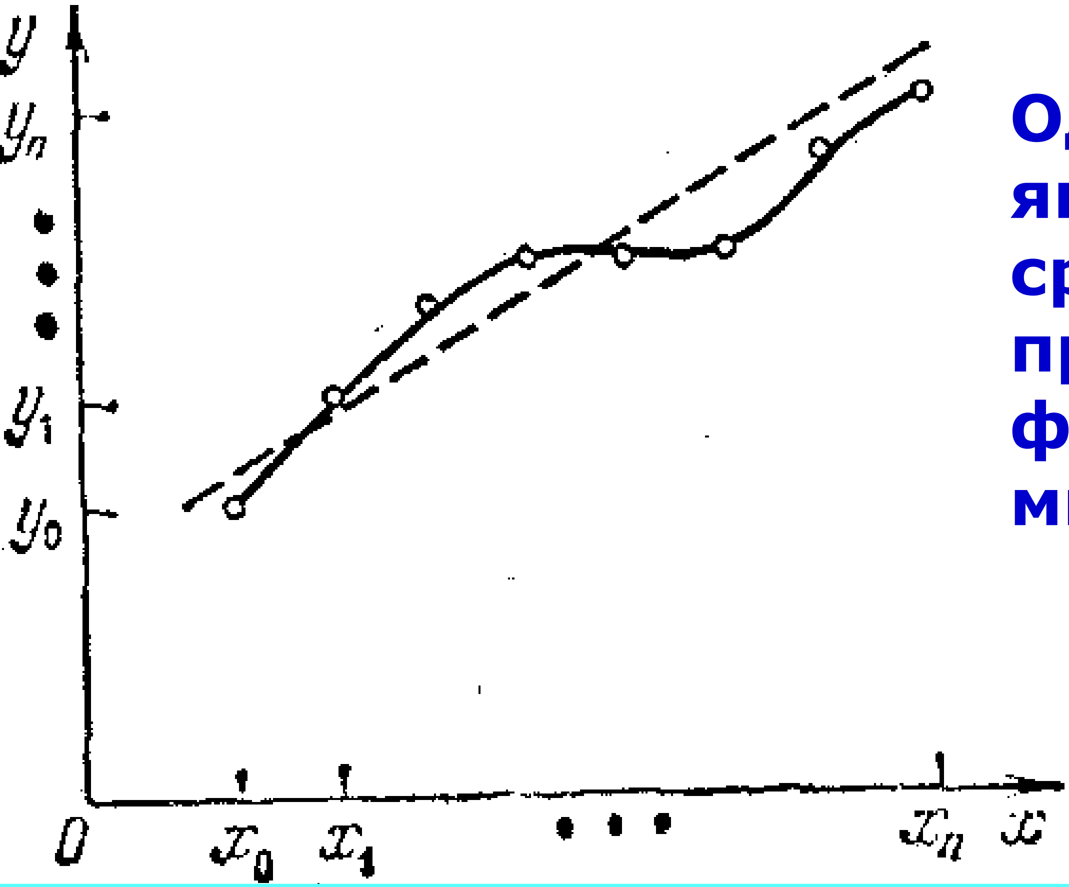
В ряде случаев выполнение этого условия затруднительно.

Например, при большом количестве узлов интерполяции получается высокая степень многочлена в случае когда нужно иметь один интерполяционный многочлен для всего интервала изменения аргумента.

Кроме того, табличные данные могли быть получены путем измерений и содержать ошибки.

Построение аппроксимирующего многочлена с условием обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерении ошибок.

Выход из этого положения может быть найден выбором такого многочлена, график которого проходит близко от данных точек.



Одним из таких видов является среднеквадратичное приближение функций с помощью многочлена (3.1).

Интерполирование и апроксимация

При этом $m \le n,$ **случай** $m = n$

соответствует интерполяции.

На практике стараются подобрать аппроксимирующий многочлен как можно меньшей степени (как правило, $m = 1,2,3$ **).**

Мерой отклонения многочлена $\varphi(x)$

от заданной функции $f(x)$ **на множестве точек**

(x_i, y_i) $(i = 0,1,\ldots,n)$ **при среднеквадратичном**

приближении **является величина *S*,**

равная сумме квадратов разностей между значениями многочлена и функции в данных точках

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \quad (3.4)$$

Для построения аппроксимирующего многочлена нужно подобрать коэффициенты

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

так, чтобы величина *S* была наименьшей.
В этом состоит метод наименьших квадратов.

Иногда, при построении приближения ставится более жесткое условие: требуется, чтобы во всех точках некоторого отрезка $[a,b]$

отклонение многочлена $\varphi(x)$ от функции $f(x)$

было по абсолютной величине меньшим заданной величины $\varepsilon > 0$

$$\left| f(x) - \varphi(x) \right| < \varepsilon, a \le x \le b$$

В этом случае говорят, что многочлен $\varphi(x)$

***равномерно аппроксимирует* функцию** $f(x)$

с точностью ε **на отрезке** $[a,b]$.

3.2 Линейная и квадратичная интерполяции.

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является линейная интерполяция.

Она состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i) **(*i* = 0, 1, ..., *n*) соединяются прямолинейными отрезками, и функция** $f(x)$ **приближается ломаной с вершинами в данных точках.**

Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные.

Поскольку имеется *n* интервалов (x_{i-1}, x_i), **то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки.**

В частности, для *i*-го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) **и** (x_i, y_i), **в виде**

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Отсюда

$$y = y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Запишем *y* в виде

$$y = a_i x + b_i, x_{i-1} \le x \le x_i, \quad (3.5)$$

тогда

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента *x*, а затем подставить его в формулу (3.5) и найти приближенное значение функции в этой точке.

Рассмотрим теперь случай ***квадратичной интерполяции***.

В качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ **принимается квадратный трехчлен.**

Такую интерполяцию называют также *параболической.*

Уравнение квадратного трехчлена

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad x_{i-1} \le x \le x_{i+1} \qquad (3.6)$$

содержит три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i **для определения которых необходимы три уравнения.**

Ими служат условия прохождения параболы через три точки

$$(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Эти условия можно записать в виде

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \end{cases} \qquad (3.7)$$

Пример. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ **при** $x = 0,32$**, если известна следующая таблица ее значений:**

x	0.15	0.30	0.40	0.55
y	2.17	3.63	5.07	7.78

Решение.

Воспользуемся сначала формулой линейной интерполяции (3.5). Значение $x = 0.32$ находится между узлами

$$x_{i-1} = 0.30$$ **и** $$x_i = 0.40$$

В этом случае

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5.07 - 3.63}{0.40 - 0.30} = 14.4$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3.63 - 14.4 \cdot 0.30 = -0.69$$

$$y \approx 14.4x - 0.69 = 14.4 \cdot 0.32 - 0.69 = 3.92$$

Найдем теперь приближенное значение функции с помощью формулы квадратичной интерполяции (3.6).

Составим систему уравнений (3.7) с учетом ближайших к точке *x=0.32* узлов:

$$x_{i-1} = 0.15, x_i = 0.30, x_{i+1} = 0.40$$

Соответственно

$$y_{i-1} = 2.17, y_i = 3.63, y_{i+1} = 5.07$$

Система запишется в виде

$$\begin{cases} 0.15^2 a_i + 0.15 b_i + c_i = 2.17 \\ 0.30^2 a_i + 0.30 b_i + c_i = 3.63 \\ 0.40^2 a_i + 0.40 b_i + c_i = 5.07 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$a_i = 18.67, b_i = 1.33, c_i = 1.55$$

Искомое значение функции

$$y \approx 18.67 \cdot 0.32^2 + 1.33 \cdot 0.32 + 1.55 = 3.89$$

3.3 Многочлен Лагранжа.

Рассмотрим случай глобальной интерполяции, т.е. построение интерполяционного многочлена, единого для всего отрезка $[x_0, x_n]$.

При этом график интерполяционного многочлена должен проходить через все заданные точки.

Запишем искомый многочлен в виде

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (3.8)$$

Из условия равенства этого многочлена в узлах x_i соответствующим заданным табличным значениям y_i

получим следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, если среди узлов интерполяции нет совпадающих.

Такой путь построения интерполяционного многочлена требует значительного объема вычислений, особенно при большом числе узлов.

Существуют более простые алгоритмы построения интерполяционных многочленов.

Будем искать многочлен в виде линейной комбинации многочленов степени *n*

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + ... + y_n l_n(x) \qquad (3.9)$$

При этом потребуем, чтобы каждый многочлен $l_i(x)$ **обращался в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного (*i-го*), где он должен равняться единице.**

Легко проверить, что этим условиям отвечает многочлен вида

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}. \quad (3.10)$$

Действительно, $l_0(x_0)=1$ **при** $x=x_0$.

При $x=x_1, x_2, ..., x_n$

числитель выражения обращается в нуль.

По аналогии с (3.10) получим

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)...(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)}$$

....

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (3.11)$$

....

Подставляя в (3.9) полученные выражения, находим

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (3.12)$$

Эта формула называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Из формулы (3.12) можно получить выражения для линейной (n=1) и квадратичной (n=2) интерполяций:

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \qquad n = 1$$

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \qquad n = 2$$

Пример. **Зависимость прочности пряжи от влажности задана таблицей**

Влажность пряжи, %	x_i	38	58	80	93
Прочность пряжи	$f(x_i)$	2.6	2.6	3.3	3.1

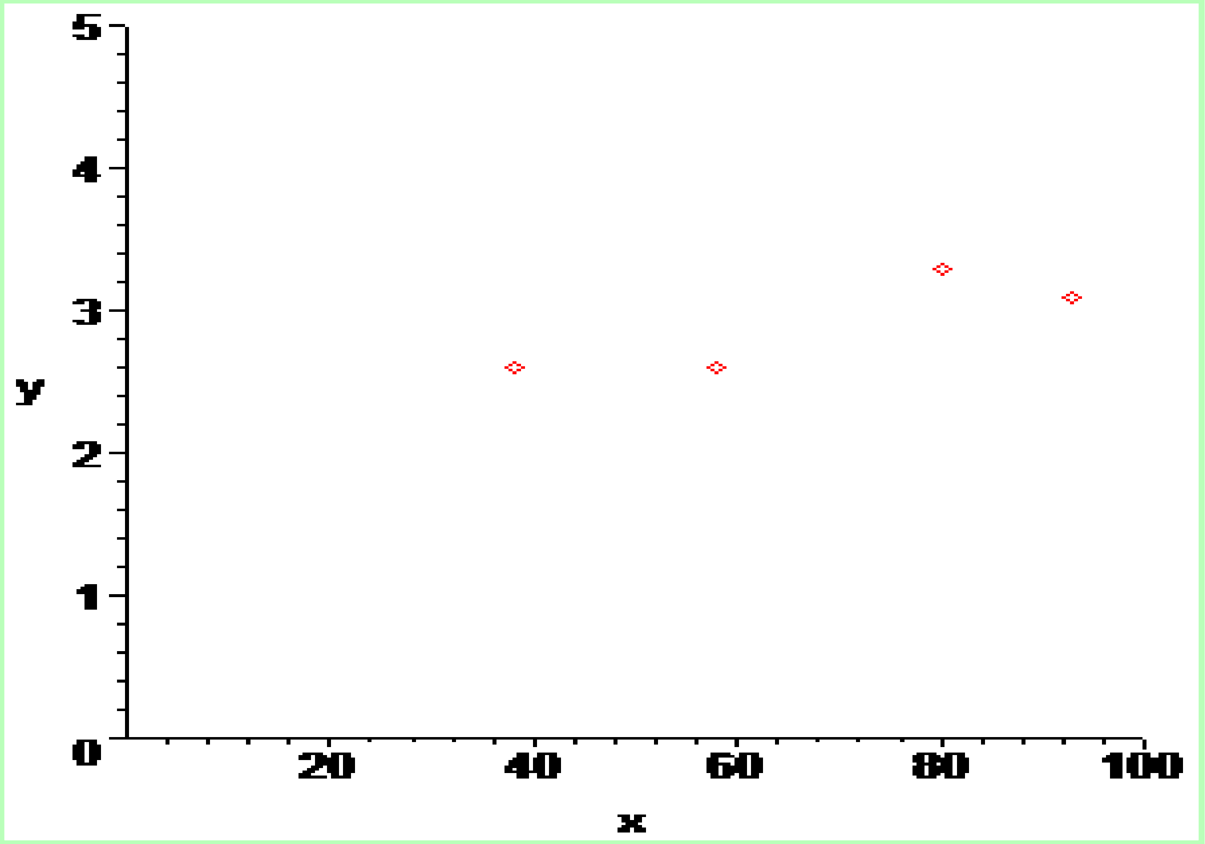
Найти приближенное значение прочности пряжи при влажности x^*=70%, построив интерполяционный многочлен Лагранжа степени n.

Решение.

Чтобы определить степень многочлена Лагранжа, изобразим точки $(x_i, f(x_i))$

на плоскости и соединим их кривой

```
> restart;
> with(plots):X:=[38,58,80,93]:
Y:=[2.6,2.6,3.3,3.1]:
q1:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..4],x=0..100,y=0..5,
style=point,color=red):
> display(q1);
```



$$x^* = 70 \in [58,89]$$

Т.к. кривая на отрезке, соединяющем соседние с x* узлы, похожа на квадратичную параболу, принимаем *n = 2*. Считая точки

$$x_0 = 58, y_0 = 2.6, x_1 = 80, y_1 = 3.3, x_2 = 93, y_2 = 3.1$$

узлами интерполяции, запишем аналитическое выражение для многочлена

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Таким образом

$$L(x)=\frac{(x-80)(x-93)}{(58-80)(58-93)}\cdot 2.6+\frac{(x-58)(x-93)}{(80-58)(80-93)}\cdot 3.3+$$
$$+\frac{(x-58)(x-80)}{(93-58)(93-80)}\cdot 3.1$$

```
> L:=Y[2]*(x-X[3])*(x-X[4])/((X[2]-X[3])*(X[2]-X[4]))+Y[3]*(x-X[2])*(x-X[4])/((X[3]-X[2])*(X[3]-X[4]))+Y[4]*(x-X[2])*(x-X[3])/((X[4]-X[2])*(X[4]-X[3]));
```

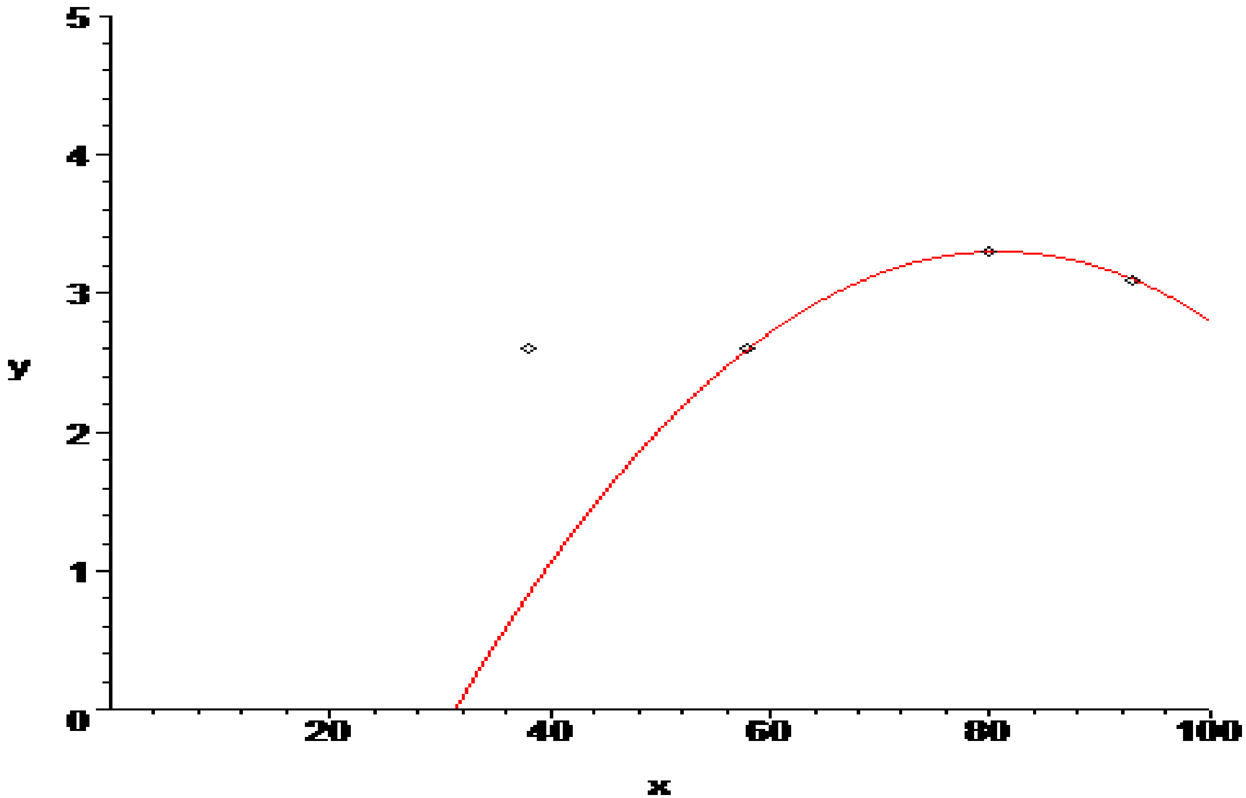
$$L := 0.003376623377\,(x-80)\,(x-93)-0.01153846154\,(x-58)\,(x-93)$$
$$+\,0.006813186813\,(x-58)\,(x-80)$$

```
> simplify (L);
```

$$-0.001348651350\,x^2+0.2179320681\,x-5.503196810$$

Для наглядности можно построить график

```
> f:=L;
> q2:=plot(f,x=0..100,color=red):
q1:=plot([[X[i],Y[i]]$i=1..4],x=0..100,
y=0..5,style=point,color=red):
> display(q1,q2);
```



```
> x:=70;L2:=L;
```

Вычислим значение $L_2(70)$

`> L2:=subs(x=70,L);` **или**

```
> x:=70;L2:=L;
```

$$L2 := 3.143656344$$

3.4Многочлен Ньютона.

Рассмотрим случай равноотстоящих значений аргумента, т.е. $x_i - x_{i-1} = h = const(i = 1,2,...,n)$

Величина *h* называется шагом.

Введем понятие конечных разностей.

Пусть известны значения функции в узлах x_i

$$y_i = f(x_i)$$

Составим разности значений функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)$$

....

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h)$$

Эти значения называются первыми разностями (или разностями первого порядка) функции.

Можно составить вторые разности функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

Аналогично составляются разности порядка *k*:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, i = 0,1,\ldots,n-1$$

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции. Например,

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) =$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

Аналогично для любого *k* можно написать

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \ldots + (-1)^k y_0 \quad (3.13)$$

Используя конечные разности, можно определять y_k

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^k y_0 \quad (3.14)$$

Многочлен Ньютона будем искать в виде

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \quad (3.15)$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т.е

$$N(x_i) = y_i \qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Эти условия используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N(x_0) = a_0 = y_0,$$

$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1,$$

$$N(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$
$$= a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2,$$

....

Найдем отсюда коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Аналогично можно найти и другие коэффициенты.

Общая формула имеет вид $a_k = \dfrac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k},$ ***k = 0, 1, …, n.***

Подставляя эти выражения в формулу (3.15) получаем следующий вид *интерполяционного многочлена Ньютона*

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (3.16)$$

Конечные разности могут быть вычислены по формуле (3.13). Формулу (3.16) часто записывают в другом виде.

Для этого вводится переменная $t = (x - x_0)/h,$

тогда

$$x = x_0 + th, \qquad \frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = t - 2 \qquad ,\ldots, \qquad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

С учетом этих соотношений формулу (3.16) можно переписать в виде

$$N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (3.17)$$

Полученное выражение может аппроксимировать данную функцию $y = f(x)$

на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$.

С точки зрения повышения точности расчетов и уменьшения числа членов в (3.17) ограничимся случаем $t < 1$,

т.е. целесообразно использовать формулу (3.17) для

$$x_0 \le x \le x_1.$$

Для других значений аргумента, например для

$$x_1 \le x \le x_2,$$

вместо x_0 **лучше взять значение** x_1.

Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

$$N(x_i + th) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i$$

$$i = 0,1,\ldots \qquad (3.18)$$

Полученное выражение называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед.*

Интерполяционную формулу (3.18) обычно используют для вычисления значений функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка.

Разности $\Delta^k y_i$ **вычисляются через значения функции** $y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k}$,

причем $i + k \le n,$

поэтому при больших значениях *i* мы не можем вычислять разности высших порядков $k \le n - i.$

Например, при $i = n - 3$

в (3.18) можно учесть только $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y.$

Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа налево.

В этом случае $t = (x - x_n) / h,$ **т.е.** $t < 0,$

и интерполяционный многочлен Ньютона можно получить в виде

$$N(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$i = 0,1,\ldots \qquad (3.19)$$

Полученная формула называется *вторым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад.*

***Пример*. Вычислить в точках** $x = 0.1, 0.9$ **значения функции** $y = f(x)$ **заданной в таблице.**

x	y
0	1.2715
0.2	2.4652
0.4	3.6443
0.6	4.8095
0.8	5.9614
1.0	7.1005

***Решение*.**

Процесс вычислений удобно свести в ту же табл. Каждая последующая разность получается путем вычитания в предыдущей колонке верхней строки из нижней.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	**1.2715**	**1.1937**	**-0.0146**	**0.0007**	**-0.0001**	**0.0000**
0.2	**2.4652**	**1.1791**	**-0.0139**	**0.0006**	**-0.0001**	
0.4	**3.6443**	**1.1652**	**-0.0133**	**0.0005**		
0.6	**4.8095**	**1.1519**	**-0.0128**			
0.8	**5.9614**	**1.1391**				
1.0	**7.1005**					

При $x = 0.1$ **имеем**

$$t = (x - x_0)/h = (0.1 - 0)/0.2 = 0.5$$

По формуле (3.17) получим

$$N(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (3.17)$$

$$f(0.1)\approx N(0.1)=$$

$$=1.2715+0.5\cdot 1.1937+\frac{0.5(0.5-1)}{2!}(-0.0146)+$$

$$+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}\cdot 0.0007+$$

$$\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}\cdot(-0.0001)=1.8702.$$

Для сравнения по формуле линейной интерполяции получаем $f(0.1)\approx 1.8684.$

Значение функции в точке $x = 0.9$

нужно вычислять по формуле (3.19).

В этом случае $t = (x - x_n)/h = (0.9 - 1)/0.2 = -0.5.$

$$N(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$i = 0,1,\ldots \qquad (3.19)$$

$$f(0.9) \approx N(0.9) =$$

$$= 7.1005 - 0.5 \cdot 1.1391 - \frac{0.5(-0.5+1)}{2!}(-0.0128) -$$

$$- \frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!} \cdot 0.0005 -$$

$$\frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)}{4!} \cdot (-0.0001) = 6.5325.$$

Выполнять все расчеты для полиномиальной аппроксимации в Maple не нужно, поскольку системы имеет реализующую данный алгоритм встроенную функцию interp(X,Y,v).

Переменная *v* указывает имя переменной интерполяционного полинома.

Векторы X и Y должны содержать $n+1=N$ координат точек исходной зависимости, где n-степень интерполирующего полинома.

3.5 ТОЧНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

График интерполяционного многочлена

$y = F(x)$ **проходит через заданные точки,** т.е значения многочлена и данной функции

$y = f(x)$ совпадают в узлах $x = x_i, (i = 0,1,\ldots,n).$

В общем случае в точках отличных от узлов интерполяции, $R(x) = f(x) - F(x) \neq 0.$

Эта разность есть погрешность интерполяции и называется ***остаточным членом интерполяционной формулы.***

Остаточный член интерполяционного многочлена Лагранжа имеет вид

$$R_L(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x^*) \quad (3.20)$$

Здесь $f^{(n+1)}(x^*)$ **- производная** ***n+1*** **порядка функции** $f(x)$ **в некоторой точке**

$$x^*, x^* \in [x_0, x_n].$$

Остаточный член интерполяционного многочлена Ньютона можно записать в виде

$$R_N(x) = \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x^*)h^{n+1},$$

$$t = \frac{x - x_0}{h} \qquad (3.21)$$

Если узлы расположены произвольно (т.е. узлы не равноотстоящие), то вводят разделенные разности, определяемые формулами:

$$f(x_0, x_1) = (f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0) \quad (3.22)$$

$$f(x_0, x_1, x_2) =$$
$$= (f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1))/(x_2 - x_0) \quad (3.23)$$

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) =$$
$$= (f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))/(x_n - x_0) \quad (3.24)$$

Для вычисления разностей удобно пользоваться таблицей

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\dots$
x_0	f_0	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	
x_1	f_1	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\dots$
x_2	f_2	$f(x_2, x_3)$		
x_3	f_3			
…	…	….	…	…

***Интерполяционный многочлен Ньютона можно* записать в виде**

$$N(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} (x - x_0)\dots(x - x_{i-1})\, f(x_0, x_1, \dots, x_i) \quad (3.25)$$

Если функция $f(x)$ задана таблицей, то для оценки погрешности удобно учитывать приближенное равенство

$$\left| f^{(n+1)}(x^*) \right| \approx (n+1)! \left| f(x_0, x_1, \dots, x_n, x^*) \right| \quad (3.26)$$

Тогда

$$R(x^*) \approx f(x_0, x_1, \dots, x_n, x^*)(x^* - x_0)\dots(x^* - x_n) \quad (3.27)$$

Для вычисления $f(x_0, x_1, \dots, x_n, x^*)$ нужно дополнить первый столбец таблицы узлом x^*, а затем заполнить всю таблицу слева направо до получения нужной разности.

3.6 Сплайны

Широкое распространение для интерполяции получило использование кубических сплайн-функций – специальным образом построенных многочленов третьей степени.

Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала .

Если закрепить его в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклонов

α **и** β, **то между точками закрепления**

этот стержень (механический сплаин) примет некоторую форму, минимизирующую его потенциальную энергию.

Пусть форма этого стержня определяется функцией $y = S(x).$

Из курса сопротивления материалов известно, что уравнение свободного равновесия имеет вид

$$S^{IV}(x) = 0.$$

Отсюда следует, что между каждой парой соседних узлов интерполяции функция $S(x)$ **является многочленом третьей степени.**

Запишем ее в виде

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i \qquad (3.28)$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i **на всех** ***n*** **элементарных отрезках необходимо получить** ***4n*** **уравнений.**

Часть из них вытекает из условия прохождения графика функции $S(x)$ **через заданные точки**

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad S(x_i) = y_i$$

Эти условия можно записать в виде

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}$$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \qquad (3.29)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Эта система содержит *2n* уравнений.

Для получения недостающих уравнений зададим условия непрерывности первых и вторых производных в узлах интерполяции. Вычислим производные многочлена:

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \qquad (3.30)$$

Для интервала $x_i \le x \le x_{i+1}$ **формулы (3.30) примут вид**

$$S'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2,$$

$$S''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i) \qquad (3.31)$$

Приравнивая в каждом внутреннем узле $x = x_i$ **значения этих производных, вычисленные в левом и правом от узла интервалах , получим**

для $S'(x)$

$$b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 =$$
$$= b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_i - x_i) + 3d_{i+1}(x_i - x_i)^2,$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

Для $S''(x)$

$$2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x_i - x_i)$$

$$2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_{i+1}$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i$$

получаем $2n-2$ **уравнений**

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i, \quad i = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (3.32)$$

Недостающие два соотношения получаются из условий закрепления сплайна.

В частности, при свободном закреплении концов можно приравнять нулю кривизну линии в этих точках.

Такая функция называется свободным кубическим сплайном.

Из условий нулевой кривизны на концах следуют равенства нулю вторых производных в этих точках:

$$S''(x_0) = c_1 = 0, \quad S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0 \quad (3.33)$$

Уравнения (3.29)-(3.33) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения *4n* коэффициентов.

Ее можно решать любым известным методом.

Эту систему можно свести к более удобному виду.

Из условий (3.29) сразу можно найти все коэффициенты a_i.

Далее из (3.32), (3.33) получим

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = 1,2,...,n-1$$

$$d_n = -\frac{c_n}{3h_n} \quad (3.34)$$

Подставляя эти соотношения, а так же значения $a_i = y_{i-1}$ во второе уравнение (3.29) найдем коэффициенты b_i для $i \neq n$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i$$

$$y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^{\,2} + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_i$$

$$b_i h_i = y_i - y_{i-1} - \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 - c_i h_i^{\,2},$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \ (3.35)$$

$$i = 1, 2, .., n-1.$$

Аналогично для *i*=*n* $d_n = -\frac{c_n}{3h_n}$ **и** $a_n = y_{n-1}$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i$$

$$y_{n-1} + b_n h_n + c_n h_n^2 - \frac{c_n}{3h_n} h_n^3 = y_n$$

$$b_n h_n = y_n - y_{n-1} - c_n h_n^2 + \frac{c_n}{3h_n} h_n^3$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3} h_n c_n \quad (3.36)$$

Запишем первое уравнение (3.32)

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^{\,2}.$$

Учитывая выражения (3.34), (3.35) и (3.36), исключаем коэффициенты

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = 1,2,\ldots, n-1$$ **и** $$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i),$$

Получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i

$$c_1 = 0,$$

$$c_{n+1} = 0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right),$$

Матрица этой системы трехдиагональная, т.е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу.

По найденным из системы коэффициентам c_i **легко вычислить коэффициенты** $d_i, b_i.$

Согласно описанию справочной системы Maple, встроенная функция **spline(X, Y, x, к)** **предназначена для интерполирования таблично заданных функций (X, Y) натуральными сплайнами.**

В ней X, Y — векторы или одномерные массивы, x — независимая переменная, k — необязательный параметр, принимающий значения 1, 2, 3, 4, которые заменяются ключевыми словами linear, quadratic, cubic, quartic соответственно.